

التهای همدوس گرمایی روی سطح تخت و روی سطح کره آقای دکتر محمد مردانی
□□□□□□ □□□□□□□□ □□ □□□□□ □ □□□□□□□□□□ □□□□ □□ □□□□□□
□□□□□□ □□□□

دانشگاه شهرکرد
دانشکده علوم پایه - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
گرایش اتمی ملکولی

حالت‌های همدوس گرمایی روی سطح تخت و روی سطح کره

پژوهشگر
هاجر باقری

استاد راهنما
آقای دکتر علی مهدی‌فر

تابستان ۱۳۹۰

چکیده

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ به صورت ویژه حالت عملگر نابودی جبر ویل-هایزنبرگ تعریف می‌شوند. یکی از ویژگی‌های مهم حالت‌های مزبور که به جهت کاربردهای فیزیکی آن‌ها را از سایر حالت‌های کوانتومی متمایز کرده است، توزیع شمارش کوانتوم‌های برانگیختگی فوتون‌ها است که این امر از آمار پواسونی پیروی می‌کند. به طور مثال، در تجربه مشخص شده که توزیع آماری شمارش فوتون‌های نور لیزر نیز از آمار پواسونی تبعیت می‌کند که این خود همان ویژگی‌های همدوس استاندارد است. حالت‌های همدوس غیرخطی از تعمیم جبر ویل-هایزنبرگ به دست می‌آیند، ولی منشأ فیزیکی آن‌ها همچنان در دست بررسی است. با بررسی حرکت یک نوسانگر دوبعدی روی سطح کره، نشان داده شده است که تابع تغییر شکل $f(n)$ در نظریه‌ی حالت‌های همدوس غیرخطی می‌تواند به ساختار هندسی فضای فیزیکی نیز مربوط باشد.

از طرف دیگر در این مطالعات، سامانه در دمای صفر بررسی شده است. اما در دماهای بالاتر، به نظر می‌رسد که یکسری از خصوصیات غیرکلاسیکی حالت‌های مزبور تغییر یابند. بدین منظور در این پایان نامه اهداف زیر دنبال می‌شوند:

الف) بررسی نوسانگر هماهنگ روی سطوح تخت و کروی در دماهای غیر صفر و ساختن حالت‌های همدوس گرمایی غیرخطی متناظر با آن‌ها.

ب) بررسی ویژگی‌های آمار کوانتومی حالت‌های همدوس گرمایی به دست آمده. با مطالعه‌ی خواص آمار کوانتومی این حالت‌ها مشاهده شد که افزایش ویژگی‌های غیرکلاسیک حالت‌های همدوس گرمایی روی سطح کره (نظیر چلانگی در مؤلفه‌های کوادراتوری) را می‌توان به خمیدگی فضای فیزیکی و کاهش دما نسبت داد.

فهرست مطالب

۱	حالت‌های همدوس در فضای تخت و روی سطح کره	۱
۱	حالت‌های همدوس استاندارد	۱.۱
۲	ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد	۲.۱
۳	تعمیم حالت‌های همدوس	۳.۱
۴	حالت‌های همدوس با بعد متناهی	۴.۱
۴	فضای هیلبرت با بعد متناهی	۱.۴.۱
۵	حالت‌های همدوس با بعد متناهی	۲.۴.۱
۵	حالت‌های همدوس غیرخطی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت و روی سطح کره	۵.۱
۶	نوسانگر هماهنگ روی فضای تخت	۱.۵.۱
۸	جبر نوسانگر هماهنگ روی یک کره	۲.۵.۱
۱۱	حالت‌های همدوس در فضای هیلبرت با بعد متناهی	۳.۵.۱
۱۲	رابطه‌ی تفکیک واحد	۴.۵.۱
۱۴	ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی	۶.۱
۱۴	ساختار هندسی حالت‌های همدوس غیرخطی روی سطح تخت و روی سطح کره	۱.۶.۱
۱۵	ویژگی‌های آمار کوانتومی حالت‌های همدوس غیرخطی روی فضای تخت و روی کره	۷.۱
۱۷	شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها	۱.۷.۱
۱۷	پارامتر مندل	۲.۷.۱
۱۹	چلانندگی کوادراتوری	۳.۷.۱
۲۰		
۲۳	حالت‌های همدوس گرمایی	۲
۲۳	تحول زمانی آنسامبل‌ها	۱.۲
۲۳	روش سامانه در حالت تعادل	۱.۱.۲
۲۶	نوسانگرهماهنگ در مکانیک کلاسیک	۲.۲
۲۶	نوسانگر هماهنگ ساده	۱.۲.۲
۲۶	نوسانگر هماهنگ میرا	۲.۲.۲
۲۷	محاسبه مقدار انتظاری یک عملگر	۳.۲
۲۹	عملگرهای مددار و بدون مد در فضای هیلبرت گرمایی	۴.۲
۳۰	جبر لی در فضای هیلبرت گرمایی	۵.۲
۳۰	نوسانگر بوزونی گرمایی	۶.۲
۳۱	تبدیل بوگولیوبوف	۱.۶.۲
۳۲	عملگرهای گرمایی	۷.۲
۳۳	جبر لی گرمایی	۸.۲

