دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

انتگرال‌های آبلی و کاربردهای آن‌ها در مسأله شانزدهم هیلبرت

رساله دکتری ریاضی کاربردی گرایش دستگاه‌های دینامیکی

نعمت اله نیامرادی

استاد راهنما

حمیدرضا ظهوری زنگنه

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی کاربردی گرایش دستگاه‌های دینامیکی آقای نعمت اله نیامرادی

تحت عنوان

انتگرال‌های آبلی و کاربردهای آن‌ها در مسأله شانزدهم هیلبرت

در تاریخ ۵ آذر ۸۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	حمیدرضا ظهوری زنگنه
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر علی گلمکانی (دانشگاه خیام مشهد)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر سید محمود منجگانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

فهرست مطالب

چکیده:

در این رساله ضمن معرفی مسأله شانزدهم هیلبرت و فرم مماسی آن به بررسی تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی چند خانواده از دستگاه‌های انتگرال‌پذیر و هامیلتونی تحت اختلال‌های چندجمله‌ای با استفاده از روش‌های مختلف و بررسی تعداد صفرهای انتگرال‌های آبلی نظیرشان می‌پردازیم. در این پایان‌نامه به‌جز فصل اول که مقدمه می‌باشد بقیه فصل‌ها جدید می‌باشند.

فصل ۱

مقدمه

۱–۱ مسأله شانزدهم هیلبرت

در سال ۱۹۰۰ میلادی، هیلبرت در دوّمین کنگره بین المللی ریاضی‌دانان که در شهر پاریس برگزار شد، در یک سخنرانی ۲۳ مسأله باز برگرفته از شاخه‌های مختلف ریاضیات را مطرح کرد که بسیاری از آن‌ها در طول قرن گذشته حل شده و یا پاسخ منفی دریافت کرده‌اند. از میان این مسائل، مسأله شانزدهم پس از گذشت بیش از یک قرن هنوز به طور کامل حل نشده وتحقیقات بسیاری در اطراف آن صورت می‌گیرد.
قسمت دوّم مسأله شانزدهم هیلبرت به صورت زیر است: درباره تعداد و مکان سیکل‌های حدی از یک میدان برداری چند جمله‌ای از درجه n در صفحه چه می‌توان گفت؟ منظور از یک سیکل حدی یک مدار بسته ایزوله شده از یک میدان برداری متناظر با یک جواب تناوبی معادله دیفرانسیل وابسته به میدان برداری است.
سؤال هیلبرت به سه مسأله زیر تقسیم می‌شود که هر یک نیاز به یک جواب قوی دارد.
مسأله اوّل: آیادرست است که یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه، تعداد متناهی سیکل حدی دارد.
مسأله دوّم: آیادرست است که تعداد سیکل‌های حدی از یک میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه با یک عدد ثابت کران‌دار می‌شوند که تنها به درجه چندجمله‌ای‌ها بستگی دارد. این کران بالا با $H(n)$ نمایش داده می‌شود. چون میدان‌های برداری خطی سیکل حدی ندارند از این رو $H(۱) = ۰$، امّا مقدار دقیق

$H(2)$ هنوز مشخص نیست.

مسأله سوّم: یک کران بالا برای $H(n)$ ارائه دهید.

یک جواب به هر یک از این مسائل جوابی را برای مسأل قبلی به دنبال خواهد داشت. تاکنون فقط مسأله اوّل حل شده است و جواب مثبت است زیرا **ایلیاشنکو** [1] [۲۹] و **اکال** [2] [۱۷] مستقلاً نشان دادند که نه تنها میدان‌های برداری چندجمله‌ای بلکه میدان‌های برداری تحلیلی نیز در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارند. رونوشت های تحلیلی زیر از مسأل اوّل و دوّم وجود دارند.

مسأله چهارم: آیادرست است که یک میدان برداری تحلیلی روی ۲−کره تعداد متناهی سیکل حدی دارد.

مسأله پنجم: آیادرست است که برای هر خانواده تحلیلی از میدان‌های برداری با تعداد متناهی پارامتر روی ۲−کره تعداد سیکل‌های حدی معادلات در خانواده به طور یکنواخت نسبت به پارامتر کراندار می‌شود به شرط آن که مجموعهٔ پارامتر فشرده باشد.

مسأله چهارم نیز توسط ایلیاشنکو و اکال حل شده است. یک جواب مثبت برای مسأله پنجم جواب‌های مثبتی را برای مسائل اوّل و دوّم و چهارم به همراه دارد. حال با یک بحث مختصر نشان می‌دهیم که چگونه مسائل اوّل و دوّم به مسأله پنجم کاهش می‌یابند. یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه به یک میدان برداری تحلیلی روی ۲−کره تبدیل می‌شود. صفحهٔ مماس به‌کره یکّه در نقطه‌ای که قطب جنوبی نامیده می‌شود و تصویری از کره منهای دایره استوا روی صفحه در طول خطوط راست گذرا از مرکز کره را در نظر می‌گیریم. نگاشت معکوس یک دیفیومورفیسم روی هر یک از دو نیم کره باز(نیم کره شمالی و جنوبی) است. میدان برداری چند جمله‌ای روی صفحه، منتقل شده به نیم کره‌ها، تبدیل به یک میدان برداری تحلیلی می‌شود. در این تناظر بردارهای در صفحه که به بینهایت میل می‌کنند متناظر با بردارها در خط استوای کره هستند. این میدان برداری بعد از ضرب کردن در یک توان صحیح از فاصله تا صفحه گذرا از خط استوا، با تعداد متناهی نقاط تعادل روی همه جا روی کره تحلیلی است. تعداد سیکل‌های حدی برای میدان جدید حداقل ۲ برابر تعداد سیکل‌های حدی برای میدان اوّلیه است. در این صورت هر کران بالا از تعداد سیکل‌های حدی از میدان جدید یک کران بالا را برای میدان برداری چند جمله‌ای اوّلیه نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر، ضرب کردن در یک عامل ثابت ناصفر تعداد سیکل‌های حدی یک میدان برداری چند جمله‌ای را تغییر نمی‌دهد. از این رو، فضای پارامتر برای میدان‌های برداری چند جمله‌ای با درجه مفروض در صفحه بایستی فضای ضرایب چندجمله‌ای‌های تجزیه شده به حاصل ضرب باشد. بنابراین، آن یک فضای تصویر است و از این رو فشرده است.

