بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

روش تئوری اندازه‌ای روبیو در حل معادلات انتگرالی

استاد راهنما :

دکتر محمد علی ولی

استاد مشاور :

دکتر محمد علی یعقوبی

مؤلف:

سمیه افشار جهانشاهی

بهمن ماه ۱۳۸۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

۱۳۸۹/۳/۱۷

دانشجو : سمیه افشارجهانشاهی

استاد راهنما : دکترمحمدعلی ولی

استادمشاور: دکتر محمدعلی یعقوبی

داور ۱ : دکترمحمودمحسنی مقدم

داور ۲ : دکترعباس سالمی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

با هزاران بوسه بر دستان مهربانشان

سپاسداشت

بهترین سپاس‌ها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی‌هاست. خداوند مهربان را شکرگزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرمود تا از پی سال‌ها تحصیل دریابم که آنچه جستنی است تنها اوست.

با سپاس و قدردانی از پدر و مادر بزرگوارم که تمام لحظات زندگی‌ام با وجود گرمشان پرفروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم، مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. در برابر قدم‌هایشان زانوی ادب بر زمین می‌گذارم و با قلبی مملو از عشق و خضوع بر دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم. سرو وجودشان همیشه سرسبز و استوار.

با سپاس از مهربان خواهرم که همیشه و در همه حال بی‌ریاترین محبت‌ها را نثارم کرد.

و با سپاس از برادرانم که زیباترین لحظات زندگی را در کنارشان تجربه کرده‌ام.

و دست تقدیر مرا به کرمان، این پاره کویری ایران، که شاعرانش در یک ایهام نازکانه آن را دل عالم و خود را اهل دل گفته‌اند، کشاند تا سال‌های تحصیل من، وام‌دار نجابت‌ها وآموزه‌های کسانی باشد که هماره یادشان برای من با گونه‌ای احترام، سپاس و بزرگداشت همراه است.

برترین سپاس را تقدیم استاد ارجمندم آقای دکتر ولی می‌نمایم که صبورانه مرا در مراحل دشوار این پژوهش راهنمایی نمودند.

و از آقای دکتر یعقوبی به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید گرانقدر آقای دکتر محسنی مقدم و آقای دکتر سالمی به خاطر دقت و حوصله‌ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می‌کنم و سلامتی و توفیق روزافزونشان را آرزومندم.

و با سپاس از همه دوستان و همکلاسی هایم خصوصاً خانم‌ها فاطمه شهریسوند، معصومه نوری، بهاره خزاعی، راضیه اژدری که در طول مدت تحصیل وجودشان مایه تشویق و همراهی‌ام بود. باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

همچنین از قطب جبرخطی و بهینه سازی دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان به واسطه حمایت مالی تشکر می‌کنم.

سمیه افشار

بهمن ماه ۱۳۸۸

چکیده

مسئله پیدا کردن جواب عـددی بـرای معـادلات انتگـرال یکـی از قـدیمی‌تـرین مسـائل در ریاضی کاربردی است و روش‌های عددی بسیاری بـرای حـل معـادلات انتگـرال و معـادلات انتگرال-دیفرانسیل وجود دارد. در سال‌های اخیر، روش تئوری اندازه‌ای روبیو در حل مسائل مختلف ریاضی مورد استفاده قرار گرفته‌است.

در این رساله، برای حل معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگـرال-دیفرانسیل فـردهلم روش تئوری اندازه‌ای روبیو بکار برده شد. به این ترتیب که مسئله را به یک مسئله کنترل بهینه تبدیل سپس با استفاده از نظریه اندازه یک دگرگونی در فضای مسئله ایجاد شد و یک مسـئله برنامه‌ریزی خطی بدست آمد. در نهایت، با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی جواب تقریبی معادله انتگرال حاصل شد.

کلید واژه: معادله انتگرال فردهلم، معادله انتگـرال-دیفرانسیل فـردهلم، کنتـرل بهینـه، نظریـه اندازه، برنامه ریزی خطی، روبیو

مقدمه:

از روش روبیو در حل مسائلی نظیر معادلات دیفرانسیل معمولی ، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی، دستگاه معادلات غیرخطی، معادلات پخش غیرخطی،بدست آوردن کنترل بهینه معادلات پخش چند بعدی،کنترل بهینه معادلات موج خطی، مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی و غیر خطی استفاده شده است.