۳۶ حالت همدوس گرمایی	۹.۲
۳۶ حالت همدوس در دمای صفر	۱.۹.۲
۳۶ حالت همدوس گرمایی در دمای $T = \beta^{-1}$ در فضای هیلبرت \mathcal{H}	۲.۹.۲
۳۸ حالت همدوس گرمایی در فضای مد دار	۳.۹.۲
۳۸ حالت همدوس گرمایی در حالت کلی	۴.۹.۲
۳۹ مدل جینز-کامینگز: برهم کنش تک اتم- میدان	۱۰.۲
۴۳ نمایش اتم در فضای فاز	۱.۱۰.۲
۴۵ محاسبه‌ی تابع توزیع Q برای حالت همدوس روی سطح کره	۲.۱۰.۲
۴۵ محاسبه‌ی تابع توزیع Q برای حالت عددی گرمایی	۳.۱۰.۲
۴۵ محاسبه‌ی تابع توزیع ویگنر برای حالت عددی گرمایی	۴.۱۰.۲

۳ حالت‌های همدوس گرمایی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت و روی سطح کره

۵۱ حالت‌های همدوس گرمایی غیرخطی	۱.۳
۵۱ حالت‌های همدوس گرمایی روی سطح تخت	۲.۳
۵۲ حالت‌های همدوس گرمایی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت	۱.۲.۳
۵۲ در فضای هیلبرت \mathcal{H}	۲.۲.۳
۵۲ حالت‌های همدوس گرمایی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت	۳.۲.۳
۵۲ در فضای هیلبرت $\tilde{\mathcal{H}}$	۳.۲.۳
۵۲ در فضای هیلبرت \mathcal{H}_T	۳.۳
۵۳ حالت‌های همدوس گرمایی غیرخطی نوسانگر هماهنگ روی کره در فضای هیلبرت گرمایی	۴.۳
۵۳ روابط تفکیک واحد	۱.۴.۳
۵۵ متریک فوبینی-استادی در فضای هیلبرت گرمایی	۵.۳
۵۸ ویژگی‌های آمار کوانتومی حالت‌های همدوس گرمایی غیرخطی روی سطح تخت و روی سطح کره	۱.۵.۳
۵۸ شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها	۲.۵.۳
۵۹ پارامتر مندل	۳.۵.۳
۶۰ چلانگی کوادراتوری	نتیجه‌گیری کلی
۶۲ نتیجه‌گیری کلی	۶.۳

فهرست شکل‌ها

۸ دستگاه مختصات ژنومی	۱.۱
	نمودار تغییرات میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس $ z\rangle_f$ بر حسب z و	۲.۱
۱۸ برای $N = 10$ (نقطه چین)، $N = 20$ (خط چین) و $N = 30$ (خط توپر).	۳.۱
	نمودار تغییرات میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس روی کره نسبت به λ	
	و برای مقادیر مختلف $N = 10$ (نقطه چین)، $N = 20$ (خط چین) و $N = 30$	
۱۹ (خط توپر).	۴.۱
	نمودار تغییرات پارامتر مندل بر حسب انحنای λ و برای $N = 10$ (نقطه چین)،	
۱۹ $N = 20$ (خط چین) و $N = 30$ (خط توپر).	۵.۱
	نمودار تغییرات \hat{S}_{1a} بر حسب φ برای $N = 10$ و برای $\lambda = 0.0$ (خط توپر)،	
۲۱ $\lambda = 0.1$ (خط چین) و $\lambda = 0.2$ (نقطه چین).	۶.۱
	نمودار تغییرات \hat{S}_{2a} بر حسب φ برای $N = 10$ و برای $\lambda = 0.0$ (خط توپر)،	
۲۱ $\lambda = 0.1$ (خط چین) و $\lambda = 0.2$ (نقطه چین).	۷.۱
	نمودار تغییرات \hat{S}_{1A} بر حسب φ برای $N = 10$ به ازای $\lambda = 0$ (خط توپر)،	
۲۲ $\lambda = 0.1$ (خط چین) و $\lambda = 0.5$ (نقطه چین).	۸.۱
	نمودار تغییرات \hat{S}_{2A} بر حسب φ برای $N = 10$ به ازای $\lambda = 0$ (خط توپر)،	
۲۲ $\lambda = 0.1$ (خط چین) و $\lambda = 0.5$ (نقطه چین).	
۴۲ وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت همدوس با فرض $ \alpha = 2$ بر حسب λt .	۱.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 1(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) =$	۲.۲
۴۶ 0.1 بر حسب λt .	۳.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 1(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) =$	
۴۶ 1.5 بر حسب λt .	۴.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 1(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) =$	
۴۷ 3 بر حسب λt .	۵.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت‌های عددی گرمایی $ 5(\beta)\rangle$ و فرض	
۴۷ $\bar{n}(\beta) = 0.1$ بر حسب λt .	۶.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 5(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) =$	
۴۸ 1.5 بر حسب λt .	۷.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 5(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) =$	
۴۸ 3 بر حسب λt .	۸.۲
	وارونی جمعیت اتم برای میدان در حالت‌های عددی گرمایی $ 1(\beta)\rangle$ و فرض	
۴۸ $\bar{n}(\beta) = 5$ بر حسب λt .	۹.۲
	تابع توزیع Q برای میدان در حالت عددی گرمایی $ 3(\beta)\rangle$ و فرض $\bar{n}(\beta) = 0.1$	۱۰.۲
۴۹ بر حسب x و y .	