اینک صورت قسمت دوّم مسأله شانزدهم هیلبرت و بحث فوق را به فرم ریاضی مطرح می‌کنیم. قسمت

---
[1] Ilyashenko
[2] Ecale

دوّم مسأله شانزدهم هیلبرت ماکزیمم تعداد $H(n)$ و مکان نسبی از سیکل‌های حدی سیستم چند جمله‌ای به فرم

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \qquad (E_n)$$

از درجه n، یعنی $\max(\deg P, \deg Q) = n$ را بررسی می‌کند. برای این مسأله **لوید**[۳] در [۳۵] اظهار کرد که سیمای برجسته و قابل توجه این است که فرض مسأله جبری است در حالی‌که نتیجه آن توپولوژیکی است. هیلبرت حدس زد که تعداد سیکل‌های حدی (E_n) با یک عدد کران‌دار می‌شود که تنها به درجه n از میدان‌های برداری بستگی دارد.

خلاصه تاریخچه:

در سال ۱۹۲۳ **دولاک**[۴] در [۱۶] ادّعا کرد که مسأله اوّل را با تعمیم کاملش حل کرده است. در اواسط سال ۱۹۵۰، **پتروفسکی**[۵] و **لاندیس**[۶] در [۴۶] جوابی برای مسأله سوّم انتشار دادند. آن‌هاادّعا کردند که $H(n) \leq P_۳(n)$ و $H(۲) = ۳$ که در آن $P_۳(n)$ چندجمله‌ای خاص زیر از درجه ۳ است.

$$P_۳(n) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(۶n^۳ - ۷n^۲ - ۱۱n + ۱۶) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \\ \frac{۱}{۲}(۶n^۳ - ۷n^۲ + n + ۴) & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در اوایل سال ۱۹۶۰ادّعایشان توسط **نُویکف**[۷] در [۳۷] رد شد و میدان برداری درجه دوّم زیر با ۴ سیکل حدی ساخته شد.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - ۱۰x^۲ + (۵+\delta)xy + y^۲ \\ \dot{y} = x + x^۲ + (-۲۵ + ۸\epsilon - ۹\delta)xy \end{cases}$$

که در آن $\lambda = -۱۰^{-۲۰۰}$ و $\epsilon = -۱۰^{-۵۲}$ و $\delta = -۱۰^{-۱۳}$.

لذا $H(۲) \geq ۴$ و فرض $H(۲) = ۴$ به عنوان یک حدس اثبات نشده باقی است.

سال ۱۹۵۴ **اُتوروکوف**[۸] در [۳۸] نشان داد که برای $n \geq ۶$ زوج، $H(n) = \frac{۱}{۲}(n^۲ + ۵n - ۱۴)$ و برای $n \geq ۷$ فرد، $H(n) = \frac{۱}{۲}(n^۲ + ۵n - ۲۶)$. در سال ۱۹۸۱ یک اشتباه بزرگ در اثبات قضیه دولاک پیدا شد که ناشی از اشتباهی بود که در اثبات یکی از لم‌هایش وجود داشت. بنابراین بعد از ۸۰ سال پیشرفت، معلومات ما درباره مسأله شانزدهم هیلبرت تقریباً مانند زمانی بود که مسأله بیان شد.

---
[۳] Lloyd
[۴] Dulac
[۵] Petrovskii
[۶] Landis
[۷] Novikov
[۸] Otrokov

در آغاز سال ۱۹۸۰ میلادی، ایلیاشانکو برای اثبات دولاک یک مثال نقض ساده یافت. سپس ثابت کرد که میدان‌های برداری چند جمله‌ای با نقاط تعادل عام روی صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارند. **بامون** [۹] در [۱۰] ثابت کرد که هر سیستم چند جمله‌ای مرتبه دوّم تعداد متناهی سیکل حدی دارد.برای سیستم چند جمله‌ای از درجهٔ $n > ۲$ و معادلات دیفرانسیل تحلیلی، مسأله متناهی بودن مستقلاً توسط ایلیاشانکو و اکال حل شد. شاید این پیشرفت یکی از مهمترین و عمیق ترین نتایج در تاریخ مطالعه قسمت دوّم مسأله شانزدهم هیلبرت است.

قضیه ۱.۱ (متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی)
یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه، تعدادمتناهی سیکل حدی دارد.این نتیجه برای میدان برداری تحلیلی روی ۲–کره نیز درست است.

سال ۱۹۹۵ **کریستوفر**[۱۰] و **لوید**[۱۱] در [۱۴] ثابت کردند که برای k ثابت $H(n) \geq kn^۲ \ln(n)$. **لی** [۱۲] در [۳۰] این نتیجه را بهبود بخشید و ثابت کرد که
$H(n) \geq \frac{۱}{۴}(n+۱)^۲(۱.۴۴۲۶۹۵ \ln(n+۱) - \frac{۱}{۶}) + n - \frac{۲}{۳}$.