در فصل اول مفاهیم، تعاریف و قضایایی را که به عنوان پیشنیاز مباحث بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان خواهد شد.

در فصل دوم روش تئوری اندازه‌ای روبیو بیان می‌شود و کاربردی از این روش را در حل مسائل کنترل بهینه‌ای که معادلات حاکم آنها معادلات دیفرانسیل معمولی است توضیح داده خواهد شد.

در فصل سوم کاربرد این روش در حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم خطی و غیرخطی و معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم ارائه خواهد شد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و پیشنیاز

در این فصل بسیاری از مفاهیم، تعاریف و قضایایی را که به عنوان پیشنیاز مباحث بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان نموده و سپس انواع مسایل کنترل بهینه و حساب تغییرات را بیان و در پایان معادلات انتگرالی و انواع آن که در فصل های بعدی بررسی خواهند شد را معرفی می‌کنیم بخش‌های(۱.۱)،(۱.۲)و(۱.۳) این فصل بر اساس پایان نامه آقای دکترمحمد علی ولی[۲] تنظیم شده‌است.

۱.۱ توپولوژی ضعیف روی اندازه های رادن و قضیه نمایشی ریس

تعریف ۱.۱.۱ اگر L یک فضای برداری روی میدان $\mathcal{F}$ باشد به طوری که $\mathcal{F}=\mathbb{R}$ یا $\mathcal{F}=\mathbb{C}$ ، تابع $\Lambda: L\to\mathcal{F}$ را یک تابعک خطی روی L گوییم هرگاه برای هر دو عضو x_1 و x_2 در L و هر دو اسکالر α و β در $\mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$\Lambda(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha\Lambda(x_1)+\beta\Lambda(x_2)$$

کلاس تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی فضای برداری توپولوژیک L را با L' نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان L می‌نامیم. نرم روی این فضا را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\|T\|=\sup\{|Tx|:\|x\|=1\}\ ,T\in L'$$

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید که L یک فضای برداری توپولوژیک بوده و L' دوگان آن باشد.خانواده نیم‌نرمهای $P_x(\Lambda)=|\Lambda(x)|$ که در آن x در L تغییرمی‌کند یک توپولوژی روی فضای L' القا می کند که آن را توپولوژی ضعیف* ($weak^*$-topology) روی L' می‌نامیم.
این توپولوژی، موضعاً محدب است و کلیه مجموعه‌های به شکل

$$U_\varepsilon=\{\Lambda\in L':|\Lambda(x_j)|<\varepsilon\ ,\ j=1,2,\dots,r\}$$

که $\varepsilon>0$، $r\in\mathbb{N}$ و $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}\subset L$، تشکیل یک پایه برای همسایگی های مبدأ در توپولوژی ضعیف* می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۳ فرض کنید که Ω یک فضای فشرده و هاسدورف و Λ یک تابعک خطی پیوسته روی $C(\Omega)$ (فضای تمام توابع پیوسته روی Ω) باشد. از پیوستگی Λ نتیجه می‌شود که

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}\ ,\forall f\in C(\Omega)\ ,\left|\Lambda(f)\right|\le\alpha\sup_{x\in\Omega}\left|f(x)\right|=\alpha\|f\|_\infty$$

تعریف ۱.۱.٤ هر گاه σ – جبر مربوط به فضای اندازه (X,A,μ) متشکل از همه مجموعه‌های برل باشد آنگاه μ را یک اندازه برل می گوییم.

تعریف ۱.۱.٥ فرض کنید Ω یک فضای توپولوژیک باشد. یک اندازه برل μ را منظم گوییم هر گاه

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\inf\{\mu(G)\ :A\subseteq G\ ,G\in O(G)\}\\&=\sup\{\mu(S):S\subseteq A\ ,S\in K(S)\}\end{aligned}$$

که در آن $O(G)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های باز Ω و $K(S)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های فشرده Ω می‌باشد.

تعریف ۱.۱.٦ اندازه رادن یک اندازه برل منظم است که روی مجموعه‌های فشرده متناهی است.