۴۹	۱۱.۲	تابع توزیع Q برای میدان در حالت عددی گرمایی $ \beta\rangle_3$ و فرض $\bar{n}(\beta) = 1$ بر حسب x و y
۵۰	۱۲.۲	تابع توزیع ویگنر برای میدان در حالت عددی گرمایی $ \beta\rangle_6$ و فرض $\bar{n}(\beta) = 0.1$ (a) و $\bar{n}(\beta) = 1.5$ (b) بر حسب x و y
۶۲	۱.۳	نمودار تغییرات شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گرمایی $ \alpha(\beta)\rangle_f$ بر حسب α به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 0$ (خط توپر)، $\bar{n} = 1$ (خط چین)، $\bar{n} = 2$ (نقطه چین)
۶۲	۲.۳	نمودار تغییرات شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گرمایی $ \tilde{\alpha}(\beta)\rangle_f$ بر حسب α به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 1$ (خط چین)، $\bar{n} = 2$ (نقطه چین)
۶۳	۳.۳	نمودار تغییرات شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گرمایی $ \tilde{\alpha}(\beta)\rangle_s$ بر حسب α به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 0$ (خط توپر)، $\bar{n} = 1$ (خط چین)، $\bar{n} = 2$ (نقطه چین)
۶۳	۴.۳	نمودار تغییرات شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گرمایی $ \tilde{\alpha}(\beta)\rangle_s$ بر حسب α به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 1$ (خط چین)، $\bar{n} = 2$ (نقطه چین)
۶۳	۵.۳	نمودار تغییرات پارامتر مندل در فضای \mathcal{H} بر حسب انحنای λ به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 0$ (خط توپر)، $\bar{n} = 0.1$ (خط چین)، $\bar{n} = 0.2$ (نقطه چین)
۶۴	۶.۳	نمودار تغییرات پارامتر مندل در فضای \mathcal{H} بر حسب انحنای λ به ازای $N = 10$ و $\bar{n} = 0.1$
۶۴	۷.۳	نمودار تغییرات پارامتر مندل در فضای \mathcal{H} بر حسب انحنای \bar{n} به ازای $z = 0.5$ ، $N = 10$ و $\lambda = 1$
۶۴	۸.۳	نمودار دمای گذار بر حسب λ به ازای $N = 10$ و $z = 0.5$
۶۵	۹.۳	نمودار تغییرات S_{1a} بر حسب φ برای $N = 10$ به ازای $\lambda = 0.1$ و $\bar{n} = 0$ (خط توپر)، $\bar{n} = 0.1$ (خط چین) و $\bar{n} = 0.2$ (نقطه چین)
۶۵	۱۰.۳	نمودار تغییرات S_{2a} بر حسب φ برای $N = 10$ به ازای $\lambda = 0.1$ و $\bar{n} = 0$ (خط توپر)، $\bar{n} = 0.1$ (خط چین) و $\bar{n} = 0.2$ (نقطه چین)

مقدمه

سامانه‌های کوانتومی در دماهای غیر صفر و حالت‌های پایه‌ی آن که حالت‌های گرمایی نامیده می‌شوند، در مکانیک آماری بر اساس روش‌های مختلفی بررسی می‌گردد که در این جا به دو روش آن اشاره می‌کنیم. روش ۱: در گام نخست، ماتریس چگالی سامانه را محاسبه و سپس معادله‌ی لیوویل-فون نویمان را حل می‌کنند. روش ۲: ابتدا سامانه در دمای صفر بررسی و سپس در حالت گرمایی با فرض این که سامانه در آنسامبل کانونی و در حالت تعادل باشد، بیان می‌شود. این رهیافت برای بعضی از حالت‌های کوانتومی همچون حالت‌های عددی، همدوس و چلانده بررسی شده است.

در این پایان نامه که شامل سه فصل است، در فصل (۱) به نظریه‌ی حالت‌های همدوس می‌پردازیم و ابتدا با نگرش مروری بر این حالت‌ها، با برخی از مفاهیم اولیه‌ی آن آشنا خواهیم شد. در ادامه، ضمن معرفی تعمیم حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس غیرخطی را معرفی می‌کنیم. همچنین حالت‌های همدوس در فضای با بعد متناهی را معرفی خواهیم کرد.

در فصل (۲)، نحوه‌ی تأثیر دما را بر یک سامانه‌ی در حالت تعادل گرمایی و در آنسامبل کانونی بررسی و سپس حالت خلأ گرمایی را مطرح کرده و از روی آن، حالت‌های عددی گرمایی و همدوس گرمایی و ... را به دست می‌آوریم. در آخر این فصل نیز با توجه به مدل جینز کامینگز، چگالی و وارونی جمعیت اتم که در آن میدان در این حالت‌های گرمایی باشد، بررسی شده و توابع توزیع کوانتومی مربوط به حالت‌های عددی گرمایی را محاسبه خواهیم کرد.

در فصل (۳) حالت‌های همدوس گرمایی روی سطح تخت و سطح کره را معرفی کرده و سپس به بررسی ویژگی‌های آمار کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور خواهیم پرداخت. در ادامه‌ی این فصل خواص آمار کوانتومی نظیر شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلانده‌ی کوادراتوری را برای حالت‌های همدوس گرمایی روی سطح تخت و سطح کره بررسی خواهیم کرد.

فصل ۱

حالت‌های همدوس در فضای تخت و روی سطح کره

۱.۱ حالت‌های همدوس استاندارد

ساختار نوسانگر هماهنگ در فضای تخت از جمله مباحث عمده در بسیاری از حوزه‌های فیزیک مدرن به ویژه مکانیک کوانتومی به شمار می‌آید [۱]. در سال ۱۹۶۳ گلاوبر [۲، ۳]، سودارشان [۴] و کلاودر [۵]، ارتباط حالت‌های همدوس را با عملگرهای آفرینش و نابودی \hat{a}^\dagger و \hat{a} مشخص کردند. کنش این عملگرها روی فضای فوک،

$$\{|n\rangle, \langle m|n\rangle = \delta_{m,n}; m, n \in N\}_{n=0}^{\infty}; \quad (1.1)$$

به صورت زیر است،

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \hat{n}|n\rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle,\end{aligned} \quad (2.1)$$

که در آن $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر عددی است. این عملگرها از جبر ویل-هایزنبرگ تبعییت می‌کنند،