۱–۲ مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت

چون مسأله اولیه هیلبرت هم‌چنان حل نشده باقی مانده است. همان‌گونه که در بخش قبل ذکر شد، اسمیل لیستی از صورت‌های محدود ساده شده آن را تحت عنوان مسائل حل نشده قرن بیست و یکم ارائه کرد [۵۰، ۵۱]. در این بخش به معرفی یکی از این مسائل محدود شده هیلبرت می‌پردازیم. فرض کنید $H = H(x,y)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x و y از درجه $m \geq ۲$ باشد و منحنی‌های مسطح $\gamma \subset \{(x,y) : H(x,y) = h\}$ تشکیل یک خانواده پیوسته ازمنحنی‌های بسته جبری حقیقی $\{\gamma_h\}$ را برای $h_۱ < h < h_۲$ بدهند. جهت یادآوری، منحنی $f(x,y) = ۰$ را جبری گوییم هرگاه $f(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد. چندجمله‌ای ۱– فرم $\omega = f(x,y)dy - g(x,y)dx$ را در نظر بگیرید، که در آن $max(deg(f), deg(g)) = n \geq ۲$.

[۹] Bamon
[۱۰] Cheristopher
[۱۱] Lloyd
[۱۲] li

تعریف ۲.۱ انتگرال ۱–فرمی‌های چندجمله‌ای $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ روی خانواده منحنی‌های بسته‌ی Γ_h تعریف شده توسط منحنی‌های جبری حقیقی $H(x,y) = h$ را انتگرال آبلی نامیم و آن‌را به‌صورت $I(h) = \int_{\Gamma_h} p(x,y)dx + q(x,y)dy$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱ فرض کنید U یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^2$ و $H \in \mathcal{C}^2(U)$ باشد که $H = H(x,y)$، $x, y \in \mathbb{R}$. دستگاه معادلات دیفرانسیل به شکل

$$\dot{x} = H_y, \ \ \dot{y} = -H_x, \qquad (1)$$

یک دستگاه همیلتونی مسطح روی U نامیده می‌شود. مدارهای دستگاه (۱) روی سطوح تراز $H = h$ قرار دارند و تابع $H(x,y)$ را تابع همیلتونی این دستگاه گویند. هرگاه $H(x,y) = y^2 + U(x)$ و $U(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشد، منحنی جبری $H(x,y) = h$ را در حالت $m = 1, 2$، **گویا** برای $m = 3, 4$، **بیضوی** و برای $m \geq 5$، **فوق بیضوی** گویند.

آرنولد در [۲ ،۱] مسأله زیر را که به مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت معروف است ارایه داد

مسأله۱: برای ثابتهای m و n حداکثر تعداد $Z(m,n)$ از صفرهای انتگرال آبلی

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \omega$$

را بیابید.

یادآوری می‌کنیم که انتگرال آبلی، انتگرال یک ۱ – فرم گویا در طول یک بیضی جبری است. توجه کنید که در مسأله بالا باید تمام خانواده‌های بیضی های ممکن $\{\gamma_h\}$، و f و g دلخواه در نظر گرفته شود. بنابراین مهم نیست که در ساختار ω قبل از g ، + یا – قرار گیرد.

تاکنون، اکثر نتایج وابسته به مسأله شانزدهم هیلبرت ضعیف شده به اختلالات سیستم‌های هامیلتونی مربوط می‌شوند. برای سیستم‌های هامیلتونی مختل شده، در سال ۱۹۸۴، **خوانسکی** [۱۳] و **وارچنکو** [۱۴] به طور مستقل در یک قضیه ثابت کردند که $Z(m,n)$ یک عدد متناهی است یعنی تعداد صفرهای ایزوله از $I(h)$ به طور یکنواخت نسبت به m و n کراندار می‌شود، امّا عبارت صریحی از $Z(m,n)$ به دست نیامده است.

قضیه ۴.۱ [۵۶] (وارچنکو) یک عدد $Z(m,n)$ وجود دارد به طوری که، برای هر چند جمله‌ای حقیقی درجه n با دو متغیر و برای هر خانواده پیوسته از مولفه‌های همبند و بسته از منحنی‌های تراز آن‌ها Γ_h و برای هر فرم دیفرانسیلی $\omega = Pdy - Qdx$ با مولفه‌هایی از درجه حداکثر m، انتگرال $\oint_{\Gamma_h} \omega$ در طول Γ_h یا بر حسب h متحد با صفر است و یا بیش از $Z(m,n)$ ریشه حقیقی با شمارش تکرار ندارد.

[۱۳] Khovansky

[۱۴] Varchenko

قضیه ۵.۱ [۳۲]. $Z(m,n) < \infty$.

در نگاه اول ممکن است به نظر برسد که این مسأله ارتباطی با مسأله شانزدهم هیلبرت ندارد. در ادامه دیده می‌شود که چگونه این دو به هم مرتبط‌اند. توجه کنید که مشابه نقاط تعادل، منظور از تعیین هذلولوی بودن یک سیکل حدی بررسی رفتار مدارهای اطراف آن است. در زیر به بیان قضیه لیوویل[۱۵] می‌پردازیم، این قضیه محکی برای تعیین پایداری مدارهای تناوبی دستگاه دینامیکی (۲۶) است. از این قضیه در بخش بعدی استفاده می‌کنیم.