از این پس همه جا Ω را یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۷ فرض کنید $C(\Omega)'$ فضای تمام تابعک های خطی پیوسته روی $C(\Omega)$ *باشد. هر تابعک خطی* Λ *متعلق به این مجموعه را یک اندازه رادن می‌نامیم. مجموعه همه اندازه‌های رادن یعنی* $C(\Omega)'$ را با $M(\Omega)$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۸ تابعک خطی و پیوسته Λ متعلق به فضای $C(\Omega)'$ را مثبت گوییم هر گاه برای هر تابع نامنفی f متعلق به $C(\Omega)$،داشته باشیم $\Lambda(f)\ge 0$. یک چنین تابعک خطی پیوسته و مثبت را یک اندازه رادن مثبت نیز می گویند.مجموعه تمام تابعک های خطی پیوسته و مثبت را با $M^+(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.به سادگی می توان نشان داد که $M^+(\Omega)$ یک فضای برداری است.

همانگونه که در ۱.۱.۲ تعریف کردیم، خانواده نیم‌نرمهای $P_f(\Lambda)=\left|\Lambda(f)\right|$ که در آن f در $C(\Omega)$ تغییر می کند یک توپولوژی روی فضای $M(\Omega)$ القا می کند که آن را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب تبدیل می کند.

قضیه بعد یکی از زیباترین و کارآمدترین قضیه‌هایی است که امکان استفاده از نظریه اندازه در حل مسایل کنترل بهینه و حساب تغییرات را برای روبیو و همکارانش فراهم آورده است.

قضیه نمایشی ریس ۱.۱.۹ فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف وفشرده و Λ یک تابعک خطی پیوسته روی $C(\Omega)$ باشد. آنگاه یک اندازه برل منظم و منحصر به فرد μ روی Ω موجود است به طوری که

$$\Lambda(f)=\int_{\Omega} f d\mu$$

همچنین $\mu(\Omega)<\infty$. در حالت خاصی که Λ مثبت باشد μ نیز یک اندازه مثبت است.

اثبات قضیه فوق را در [۳۰] یا [۳۲] می توان یافت.

مشاهده می‌شود که اگر Ω یک فضای هاسدورف فشرده باشد آنگاه مجموعه $M^{+}(\Omega)$ (مجموعه تابعک‌های خطی پیوسته و مثبت روی $C(\Omega)$) که اعضای آن را اندازه های رادن مثبت نامیدیم، با مجموعه اندازه‌های برل منظم مثبت روی Ω یکی است و به همین علت اعضای $M^{+}(\Omega)$ را نیز اندازه نامیدیم. از این پس مجموعه $M(\Omega)$ را با مجموعه اندازه‌های برل منظم روی Ω یکی می گیریم و آنها را اندازه‌های رادن می‌نامیم.

بنابراین یک پایه برای همسایگی‌های مبدا در توپولوژی ضعیف* روی فضای $C(\Omega)'\equiv M(\Omega)$ عبارتست از خانواده کلیه مجموعه‌های به شکل

$$U_{\varepsilon}=\left\{\mu\in M(\Omega):\left|\mu(f_j)\right|<\varepsilon, j=1,2,\ldots,r\right\}$$

که در آن $\varepsilon>0$ ، $r\in\mathbb{N}$ $\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}\subset C(\Omega)$.

قضیه ۱.۱.۱۰ فرض کنید Q زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $M^{+}(\Omega)$ (با توپولوژی ضعیف*) باشد. آنگاه برای $f\in C(\Omega)$ تابع $\lambda_f:Q\to\mathbb{R}$ که با ضابطه $\lambda_f(\mu)=\mu(f)$ تعریف می گردد پیوسته است.

برهان: برای هر $\varepsilon>0$ مجموعه های $(\mu(f)-\varepsilon,\mu(f)+\varepsilon)$ تشکیل یک پایه برای همسایگی‌های $\mu(f)$ در $\mathbb{R}$ می دهند. باید نشان دهیم $\lambda_f^{-1}(\mu(f)-\varepsilon,\mu(f)+\varepsilon)$ نیز باز است

$$\begin{aligned}\lambda_f^{-1}(\mu(f)-\varepsilon,\mu(f)+\varepsilon)&=\left\{\upsilon\in Q:\upsilon(f)=\lambda_f(\mu)\in(\mu(f)-\varepsilon,\mu(f)+\varepsilon)\right\}\\&=\left\{\upsilon\in Q:\left|(\upsilon-\mu)f\right|<\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