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I},$$

$$[\hat{a}, \hat{n}] = \hat{a},$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{a}^\dagger. \quad (۳.۱)$$

پس از اختراع نخستین لیزر در دهه‌ی ششم قرن بیستم، آزمایش‌ها نشان دادند که توزیع آماری شمارش فوتون‌های نور لیزر از نوع پواسونی است. از طرف دیگر، گلاوبر با استفاده از نحوه‌ی کنش عملگر نابودی \hat{a} ، موفق به یافتن ویژه‌حالت آن به صورت زیر گردید [۲، ۳].

$$\begin{aligned} \hat{a}|z\rangle &= z|z\rangle, \\ |z\rangle &= \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \\ \langle z|z\rangle &= 1. \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

با بررسی آمار این حالت‌ها مشاهده شد که،

$$P(n) = |\langle n|z\rangle|^2 = \exp(-|z|^2) \frac{|z|^{2n}}{n!}, \quad (۵.۱)$$

به این معنی که حالت‌های $|z\rangle$ نیز از آمار پواسونی (همان توزیع فوتونی نور لیزر) پیروی می‌کنند. بدین‌سان چشمه‌های نور لیزر به عنوان اولین منابع در دسترس حالت‌های همدوس استاندارد تابش الکترومغناطیسی معرفی گردیدند. حالت‌های همدوس (۴.۱) متناظر با جبر ویل-هایزنبرگ با عناصر $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{I}\}$ هستند، به طوری که مولدهای جبر مزبور رابطه‌های جابجایی (۳.۱) را برآورده می‌کنند. از این‌رو، حالت‌های به دست آمده در (۴.۱) حالت‌های همدوس کانونیک (استاندارد) نام گذاری شده‌اند. از طرف دیگر حالت‌های همدوس را با کنش نمایش یکانی و کاهش‌ناپذیر گروه ویل-هایزنبرگ روی حالت خلأ میدان نیز می‌توان به دست آورد،

$$\hat{D}(z, z^*) |0\rangle = |z\rangle, \quad (۶.۱)$$

که در آن $\hat{D}(z, z^*)$ به صورت زیر است،

$$\hat{D}(z, z^*) = \exp(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}). \quad (۷.۱)$$

۲.۱ ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد

۱- رابطه‌ی تفکیک واحد برای حالت‌های همدوس استاندارد به صورت زیر است،

$$\frac{1}{\pi} \int_C d^2z |z\rangle\langle z| = \hat{C}, \quad d^2z = |z|dz|z|d\theta, \quad (۸.۱)$$

فصل ۱. حالت‌های همدوس در فضای تخت و روی سطح کره

که در آن انتگرال‌گیری روی تمام صفحه‌ی اعداد مختلط صورت می‌گیرد.
۲- این حالت‌ها نامتعامل هستند،

$$|\langle z|\hat{z}\rangle|^2 = \exp|z - \hat{z}|^2. \quad (9.1)$$

۳- آمار حالت‌های همدوس از نوع پواسونی است و بنابراین چنین داریم،

$$(\Delta n)^2 = \langle \hat{n} \rangle = \langle z|\hat{n}|z\rangle, \quad (10.1)$$

که در آن $(\Delta n)^2$ وردایی^۱ عملگر عددی \hat{n} است.

۳.۱ تعمیم حالت‌های همدوس

در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی، جهت تعمیم حالت‌های همدوس انجام شده، که در ادامه به سه رده‌بندی کلی آن اشاره می‌کنیم:

(۱) تعمیم‌های دینامیکی: مبتنی بر پتانسیل‌های متفاوت، غیر از پتانسیل نوسانگر هماهنگ [۶].

(۲) تعمیم‌های جبری: متناظر با تغییر شکل جبر نوسانگر هماهنگ [۷، ۸].

(۳) تعمیم‌های تقارنی: بر اساس نظریه‌ی گروه‌ها [۹].

حالت‌های همدوس غیرخطی که در این پژوهش به آن پرداخته می‌شود، از جمله تعمیم‌های جبری محسوب می‌شود [۱۰، ۱۱]. بدین منظور در عملگرهای آفرینش و نابودی تغییر شکلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{a}f(\hat{n}) = f(\hat{n} + 1)\hat{a} \\ \hat{A}^\dagger &= f^\dagger(\hat{n})\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f^\dagger(\hat{n} + 1), \end{aligned} \quad (11.1)$$

و در نتیجه، ساختارهای جبر غیرخطی زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= (\hat{n} + 1)f(\hat{n} + 1)f^\dagger(\hat{n} + 1) - \hat{n}f(\hat{n})f^\dagger(\hat{n}), \\ [\hat{A}, \hat{n}] &= \hat{A}, \\ [\hat{A}^\dagger, \hat{n}] &= -\hat{A}^\dagger. \end{aligned} \quad (12.1)$$

در این صورت‌بندی شکل عملگر هامیلتونی با پادجابجاگر زیر تعیین می‌گردد [۱۲]،

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = \frac{1}{2}[(\hat{n} + 1)f(\hat{n} + 1)f^\dagger(\hat{n} + 1) + \hat{n}f(\hat{n})f^\dagger(\hat{n})]. \quad (13.1)$$

به منظور تعیین ساختار ریاضی حالت‌های همدوس غیرخطی، شیوهی متداول آن است که این حالت‌ها به عنوان ویژه حالت‌های عملگر \hat{A} در نظر گرفته شوند. فرض می‌کنیم $|z, f\rangle$ ویژه حالت \hat{A} در یک فضای هیلبرت باشد، به طوری که داشته باشیم،

$$\hat{A}|z, f\rangle = z|z, f\rangle. \quad (۱۴.۱)$$

در این صورت نمایش حالت‌های مزبور در پایه‌ی حالت‌های عددی به شکل زیر است

$$|z, f\rangle = N_f(|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n! [f(n)]!}} |n\rangle, \quad z \in C. \quad (۱۵.۱)$$