قضیه ۶.۱ [۳۹].فرض کنید $\gamma(t)$ یک مدار T–تناوبی از دستگاه دینامیکی (۲۶) باشد. در این‌صورت

(i) $\gamma(t)$ یک سیکل حدی مجانبی پایدار است هرگاه $\int_0^T \nabla.\chi(\gamma(t))dt < 0$.

(ii) $\gamma(t)$ یک سیکل حدی ناپایدار است هرگاه $\int_0^T \nabla.\chi(\gamma(t))dt > 0$.

(iii) اگر $\int_0^T \nabla.\chi(\gamma(t))dt = 0$، آن‌گاه $\gamma(t)$ ممکن است پایدار، ناپایدار، نیمه پایدار و یا متعلق به طیفی از سیکل‌های حدی باشد (توجه کنید که عملگر ∇، عملگر گرادیانی است).

۱–۳ قضیه پوانکاره – پونتریاگین

فرض کنیم چندجمله‌ای $H(x,y)$ همانند بالا و میدان برداری همیلتونی X_H متناظر با آن به صورت زیر باشد

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \tag{۲}$$

میدان برداری مختل شده $X_{H,\varepsilon}$ آن‌را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon g(x,y), \tag{۳}$$

که در آن f و g چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y با حداکثر درجه n هستند، و ε یک پارامتر کوچک است.

فرض کنیم که یک خانواده از بیضی‌های $\gamma_h \subset H^{-1}(h)$ موجود باشند که به طور پیوسته وابسته به پارامتر $h \in (a,b)$ هستند. دراین‌صورت انتگرال آبلی نظیر معادله (۲) به صورت زیر است

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy - g(x,y)dx. \tag{۴}$$

[۱۵] Liouville

واضح است که تمام γ_h ها، مدارهایی تناوبی از دستگاه همیلتونی (۲) هستند. در این‌صورت می‌توان مسأله زیر را مطرح کرد:

مسأله ۲: چه تعداد از مدارهای دستگاه مختل شده(۳) برای ε کوچک سالم باقی می‌ماند؟

توجه شود که اگر تعداد چنین مدارهایی متناهی باشد، آن‌گاه آن‌ها سیکل‌های حدی دستگاه (۲) هستند.

این سؤال را می‌توان به گونه‌ای دیگر نیز مطرح کرد: آیا ممکن است که یک مقدار $h \in (a,b)$، و مدارهای تناوبی Γ_ε از دستگاه مختل شده (۳) را یافت به طوریکه هرگاه $\varepsilon \to 0$، Γ_ε به سمت γ_h میل کند؟ برای هر h در این بازه چه تعداد از چنین Γ_ε هایی یافت می‌شود؟

برای پاسخ به این سؤال، یک برش متقاطع σ، متقاطع با هر بیضی γ_h در نظر گرفته می شود. فرض کنید $d(h,\varepsilon)$ تابع جابه‌جایی متناظر با مدار $\gamma(h,\varepsilon)$ باشد. حال به بیان قضیه پوانکاره – پونتریاگین[۱۶] می‌پردازیم

قضیه ۷.۱ هرگاه $\varepsilon \to 0$، آن‌گاه

$$d(h,\varepsilon) = \varepsilon(I(h) + \varepsilon\phi(h,\varepsilon)), \tag{۵}$$

که در آن $\phi(h,\varepsilon)$ برای (h,ε) متعلق به یک ناحیه فشرده در نزدیکی $(h,0)$، $h \in (a,b)$ تحلیلی و به طور یکنواخت کراندار است.

اثبات. با توجه به ساختار بالا، تابع تغییر مکان توسط تفاضل تابع H بین نقاط انتهایی $\gamma(h,\varepsilon)$ داده می‌شود، یعنی

$$d(h,\varepsilon) = \int_{\gamma(h,\varepsilon)} dH = \int_{\gamma(h,\varepsilon)} (H_x\dot{x} + H_y\dot{y})dt.$$

با جایگزینی (۳) در طرف راست، نتیجه می‌شود

$$d(h,\varepsilon) = \varepsilon \int_{\gamma(h,\varepsilon)} (H_x f + H_y g)dt.$$

توجه کنید چون γ_h فشرده است، هرگاه $\varepsilon \to 0$، $\gamma(h,\varepsilon)$ به طور یکنواخت به γ_h همگراست. هم‌چنین با توجه به (۲) در طول γ_h، $H_x dt = dy$ و $H_y dt = -dx$. لذا (۵) فوراً نتیجه می‌شود، که در آن $I(h)$ توسط (۴) داده شده است. ■

تذکر ۸.۱ تعداد صفرهای تابع تغییر مکان مستقل از انتخاب برش مورب σ است.

[۱۶] Poincaré-Pontryagin

از قضیه ۷.۱ نتایج زیر به‌دست می‌آید که جوابی برای مسأله ۲ است. در تعاریف و قضایای این بخش فرض می‌کنیم X_H و $X_{H,\varepsilon}$ به ترتیب برای نمایش دستگاه همیلتونی (۲) و اختلال (۳) به‌کار می‌روند. برای بیان قضیه بعد ابتدا یک تعریف ارایه می‌شود.