با توجه به تعریف پایه‌های همسایگی برای μ نسبت به توپولوژی ضعیف نسبی در Q مجموعه بالا یک مجموعه باز در این توپولوژی است. پس λ_f پیوسته است.□

قضیه ۱.۱.۱۱ فرض کنید α یک عدد حقیقی مثبت باشد آنگاه مجموعه

$$\left\{\mu\ :\ \mu\in M^{+}(\Omega)\ ,\ \mu(1)=\alpha\right\}$$

در توپولوژی نسبی ضعیف* روی $M^{+}(\Omega)$، بسته است.

برهان: مجموعه $\{\mu \in M^{+}(\Omega) \; : \; \mu(1)=\alpha\}$ تصویر معکوس مجموعه بسته $\{\alpha\}$ از $\mathbb{R}$ تحت تابع $\lambda : M^{+}(\Omega) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\lambda(\mu)=\mu(1)$ می‌باشد و چون طبق قضیه قبل λ پیوسته است پس مجموعه $\{\mu \in M^{+}(\Omega) \; : \; \mu(1)=\alpha\}$ نیز بسته است.□

قضیه ۱.۱.۱۲ فرض کنید که X یک فضای برداری نرم‌دار و S یک زیر مجموعه از X' باشد که نسبت به نرم در X' کران‌دار و نسبت به توپولوژی ضعیف* روی X' بسته است. آنگاه S نسبت به توپولوژی ضعیف* روی X' فشرده است.

اثبات این قضیه را در [۳۳، قضیه $A-$ ۶۱.٤ ص.۲۲۸] می‌توان یافت.

قضیه ۱.۱.۱۳ فرض کنید α یک عدد حقیقی مثبت باشد. آنگاه مجموعه

$$\{\mu \in M^{+}(\Omega) \; : \; \mu(1)=\alpha\}$$

نسبت به توپولوژی ضعیف* روی $M^{+}(\Omega)$، فشرده است.

برهان: چون Ω فشرده است طبق قضیه ریس $\mu(\Omega) < \infty$ و برای هر $\mu \in M^{+}(\Omega)$ داریم:

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\|\le 1} |\mu(f)| \le \mu(\Omega) < \infty$$

یعنی مجموعه $\{\mu \in M^{+}(\Omega) \; : \; \mu(1)=\alpha\}$ نسبت به نرم در $M(\Omega)$ کراندار است . حال با توجه به قضیه ۱.۱.۱۱ و ۱.۱.۱۲ این مجموعه نسبت به توپولوژی ضعیف* روی $M^{+}(\Omega)$ فشرده است.□

۱.۲ اندازه‌های اتمی، رابطه کمینه یک فرم خطی و نقاط فرین

در مسائل کنترل بهینه و حساب تغییرات وجود کمینه یا بیشینه توابع و بدست آوردن شرایط لازم و کافی برای وجود آنها مسئله بسیار مهمی است. برای یک زیر مجموعه A از $\mathbb{R}$ چون $\sup A = -\inf(-A)$، *می‌توان* به تعاریف و قضایای مربوط به کمینه پرداخت .

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و S یک زیر مجموعه از آن باشد. تابع حقیقی $\lambda : S \to \mathbb{R}$ را روی S نیم‌پیوسته پایینی گوییم هرگاه برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in S \; : \; \lambda(x) > \alpha\}$ در توپولوژی نسبی S *باز باشد. تابع* λ را روی S نیم پیوسته بالایی گوییم هرگاه برای هر عدد حقیقی α مجموعه $\{x \in S \; : \; \lambda(x) < \alpha\}$ در S باز باشد

گزاره ۱.۲.۲ تابع حقیقی $\lambda : S \to \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر نیم‌پیوسته بالایی و نیم-پیوسته پایینی باشد .

قضیه ۱.۲.۳ فرض کنید S یک زیر مجموعه فشرده از یک فضای توپولوژی هاسدورف X بوده و تابع $\lambda : S \to \mathbb{R}$ نیم‌پیوسته پایینی باشد. آنگاه تابع λ کمینه خود را در S اختیار می کند.