که در آن، $N_f(|z|^2)$ ضریب بهنجارش است و به کمک شرط $\langle z, f|z, f\rangle = 1$ به صورت زیر تعیین می‌شود،

$$N_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n! ([f(n)]!)^2}. \quad (۱۶.۱)$$

در این جا، بنا به تعریف چنین داریم

$$[f(n)]! = f(0)f(1)\dots f(n), \quad [f(0)]! = 1. \quad (۱۷.۱)$$

واضح است که حالت خاص $|z, 1\rangle$ همان حالت‌های همدوس استاندارد است [معادله‌ی (۴.۱)].

۴.۱ حالت‌های همدوس با بعد متناهی

در این بخش نخست فضای هیلبرت با بعد متناهی را معرفی می‌کنیم و سپس نحوه‌ی تعریف حالت‌های همدوس را در این فضای هیلبرت بررسی خواهیم کرد.

۱.۴.۱ فضای هیلبرت با بعد متناهی

فضای هیلبرت با بعد متناهی $(N+1)$ ، $\mathcal{H}^{(N+1)}$ ، با $N+1$ حالت عددی زیر،

$$|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N\rangle, \quad (۱۸.۱)$$

پوشیده می‌شود. حالت‌های عددی بالا یک مجموعه کامل و متعامد هستند، بدین مفهوم که،

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |n\rangle\langle n| &= \hat{I}_N, \\ \langle n|m\rangle &= \delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (۱۹.۱)$$

که در آن، \hat{I}_N عملگر یکانی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^{(N+1)}$ است. بنابراین می‌توانیم یک حالت عددی دلخواه مانند $|\psi\rangle_N$ را در این فضای هیلبرت با بعد متناهی برحسب حالت‌های عددی بالا بسط دهیم،

$$|\psi\rangle_N = \sum_{n=0}^N C_n^N |n\rangle. \quad (20.1)$$

عملگرهای آفرینش و نابودی نیز در این فضای با بعد متناهی چنین تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} \hat{a}_N &= \sum_{n=0}^N \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|, \\ \hat{a}_N^\dagger &= \sum_{n=0}^N \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (21.1)$$

بنابراین رابطه‌ی جابجاگری میان عملگرهای آفرینش و نابودی به سادگی به دست می‌آید،

$$[\hat{a}_N, \hat{a}_N^\dagger] = \hat{I}_N - (N+1)|N\rangle \langle N|. \quad (22.1)$$

نکته‌ی مهم این رابطه‌ی جابجاگری این است که با توجه به آن داریم،

$$[\hat{a}_N, [\hat{a}_N, \hat{a}_N^\dagger]] \neq 0. \quad (23.1)$$

بنابراین در محاسبات مربوط به عملگرهای آفرینش و نابودی در فضای هیلبرت با بعد متناهی، استفاده از رابطه‌ی $B.C.H$ ^۲ میسر نیست و از این رو بررسی‌های تحلیلی در فضای هیلبرت مزبور با پیچیدگی بیشتری همراه خواهد بود.

۲.۴.۱ حالت‌های همدوس با بعد متناهی

با توجه به محدود بودن حالت‌های عددی در فضای هیلبرت با بعد متناهی، حالت‌های همدوس با بعد متناهی را می‌توانیم از قطع کردن حالت‌های همدوس استاندارد در فضای هیلبرت با بعد متناهی به دست آوریم [۱۳]. در روش هم‌ارز دیگر، حالت‌های همدوس با بعد متناهی را

$$\begin{aligned} \text{می‌توان از کنش عملگر } \exp(z\hat{a}^\dagger), \text{ بر حالت خلاً } |0\rangle \text{ بدست آورد، یعنی} \\ |z\rangle_N = \mathcal{N}_N \exp(z\hat{a}^\dagger)|0\rangle = \mathcal{N}_N \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (24.1)$$

که در آن \mathcal{N}_N ضریب بهنجارش است.

۵.۱ حالت‌های همدوس غیر خطی نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت و روی سطح کره

در این بخش یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی را روی سطح تخت و روی سطح کره، در نظر می‌گیریم. سپس با بررسی جبر این نوسانگر، نشان می‌دهیم که می‌توانیم آن‌ها را به عنوان جبر نوسانگر یک بعدی تغییر شکل یافته تعبیر کنیم. به علاوه نشان می‌دهیم که جبر نوسانگر روی سطح کره را نیز می‌توان به عنوان تغییر شکل یافته‌ی جبر نوسانگر روی سطح تخت در نظر گرفت.

۱.۵.۱ نوسانگر هماهنگ روی فضای تخت

نوسانگر هماهنگ دو بعدی و متقارن در مختصات اقلیدسی با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود،

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (25.1)$$

در آن، \hat{x} و \hat{y} عملگرهای مختصات و \hat{p}_x و \hat{p}_y عملگرهای اندازه حرکت هستند. (در اینجا فرض کرده‌ایم $\hbar = \omega = m = 1$). با در نظر گرفتن عملگرهای فرادکین^۳ که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۸]

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{S}_{xx} - \hat{S}_{yy} = (\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) - (\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2), \\ \hat{S}_{xy} &= \hat{p}_x \hat{p}_y + \hat{x} \hat{y}. \end{aligned} \quad (26.1)$$