تعریف ۹.۱ اگر یک $h^* \in (a,b)$ و یک $\varepsilon^* > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X_{H,\varepsilon}$ دارای یک سیکل حدی Γ_ε برای $0 < |\varepsilon| < \varepsilon^*$ باشد، و هنگامی‌که $\varepsilon \to 0$، Γ_ε به سمت γ_{h^*} میل کند، آن‌گاه گفته می‌شود که Γ_ε از γ_{h^*} **منشعب شده است. گویند که یک سیکل حدی Γ برای $X_{H,\varepsilon}$ از حلقه**[۱۷] $\bigcup_{h\in(a,b)} \gamma_h$ **برای X_H منشعب می‌شود، اگر یک $h \in (a,b)$ وجود داشته باشد به طوری‌که Γ از γ_h منشعب شده باشد.**

قضیه ۱۰.۱ [۱۳]

فرض کنیم $I(h)$ برای $h \in (a,b)$ متحد با صفر نباشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) اگر $X_{H,\varepsilon}$ دارای سیکل حدی منشعب شده از γ_{h^*} باشد، آن‌گاه $I(h^*) = 0$.

ب) اگر یک $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به‌طوری‌که $I(h^*) = 0$ و $I'(h^*) \neq 0$، آن‌گاه $X_{H,\varepsilon}$ دارای یک سیکل حدی یکتای منشعب شده از γ_{h^*} است. به‌علاوه، این سیکل حدی هذلولوی است.

ج) اگر یک $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به طوری‌که $I(h^*) = I'(h^*) = \cdots = I^{(k-1)}(h^*) = 0$ و $I^{(k)}(h^*) \neq 0$، آن‌گاه $X_{H,\varepsilon}$ دارای حداکثر k (با به حساب آوردن چندگانگی) سیکل حدی منشعب شده از γ_{h^*} است.

د) تعداد ماکزیمم صفرهای ایزوله انتگرال آبلی $I(h)$ در بازه (a,b) (با شمردن چندگانگی آنها) یک کران بالا برای تعداد کل سیکل‌های حدی $X_{H,\varepsilon}$ (با شمردن چندگانگی)، منشعب شده از حلقه $\bigcup_{h\in(a,b)} \gamma_h$ برای X_H است.

اثبات. الف) فرض کنیم که سیکل حدی Γ_ε برای $X_{H,\varepsilon}$ از γ_{h^*} منشعب شود. با توجه به قضیه ۷.۱، یک $\varepsilon^* > 0$ وجود دارد و $h_\varepsilon \to h^*$ هرگاه $\varepsilon \to 0$، به‌طوری‌که

$$d(h_\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon(I(h_\varepsilon) + \varepsilon\phi(h_\varepsilon, \varepsilon)) \equiv 0, \qquad 0 < |\varepsilon| < \varepsilon^*.$$

با تقسیم طرفین بر ε، و با گرفتن حد هنگامی‌که $\varepsilon \to 0$، نتیجه می‌شود که $I(h^*) = 0$.

ب) فرض کنیم که یک $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به‌طوری‌که $I(h^*) = 0$ و $I'(h^*) \neq 0$. چون سیکل‌های حدی برای ε کوچک و مخالف صفر بررسی می‌شوند، به جای تابع تغییر مکان $d(h,\varepsilon)$ می‌توان

[۱۷] Annulus

به مطالعه صفرهای $\tilde{d}(h,\varepsilon) = \frac{d(h,\varepsilon)}{\varepsilon}$ پرداخت. از قضیه (۷.۱) نتیجه می‌شود

$$\tilde{d}(h,\varepsilon) = I(h) + \varepsilon\phi(h,\varepsilon),$$

که درآن ϕ تحلیلی و در یک ناحیه فشرده نزدیک به $(h^*,0)$ به‌طور یکنواخت کراندار می‌باشد. چون $\tilde{d}(h^*,0) = I(h^*) = 0$ و $\tilde{d}'(h^*,0) = I'(h^*) = 0$، با استفاده از قضیه تابع ضمنی، یک $\eta^* > 0$ و یک تابع یکتای $h = h(\varepsilon)$ تعریف شده در $U^* = \{(h,\varepsilon) : |h-h^*| \leq \eta^*, |\varepsilon| \leq \varepsilon^*\}$ یافت می‌شود به‌طوری‌که برای $(h,\varepsilon) \in U^*$، $h(0) = h^*$ و $\tilde{d}(h(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$. بنابراین، برای هر ε کوچک $h(\varepsilon)$ یکتا یک سیکل حدی یکتای Γ_ε از دستگاه (۳) را می‌دهد. حال ثابت می‌کنیم که Γ_ε هذلولوی است (برای ε کوچک).

این واقعیت به آسانی قابل فهم است زیرا Γ_ε از یک صفر ساده $I(h)$ در h^* بدست می‌آید. اثبات دقیق در ادامه ارایه می‌شود. $I(h)$ در فرمول (۴) به صورت $I_1(h) + I_2(h)$ نوشته می‌شود که در آن

$$I_1(h) = \oint_{\gamma_h} f(x,y)dy, \quad I_2(h) = -\oint_{\gamma_h} g(x,y)dx.$$

در انتگرال اول x را به عنوان یک تابع از y و h در نظر بگیرید. هم‌چنین در طول γ_h دیده می‌شود که $H_x x_h = 1$ و $dy = H_x dt$. این نتیجه می‌دهد که

$$I_1'(h) = \oint_{\gamma_h} f_x x_h dy = \oint_{\gamma_h} f_x x_h H_x dt = \oint_{\gamma_h} f_x dt.$$

به‌طور مشابه نتیجه می‌شود که

$$I_2'(h) = -\oint_{\gamma_h} g_y y_h dx = \oint_{\gamma_h} g_y dt.$$

بنابراین

$$0 \neq I'(h^*) = I_1'(h^*) + I_2'(h^*) = \oint_{\gamma_h^*} (f_x + g_y)dt,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \nabla . X_{H,\varepsilon} dt = \varepsilon \oint_{\Gamma_\varepsilon} (f_x + g_y)dt \neq 0 \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1.$$

چون $\Gamma_\varepsilon \to \gamma_{h^*}$ هنگامی‌که $\varepsilon \to 0$، لذا طبق قضیه لیوویل ۶.۱ هذلولوی بودن Γ_ε نتیجه می‌شود.