برهان: فرض کنید $\alpha = \inf \lambda(x)$. مجموعه E_n را برای هر n، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E_n = \left\{ x \in S : \lambda(x) \le \alpha + \frac{1}{n} \right\}$$

برای هر n مجموعه E_n ناتهی و بسته است و داریم $E_{n+1} \subset E_n$. اکنون اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ آنگاه $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c$ وچون S فشرده است تعداد متناهی از مجموعه‌های E_n^c مجموعه S را *مـی‌پوشانند* . بنابراین $S = \bigcup_{n=1}^{m} E_n^c = E_m^c$ و در نتیجه $E_m = \emptyset$ که تناقض است. پس عضوی مانند $x_\circ \in S$ وجود دارد که برای هر n ، $x_\circ \in E_n$. یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\lambda(x_\circ) \le \alpha + \frac{1}{n}$. اما برای هر n، $\alpha \le \lambda(x_\circ) \le \alpha + \frac{1}{n}$ و نتیجه می‌شود $\lambda (x_\circ) = \alpha$.□

در ادامه این بخش پس از تعاریف نقاط فرین و اندازه‌های اتمی، نشان خواهیم داد که هرگاه C یک زیرمجموعه فشرده از $M(\Omega)$ نسبت به توپولوژی ضعیف* روی $M(\Omega)$ باشد، تابع خطی $\mu \to \mu(f)$ برای یک $f \in C(\Omega)$، کمینه خود را در یک نقطه فرین C بدست می‌آورد و سپس ثابت می‌کنیم که هر نقطه فرین به صورت ترکیب خطی متناهی از اندازه‌های متناهی می‌باشد

تعریف ۱.۲.٤ یک اندازه غیر صفر μ متعلق به $M(\Omega)$ را اندازه اول گوییم هرگاه فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار کند.

تعریف ۱.۲.۵ اگر A یک مجموعه برل و $Z_\circ$ نقطه‌ای در فضای Ω باشد، اندازه برل $\delta(Z_\circ)$ با ضابطه

$$\delta(Z_\circ)(A) = \begin{cases} 1 & Z_\circ \in A \\ 0 & Z_\circ \notin A \end{cases}$$

را یک اندازه اتمی متمرکز در $Z_\circ$ می نامند.

گزاره ۱.۲.٦ اگر Ω یک فضای توپولوژی هاسدورف و فشرده و μ یک اندازه اول در $M(\Omega)$ باشد، آنگاه عضو منحصر بفردی مانند $Z_\circ$ در Ω وجود دارد به طوری که برای $F \in C(\Omega)$ داریم

$$\int_\Omega F \, d\mu = \int_\Omega F \, d\delta(Z_\circ) = F(Z_\circ).$$

برهان: مجموعه B را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$B=\{A\subset\Omega:\ \mu(A)=\circ\}$$

که A یک زیرمجموعه برل در Ω است. با برهان خلف فرض کنید برای هر $x\in\Omega$ مجموعه بازی مانند G شامل x یافت شود به طوری که $\mu(G)=\circ$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Omega=\bigcup_{x\in\Omega}G(x)$$

و چون Ω فشرده است، تعداد متناهی از این پوشش Ω را می‌پوشانند. یعنی

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i),$$

و در نتیجه

$$\mu(\Omega)\ \le\ \sum_{i=1}^{n}\ \mu(G(x_i))=\circ.$$

یعنی $\mu\equiv\circ$ که با فرض غیر صفر بودن اندازه μ در تناقض است و بنابراین عضوی مثل $Z_\circ$ در Ω وجود دارد که متعلق به هیچ مجموعه باز با اندازه صفر نیست.