و همچنین با تعریف عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت،

$$\hat{L} \equiv \hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x. \quad (27.1)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۲۵.۱)، می‌توان نشان داد که عملگرهای \hat{B} و \hat{L} ثابت حرکت بوده، اما با یکدیگر جابجا نمی‌شوند و همراه با عملگر \hat{S}_{xy} یک جبر بسته تشکیل می‌دهند،

$$\begin{aligned} [\hat{L}, \hat{B}] &= 4i\hat{S}_{xy}, \\ [\hat{L}, \hat{S}_{xy}] &= -i\hat{B}, \\ [\hat{B}, \hat{S}_{xy}] &= 4i\hat{L}. \end{aligned} \quad (28.1)$$

فصل ۱. حالت‌های همدوس در فضای تخت و روی سطح کره

حال عملگرهای زیر را تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{\hat{L}}{2} - u\hat{I}, \\ \hat{A}^\dagger &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{B}}{2} + i\hat{S}_{xy} \right), \\ \hat{A} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{B}}{2} - i\hat{S}_{xy} \right),\end{aligned}\quad (۲۹.۱)$$

که در آن u ثابت حرکت است که باید تعیین گردد. اکنون با توجه به روابط جابجایی فوق در می‌یابیم که،

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = \phi(\hat{H}, \hat{n} + 1) - \phi(\hat{H}, \hat{n}). \quad (۳۰.۱)$$

در این‌جا، تابع ساختار،

$$\phi(\hat{E}, n) = \frac{1}{4} [E^2 - (2n + 2u - 1)^2], \quad (۳۱.۱)$$

یک تابع حقیقی و مثبت معین برای $n > 0$ است و در ضمن داریم،

$$\phi(\hat{E}, 0) = 0. \quad (۳۲.۱)$$

حال می‌توانیم فضای فوک را برای هر ویژه مقدار انرژی تعریف کنیم،

$$\begin{aligned}\hat{H}|E, n\rangle &= E|E, n\rangle, \\ \hat{n}|E, n\rangle &= n|E, n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \hat{A}|E, 0\rangle &= 0, \\ |E, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{[\phi(E, n)]!}} (\hat{A}^\dagger)^n |E, 0\rangle,\end{aligned}\quad (۳۳.۱)$$

به طوری که داریم،

$$[\phi(E, n)]! = \phi(E, n)\phi(E, n-1)\dots\phi(E, 1), \quad [\phi(E, 0)]! = 1. \quad (۳۴.۱)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۳.۱)، دامنه‌ی فضای فوک متناظر با ویژه‌مقدار انرژی، به دلیل تبهگنی برابر $N + 1$ است. به عبارت دیگر،

$$\phi(E, N + 1) = 0. \quad (۳۵.۱)$$

اگر ویژه‌مقدار انرژی را با E_N نشان دهیم و با استفاده از روابط (۳۲.۱)، (۳۵.۱) و شرط مثبت معین بودن تابع ساختار می‌توان u و E_N را برای سطح تخت به دست آورد،

$$(E_N)_{flat} \equiv (E_N)_f = N + 1, \quad u = \frac{-N}{2}. \quad (۳۶.۱)$$

بنابراین تابع ساختار نوسانگر هماهنگ روی سطح تخت به صورت زیر است،

$$\phi_f(E_N, n) = n(N + 1 - n). \quad (۳۷.۱)$$

با مقایسه‌ی دو معادله‌ی (۱۲.۱) و (۳۰.۱) می‌توانیم چنین بنویسیم،

$$nf^2(n) = \phi(E_N, n). \quad (۳۸.۱)$$

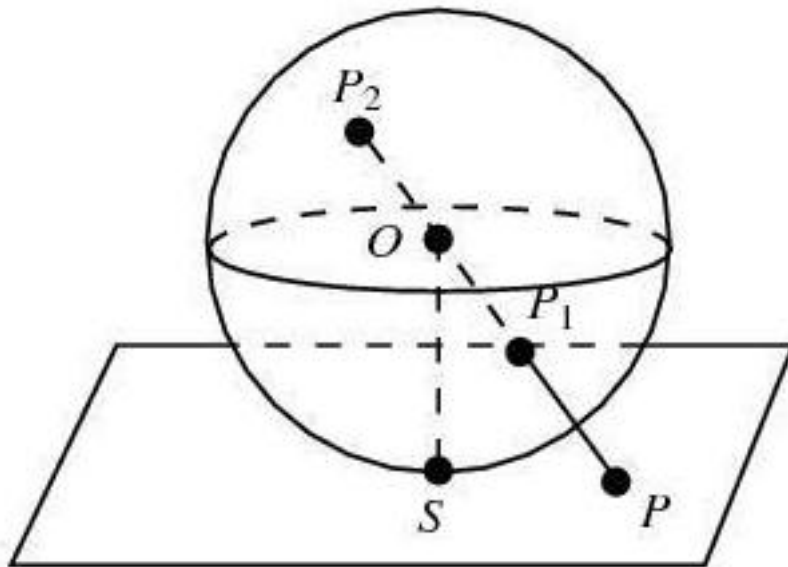
بنابراین از جبر نوسانگر هماهنگ دوبعدی به جبر نوسانگر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل

یافته دست پیدا می‌کنیم. پس با توجه به تابع ساختار $\phi_f(E_N, n)$ داریم،

$$f_f(n) = \sqrt{N + 1 - n}. \quad (۳۹.۱)$$

۲.۵.۱ جبر نوسانگر هماهنگ روی یک کره

در این بخش از دستگاه مختصات ژنومی بر روی کره، که تعمیمی از دستگاه مختصات دکارتی هندسه‌ی اقلیدسی است، استفاده می‌کنیم [۱۹]. این مختصات، مطابق شکل (۵۲.۱) مختصات دکارتی بر روی صفحه‌ی مماس بر کره است. بدین صورت که برای یافتن مختصات هر نقطه‌ی کره، از مرکز کره به نقطه مورد نظر شعاعی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا صفحه‌ی مماسی را قطع کند. مختصات دکارتی نقطه‌ی تقاطع در صفحه‌ی مماسی را به عنوان مختصات نقطه‌ی مورد نظر بر روی کره در نظر می‌گیریم. اگر (q_1, q_2, q_0) ، مختصات دکارتی نقطه‌ی \vec{r} بر روی