ج) فرض کنیم که یک $h^* \in (a,b)$ موجود باشد به‌طوری‌که $I(h^*) = I'(h^*) = \cdots = I^{(k-1)}(h^*) = 0$ و $I^{(k)}(h^*) \neq 0$. باید نشان دهیم که یک $\delta > 0$ و یک $\eta > 0$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $(h,\varepsilon) \in U = \{|h-h^*| < \eta, |\varepsilon| < \delta\}$، تابع تغییر مکان $d(h,\varepsilon)$ دارای حداکثر k صفر(با به حساب آوردن چندگانگی آنها) در متغیر h است. فرض کنید این‌طور نباشد بنابراین برای هر عدد صحیح j

$\varepsilon_j > 0$ و $\eta_j > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که هرگاه $j \to \infty$ آن‌گاه $\varepsilon_j \to 0$ و $\eta_j \to 0$ و برای هر ε_j تابع $\frac{d(h,\varepsilon_j)}{\varepsilon_j}$ دارای حداقل $k+1$ صفر برای $|h-h^*| < \eta_j$ می‌باشد. با استفاده از قضیه رل یک h_j یافت می‌شود به‌طوری‌که $|h_j - h^*| < \eta_j$ و

$$I^{(k)}(h_j) + \varepsilon_j \frac{\partial^k}{\partial^k h}\phi(h_j, \varepsilon_j) = 0,$$

که با حد گرفتن از طرفین وقتی $j \to \infty$ نتیجه می‌شود $I^{(k)}(h^*) = 0$، که یک تناقض است.

د) این گزاره یک نتیجه از سه گزاره قبلی است. در واقع، برای هر $\delta > 0$ کوچک تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از $h \in [a+\delta, b-\delta]$ برای ε کوچک، را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۵.۱ این تعداد به طور یکنواخت کراندار است. ماکزیمم این تعداد هنگامی‌که $\delta \to 0$، را سیکل پذیری حلقه تناوبی می‌گویند. ■

تذکر ۱۱.۱ حتی برای اختلالات چند جمله‌ای از یک سیستم‌های هامیلتونی چند جمله‌ای ثابت نشده است که تعداد متناهی سیکل‌های حدی مولد وجود دارندمنظور از سیکل مولد یک مدار بسته Γ_* است که در بند الف و ب قضیه ۱۰.۱ صدق می‌کند. نکته این است که سیکل‌های حدی نه تنها از منحنی‌های فاز بسته بلکه از سیکل‌های مرکب تشکیل شده توسط مدارهای هموکلینیک یا هتروکلینیک از یک معادله هامیلتونی ممکن است ناشی شوند.

مثال ۱۲.۱ معادله واندرپل را در نظر بگیرید

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

که معادل است با دستگاه

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \qquad (6)$$

وقتی $\varepsilon = 0$ معادله (۶) یک دستگاه همیلتونی با خانواده دایره‌های زیر است

$$\gamma_h = \{(x,y) : H(x,y) \equiv x^2 + y^2 = h^2,\ h > 0\}.$$

با استفاده از مختصات قطبی $x = h\cos\theta$ و $y = h\sin\theta$، و با توجه به اینکه دوران γ_h ساعت‌گرد است، از فرمول (۴) نتیجه می‌شود

$$I(h) = -\oint_{\gamma_h}(1 - x^2)y\,dx = \int_0^{2\pi}(1 - h^2\cos^2\theta)h^2(-\sin^2\theta)d\theta = \pi h^2(\frac{h^2}{4} - 1).$$

$h=0$ متناظر است با نقطه بحرانی سیستم و $h=2$ تنها صفر مثبت $I(h)$ است. از طرف دیگر، $I'(2)=4\pi$. با استفاده از قضیه ۱۰.۱ نتیجه می‌شود که برای ε کوچک دستگاه ٦ دارای یک سیکل حدی یکتاست که هذلولوی می‌باشد و هنگامی‌که $\varepsilon\to 0$ به دایره‌ای به شعاع ۲ میل می‌کند.

۱—۴ حالت غیر هامیلتونی و انتگرال‌پذیر

برای حل مسآله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت، لازم داریم که سیکل‌پذیری از طوق تناوبی تحت اختلال چندجمله‌ای نه فقط از دستگاه‌های چندجمله‌ای هامیلتونی بلکه دستگاه‌های غیرهامیلتونی و انتگرال‌پذیر را در نظر بگیریم. برای این حالت ابتدا دستگاه‌های مرتبه دوّم انتگرال‌پذیر با حداقل یک مرکز را لیست می‌کنیم. با استفاده از اصطلاحات [٦٨]، ایلی‌یف در [۲۷] آن‌ها را به صورت پنج کلاس زیر در حالت مختلط مرتب کرد:

(۱) **هامیلتونی** (Q_3^H)، $\dot z=-iz-z^2+2|z|^2+(b+ic)\bar z^2$

(۲) **برگشت پذیر** (Q_3^R)، $\dot z=-iz+az^2+2|z|^2+b\bar z^2$

(۳) **هم‌بعد ۴** (Q_4)، $\dot z=-iz+4z^2+2|z|^2+(b+ic)\bar z^2$ **که در آن** $|b+ic|=2$

(۴) **لاتکا—واترای تعمیم یافته** (Q_3^{LV})، $\dot z=-iz+z^2+(b+ic)\bar z^2$

(۵) **مثلث هامیلتونی**، $\dot z=-iz+\bar z^2$

که پارامتر a و b و c حقیقی‌اند و $z=x+iy$.