شکل ۱.۱: دستگاه مختصات ژنومی

فصل ۱. حالت‌های همدوس در فضای تخت و روی سطح کره

کره‌ای به شعاع R باشد، داریم

$$q_1^2 + q_2^2 + q_0^2 = R^2 = \frac{1}{\lambda}, \quad (۴۰.۱)$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{R^2}$ خمیدگی کره است. حال اگر مختصات دکارتی روی صفحه‌ی مماسی را نیز با x و y نشان دهیم، ارتباط بین این دو مجموعه‌ی مختصات، با استفاده از هندسه‌ی آن‌ها، به شکل زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{x}{\sqrt{1 + \lambda(x^2 + y^2)}}, \\ q_2 &= \frac{y}{\sqrt{1 + \lambda(x^2 + y^2)}}, \\ q_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda(x^2 + y^2)}}. \end{aligned} \quad (۴۱.۱)$$

به عبارت دیگر داریم،

$$\vec{r} = \left(\frac{x}{A}, \frac{y}{A}, \frac{1}{\sqrt{\lambda A}} \right), \quad (۴۲.۱)$$

که در آن

$$A = \sqrt{1 + \lambda(x^2 + y^2)}, \quad (۴۳.۱)$$

است. حال با دیفرانسیل‌گیری از \vec{r} چنین به دست می‌آوریم،

$$d\vec{r} = \vec{r}_x dx + \vec{r}_y dy, \quad (۴۴.۱)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \vec{r}_x &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(\frac{1 + \lambda y^2}{A^3}, \frac{-\lambda xy}{A^3}, \frac{-\sqrt{\lambda} x}{A^3} \right), \\ \vec{r}_y &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\frac{-\lambda xy}{A^3}, \frac{1 + \lambda x^2}{A^3}, \frac{-\sqrt{\lambda} y}{A^3} \right). \end{aligned} \quad (۴۵.۱)$$

بنابراین، با استفاده از معادله‌ی (۴۴.۱)، متریک کره بر حسب مختصات x و y به شکل زیر به دست می‌آید،

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_x \cdot \vec{r}_x) dx^2 + (\vec{r}_y \cdot \vec{r}_y) dy^2 + 2(\vec{r}_x \cdot \vec{r}_y) dx dy. \quad (۴۶.۱)$$

بدین‌سان، متریک مزبور را با استفاده از معادله‌ی (۴۵.۱)، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{1 + \lambda y^2}{A^4} \right) dx^2 + \left(\frac{1 + \lambda x^2}{A^4} \right) dy^2 - 2 \frac{\lambda xy}{A^4} dx dy \\ &= \frac{dx^2 + dy^2 + \lambda(x dy - y dx)^2}{A^4}. \end{aligned} \quad (۴۷.۱)$$

از این‌رو، متریک کره بر حسب مختصات x و y ، با استفاده از تعریف A ، به شکل زیر به دست می‌آید،

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + \lambda(xdy - ydx)^2}{[1 + \lambda(x^2 + y^2)]^2}. \quad (۴۸.۱)$$

دیده می‌شود که در حد فضای تخت $\lambda \rightarrow 0$ ، متریک (۴۸.۱) به متریک بر روی صفحه تخت تبدیل می‌شود،

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (۴۹.۱)$$

حال اگر $\frac{dS}{dt}$ را محاسبه و از روی آن لاگرانژی را به دست آوریم، آنگاه هامیلتونی نوسانگر هماهنگ بر روی سطح کره در این مختصات، به صورت زیر است [۱۴]،

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{\pi}^2 + \lambda\hat{L}^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (۵۰.۱)$$

که در آن چنین داریم،

$$\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{\lambda}{2}[\hat{x}(\vec{x} \cdot \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{x})\hat{x}], \quad (۵۱.۱)$$

و

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2}\hat{L}_{ij}\hat{L}_{ij}, \quad \hat{L}_{ij} = \hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i. \quad (۵۲.۱)$$

مشابه نوسانگر هماهنگ بر روی فضای تخت عملگرهای زیر را تعریف کرده،

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{S}_{xx} - \hat{S}_{yy} = (\hat{\pi}_x^2 + \hat{x}^2) - (\hat{\pi}_y^2 + \hat{y}^2), \\ \hat{S}_{xy} &= \frac{1}{2}\{\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\} + \hat{x}\hat{y}, \end{aligned} \quad (۵۳.۱)$$

و در نهایت همانند روش فضای تخت، تابع ساختار زیر را به دست می‌آوریم،

$$\phi(E, n) = E^2 - (\omega^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda E)(2n + 2u - 1)^2 + \frac{\lambda^2}{4}(2n + 2u - 1)^4. \quad (۵۴.۱)$$

همانند قبل، فضای فوک متناظر با نوسانگر هماهنگ روی کره را بنا می‌کنیم. با فرض وجود یک نمایش با بعد متناهی برای این جبر، معادلات (۳۲.۱) و (۳۵.۱) همچنان برقرار خواهند

بود. بنابراین ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر است

$$(E_N)_{sphere} \equiv (E_N)_s = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4}(N+1) + \frac{\lambda}{2}(N+1)^2}, \quad u = \frac{N}{2}. \quad (۵۵.۱)$$

و سرانجام تابع ساختار زیر برای نوسانگر هماهنگ روی کره بدست می‌آید،

$$\phi_s(E, n) = n(N+1-n) \left[\lambda(N+1-n) + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4}} \right] \left(\lambda n + \frac{\lambda^2}{4} \right). \quad (۵۶.۱)$$

به سادگی دیده می‌شود که در حد $\lambda \rightarrow 0$ ویژه مقادیر انرژی (۵۶.۱) و تابع ساختار (۵۵.۱) به ویژه مقادیر انرژی (۳۹.۱) و (۳۶.۱) در فضای تخت تبدیل می‌شوند. با توجه به معادلات (۳۸.۱) و (۵۶.۱) داریم،

$$f_s(\hat{n}) = f_f(\hat{n})g(\lambda, \hat{n}), \quad (۵۷.۱)$$

به طوری که،

$$g(\lambda, \hat{n}) = \sqrt{\lambda(N+1-\hat{n}) + \sqrt{(1+\frac{\lambda^2}{4})(\lambda\hat{n} + \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}})}}. \quad (۵۸.۱)$$

واضح است که در حد فضای تخت، $g(\lambda, \hat{n})$ به سمت واحد میل می‌کند و لذا معادله‌ی (۵۷.۱) به معادله‌ی (۳۹.۱) تبدیل می‌گردد. بنابراین، به‌طور خلاصه:

- می‌توان جبر نوسانگر هماهنگ دوبعدی را به عنوان جبر یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی تغییر شکل یافته با تابع تغییر شکل $f_f(n)$ در نظر گرفت.

- می‌توان جبر نوسانگر هماهنگ بر روی کره را به عنوان تغییر شکل یافته‌ی جبر نوسانگر هماهنگ بر روی صفحه تخت با تابع تغییر شکل $g(\lambda, n)$ در نظر گرفت.

بدین‌سان، برای تابع تغییر شکل $f(n)$ ، از جبر تغییر شکل یافته‌ی نوسانگر هماهنگ، یک تعبیر هندسی ارائه شده است [۱۴].

۳.۵.۱ حالت‌های همدوس در فضای هیلبرت با بعد متناهی

با استفاده از توابع تغییر شکل $f_f(\hat{n})$ و $f_s(\hat{n})$ و جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۱۱.۱) درمی‌یابیم که

$$\hat{A}|0\rangle = 0 = \hat{A}^\dagger|N\rangle. \quad (۵۹.۱)$$

بنابراین برای هر مقدار ثابت N (یا مقدار ثابت انرژی E_N) با یک فضای هیلبرت با بعد متناهی مواجه می‌شویم. هدف در این بخش ساخت حالت‌های همدوس متناظر با فضای تخت و کره در این فضای هیلبرت با بعد متناهی است.

حالت‌های همدوس غیرخطی روی فضای تخت

با استفاده از معادلات (۱۱.۱) و (۳۹.۱) در فضای تخت چنین داریم،

$$\begin{aligned} \hat{A}|n\rangle &= \chi_n^{(N)}|n-1\rangle, \\ \hat{A}^\dagger|n\rangle &= \chi_{n+1}^{(N)}|n+1\rangle, \end{aligned} \quad (۶۰.۱)$$

که در آن داریم،

$$\chi_n^{(N)} = \sqrt{n(N+1-n)}. \quad (۶۱.۱)$$

حال برای تعریف حالت‌های همدوس از معادله‌ی (۲۴.۱) استفاده کرده و داریم

$$|z\rangle_f = (1 + |z|^2)^{-\frac{N}{2}} \exp(z\hat{A}^\dagger)|0\rangle = (1 + |z|^2)^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} z^n |n\rangle, \quad (۶۲.۱)$$

که در آن z یک عدد مختلط است.

حالت‌های همدوس غیرخطی روی یک کره

در مورد کره، با استفاده از روابط (۵۷.۱) و (۳۹.۱) چنین بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \hat{A}|n\rangle &= [g(\lambda, n)]\chi_n^{(N)}|n-1\rangle, \\ \hat{A}^\dagger|n\rangle &= [g(\lambda, n+1)]\chi_{n+1}^{(N)}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (۶۳.۱)$$

بنابراین همانند فضای تخت، حالت‌های همدوس قطع شده را بر روی کره بنا می‌کنیم،

$$|z\rangle_s = \mathcal{N}(|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp(z\hat{A}^\dagger)|0\rangle = \mathcal{N}(|z|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} [g(\lambda, n)]! z^n |n\rangle, \quad (۶۴.۱)$$

که در آن، ضریب بهنجارش با عبارت زیر داده می‌شود،

$$\mathcal{N}(|z|^2) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} ([g(\lambda, n)]!)^2 |z|^{2n}. \quad (۶۵.۱)$$

۴.۵.۱ رابطه‌ی تفکیک واحد

در این بخش نشان می‌دهیم که حالت‌های همدوس ساخته شده روی فضای تخت و روی کره تشکیل یک مجموعه‌ی ابرکامل می‌دهند. به این منظور باید نشان دهیم که یک تابع سنجی

$m(|z|^2)$ وجود دارد، به طوری که اتحاد زیر برقرار باشد،

$$\int d^2z |z\rangle m(|z|^2) \langle z| = \sum_{n=0}^N |n\rangle \langle n| = I_N. \quad (۶۶.۱)$$

این تابع سنجی برای حالت‌های همدوس روی فضای تخت چنین است،

$$m_f(|z|^2) = \frac{N+1}{\pi} \frac{1}{(1+|z|^2)^2}. \quad (۶۷.۱)$$