دستگاه مرتبه دوّم انتگرال‌پذیر را عام گویند اگر در یکی از چهار کلاس اول قرار گیرد و در کلاس دیگر از آن‌ها قرار نگیرد. در غیراین صورت آن‌را تباهیده گویند.

بحث‌ها درباره انتگرال آبلی قبلاً فقط برای کلاس‌های هامیلتونی عام بوده است. برای یک مثال از حالت غیرهامیلتونی و انتگرال‌پذیر، کلاس برگشت پذیر را در نظر بگیرید. با قرار دادن $z=x+iy$ و تغییر $t\to -t$ از (۲) داریم که

$$\begin{aligned}\dot x &= -y-(a+b+2)x^2+(a+b-2)y^2,\\ \dot y &= x-2(a-b)xy.\end{aligned}$$

اگر $c=a-b\neq 0$، آن‌گاه با تغییر $(x,y)\mapsto(x/c,y/c)$ و تغییر پارامترهای $(a,b)\mapsto(-\frac{a+b-2}{a-b},\frac{a+b-2}{a-b})$ به دست می آید که

$$\begin{aligned}\dot x &= -y+ax^2+by^2,\\ \dot y &= x(1-2y).\end{aligned} \tag{۷}$$

با استفاده از مختصات و تغییر مقیاس زیر:

$$x = \frac{۱}{۲}\bar{x}, \quad y = -\frac{۱}{۲}(\bar{y} - ۱), \quad t = ۲\bar{t}$$

و نوشتن (x, y, t) به جای $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ به دست می آید که

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^۲ + by^۲ - ۲(b-۱)y + (b-۲), \\ \dot{y} &= -۲xy. \end{aligned} \qquad (۸)$$

دستگاه (۸) دارای یک خط راست پایا $\{y = ۰\}$ یک مرکز در $(۱, ۰)$ می‌باشد. اگر $۰ < b < ۲$، آن‌گاه نقطه تعادل $(۰, -\frac{۲-b}{b})$ یک مرکز و اگر $b < ۰$ یا $b > ۲$ یک زین است. اگر $a(۲-b) > ۰$، آن‌گاه این دستگاه دارای دو نقطه زینی در $(\pm\sqrt{\frac{۲-b}{a}}, ۰)$ است. اگر $a(a+۱)(a+۲) \neq ۰$، آن‌گاه انتگرال اوّل از دستگاه (۸) به صورت زیر داده می‌شود

$$F = |y|^a(x^۲ + Ly^۲ + My + N) = h, \qquad (۹)$$

که

$$L = \frac{b}{a+۲}, \quad M = \frac{۲(۱-b)}{a+۱}, \quad N = \frac{b-۲}{a}. \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که اگر $a \neq ۱$، آن‌گاه دستگاه (۸) غیرهامیلتونی است و عامل انتگرال آن $\mu = |y|^{a-۱}$ است. در طوق‌های تناوبی احاطه کننده یک مرکز از دستگاه (۸) بیضی‌ها را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : F(x, y) = h, h_c < h < h_s\},$$

که h_c مقدار بحرانی از H در یک مرکز و h_s مقداری از H برای هر انتهای طوق تناوبی در یک جدا کننده پلی‌سیکل یا در بی‌نهایت است. می‌توان فرض کرد $h_c < h_s$ در غیراین‌صورت می‌توان علامت H را تغییر داد.

اختلالات مرتبه دوّم را از (۸) به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^۲ + by^۲ - ۲(b-۱)y + (b-۲) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} &= -۲xy + \varepsilon g(x, y), \end{aligned}$$

که ε پارامتر خیلی کوچک و f و g چندجمله‌ای‌های مرتبه دوّم بر حسب x و y هستند.
اگر $a \neq ۱$ و $a+b \neq ۰$ و $(a,b) \neq (-۴,۲)$ و $(a,b) \neq (-\frac{۲}{۳},۰)$، آن‌گاه دستگاه بازگشت‌پذیر (۸) عام است. اگر به‌علاوه $a(a+۱)(a+۲) \neq ۰$، آن‌گاه سیکل‌پذیری از طوق تناوبی (۸) تحت اختلالات مرتبه دوّم معادل با ماکزیمم تعداد صفرهای ایزوله در (h_c, h_s) با شمارش چندگانگی آن‌ها از انتگرال زیر است

$$M(h) = \int_{\Gamma_h} |y|^{a-۲}(\alpha + \beta y + \gamma y^۲)xdy, \tag{۱۱}$$

که در آن α، β و γ ثابت‌های حقیقی‌اند. اکنون واضح است که برای بیشترین مقدار a (که a صحیح نیست) هر دوی انتگرال اوّل F در (۹) و تابع انتگرال‌ده در (۱۱) چندجمله‌ای نیستند. بنابراین انتگرال $M(h)$ یک انتگرال آبلی در معنای دقیق نیست. معمولاً آن‌را انتگرال آبلی تعمیم یافته یا انتگرال آبلی کاذب گفته می‌شود.

در پایان یک دسته بندی کلی برای دستگاه‌های انتگرالپذیر و ناهامیلتونی ارائه می‌دهیم. فرض کنیم که دستگاه‌مختل شده دارای انتگرال اوّل $F(x,y)$ با فاکتور انتگرال $\mu = \frac{۱}{R(x,y)}$ باشد، آن‌گاه دستگاه مختل شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}R(x,y) + \varepsilon f(x,y), \\ \dot{y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}R(x,y) + \varepsilon g(x,y), \end{cases} \tag{۱۲}$$

و متناظر با آن انتگرال آبلی تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \frac{f(x,y)dy - g(x,y)dx}{R(x,y)}, \tag{۱۳}$$

که در آن $\{\gamma_h\}$ خانواده بیضی‌های مشمول در منحنی‌های تراز $\{F(x,y)=h\}$ هستند. در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که نتایج قضیهٔ پوانکاره—پونتریاگین برای حالت انتگرال‌های آبلی تعمیم یافته نیز برقرار است[۱۸، ۲۱] در ادامه مروری کوتاه بر برخی از نتایج بدست آمده در این رابطه می‌کنیم.

ژیانگ [۱۸] و هان در [۵۹] نشان دادند که دستگاه مختل شده

$$\dot{x} = y(۱+Bx+Ax^۲) + \varepsilon \sum_{۰\leq i+j\leq n} a_{ij}x^iy^j, \quad \dot{y} = -x(۱+Bx+Ax^۲) + \varepsilon \sum_{۰\leq i+j\leq n} b_{ij}x^iy^j \tag{۱۴}$$

با A و B و a_{ij} و b_{ij} اعداد حقیقی و $A \neq ۰$ و $|a_{ij}| \leq K$ و $|b_{ij}| \leq K$ و K عدد ثابت مثبت و n عدد صحیح مثبت، در زیر مجموعه $V \subset \Omega = \{(x,y); ۱+Bx+Ax^۲ > ۰\}$ حداکثر $۲n+۲-(-۱)^n$ سیکل حدی دارد. در [۶۰] برای دستگاه

[۱۸] Xiang

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1 + ax + by + cx(x^2 + y^2)) + \varepsilon \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = -x(1 + ax + by + cx(x^2 + y^2)) + \varepsilon \sum_{0 \le i+j \le n} b_{ij} x^i y^j, \end{cases} \qquad (15)$$

با a و b و c اعداد حقیقی و $a^2 + b^2 \neq 0$ و n عدد صحیح مثبت و $|a_{ij}| \le K$ و $|b_{ij}| \le K$ و K عدد ثابت مثبت، نشان داده شده است که برای $c \neq 0$ و $c = 0$ به ترتیب اعداد $5n + 5 + (1 - (-1)^n)/2$ و n کوچکترین کران بالا برای تعداد سیکل‌های حدی آن هستند. دستگاه

$$\dot{x} = y(1 + x^2 - ay^2) + \varepsilon x(mx^2 + ny^2 - \lambda), \quad \dot{y} = -x(1 - cx^2 + y^2) + \varepsilon y(mx^2 + ny^2 - \lambda), \qquad (16)$$

در [۳۲، ۵۴] مورد بحث واقع شده است و دستگاه

$$\dot{x} = y(1 - cy^2) + \varepsilon x(mx^2 + ny^2 - \lambda), \quad \dot{y} = -x(1 - ax^2) + \varepsilon y(mx^2 + ny^2 - \lambda), \qquad (17)$$

نیز در [۳۱] بررسی شد. آن‌ها نشان دادند که هر دو دستگاه (۱۶) و (۱۷) حداقل ۱۱ سیکل حدی دارند. اختلالات مرتبه بالاتر از دستگاه (۱۶) در [۱۱، ۵۳] مطالعه شده است. **تیگان** [۱۹] در [۵۵] دستگاه

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(abx^2 - by^2 + 1) + \varepsilon x(ux^n + vy^n - b\frac{\beta+1}{\mu+1}x^\mu y^\beta - ux^2 - \lambda), \\ \dot{y} = 4x(ax^2 - aby^2 - 1) + \varepsilon y(ux^n + vy^n + bx^\mu y^\beta - vy^2 - \lambda), \end{cases} \qquad (18)$$

که در آن $\mu + \beta = n$ و $1 < b < a < 0$ و $1 \gg \varepsilon > 0$ و u و v و λ پارامترهای حقیقی و $n = 2k$ عدد صحیح مثبت، را در نظر گرفت و نشان داد که این دستگاه در حالت $n = 6$ حداقل دارای ۱۳ سیکل حدی می‌باشد. در [۶۵] نشان داده شده است که دستگاه

$$\dot{x} = y(1 + x^2 - ay^2) + \varepsilon \sum_{i+j \le 4} a_{ij} x^i y^j, \quad \dot{y} = -x(1 - cx^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i+j \le 4} b_{ij} x^i y^j, \qquad (19)$$

با a و b عدد ثابت مثبت و ε به اندازه کافی کوچک و $ac > 1$، دارای ۱۵ سیکل حدی است. لذا ثابت می‌شود که $H(4) \ge 15$. **چن** [۲۰] در [۱۲]، ۲۹ سیکل حدی را برای دستگاه

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1 - \frac{1}{2}y^2)(1 - \frac{1}{8}y^2), \\ \dot{y} = -x(1 - 2x^2)(1 - \frac{1}{2}x^2) + \varepsilon y(\delta + \mu x^2 + ry^2 + kx^4 + nx^2y^2 + y^4), \end{cases} \qquad (20)$$

[۱۹] Tigan

[۲۰] Chen