فرض کنید F متعلق به فضای $C(\Omega)$ باشد و $\varepsilon>\circ$ را اختیار کنید. چون F روی Ω پیوسته است مجموعه بازی مانند G شامل $Z_\circ$ موجود است به طوری که برای هر $x\in G$ داریم:

$$|F(x)-F(Z_\circ)|<\varepsilon$$

چون $\mu(G)\neq 0$ و μ اول است، پس $\mu(G)=1$، $\mu(\Omega-G)=0$، و داریم:

$$F(Z_\circ)-\varepsilon=(F(Z_\circ)-\varepsilon)\mu(G)\le\int_\Omega F\,d\mu\le(F(Z_\circ)+\varepsilon)\,\mu(G)=F(Z_\circ)+\varepsilon,$$

و از آنجا

$$\int_\Omega F\,d\mu=F(Z_\circ)=\int_\Omega F\,d\delta(Z_\circ).$$

اکنون فرض کنید Z_1 نقطه دیگری غیر از $Z_\circ$ در Ω باشد که $\int_\Omega F\,d\mu=F(Z_1)$. چون فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده Ω نرمال می‌باشد، بنابراین تابعی مانند F در $C(\Omega)$ وجود دارد به طوری که $F(Z_\circ)=\circ$ و $F(Z_1)=1$. در نتیجه:

$$0=F(Z_\circ)=\int_\Omega F\,d\mu=F(Z_1)=1$$

که تناقض است. □

گزاره ۱.۲.۷ فرض کنید $\mu\in M(\Omega)$. اگر فقط k مجموعه برل جدا از هم $A_1, A_2, \ldots$ و A_k وجود داشته باشد به طوری که برای $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ داشته باشیم $\mu(A_i)\neq\circ$، آنگاه μ یک ترکیب خطی از k اندازه اول است.

برهان: k مجموعه برل جدا از هم $A_1, A_2, \ldots$ و A_k را در نظر بگیرید به طوری که $\mu(A_i) = \alpha_i \neq 0$، $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. و برای هر مجموعه برل A تعریف کنید:

$$\mu_i(A) = \mu(A \cap A_i)/\alpha_i, \quad i \in \{1,2,\ldots,k\}$$

نشان خواهیم داد که اندازه‌های μ_i، $i \in \{1,2,\ldots,k\}$، اول هستند. اگر A یک مجموعه برل دلخواه باشد به طوری که $\mu_i(A) \neq 0$ و $\mu_i(A) \neq 1$، آنگاه $A \neq \emptyset$ و $A \neq A_i$، و $(k+1)$ مجموعه برل $A_1, A_2, \ldots$ و A_{i-1} و $A \cap A_i$ و $A_i \setminus A$ و A_{i+1} و ... و A_k مجزا هستند؛ همچنین $\mu(A_i \cap A) = \alpha_i \mu_i(A) \neq 0$، و

$$\mu(A_i \setminus A) = \alpha_i \mu_i(\Omega \setminus A) = \alpha_i (1 - \mu_i(A)) \neq 0$$

که با فرض در تناقض است. بنابراین $\mu_i(A) = 0$ یا $\mu_i(A) = 1$. یعنی هر μ_i یک اندازه اول است. اکنون A را یک مجموعه برل دلخواه در نظر بگیرید. آنگاه $(k+1)$ مجموعه برل $A_1, A_2, \ldots$ و A_k و $A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ مجزا هستند و در نتیجه $\mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 0$. بنابراین:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A \cap A_i) + \mu(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i(A). \square$$

تعریف ۱.۲.۸ اگر X یک فضای برداری باشد، یک زیر مجموعه C از X را محدب گوییم اگربرای هر دو عضو x_1 و x_2 در C قطعه خط $\{x \in X : x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \ , \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$ در C باشد.

تعریف ۱.۲.۹ فرض کنید C یک مجموعه محدب باشد یک نقطه $x \in C$ را یک نقطه فرین گوییم هرگاه هیچ دو نقطه متمایز x_1 و x_2 در C یافت نشود به طوری که $x = (x_1 + x_2)/2$.

تعریف ۱.۲.۱۰ زیرمجموعه E از مجموعه محدب C را یک زیرمجموعه فرین C نامیم هرگاه هیچ دو نقطه متمایز در C یافت نشود که $x = (x_1 + x_2)/2 \in E$.

لم ۱.۲.۱۱ اگر $F \in C(\Omega)$ آنگاه مجموعه E متشکل از اندازه‌های متعلق به C که در F به کمینه خود می‌رسند یک زیرمجموعه فرین C است.

برهان: فرض کنید که μ_1 و μ_2 متعلق به C بوده و برای یک θ، $0 < \theta < 1$ داشته باشیم $\theta \mu_1 + (1-\theta) \mu_2 \in E$. با برهان خلف و بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $\mu_1 \notin E$. آنگاه

$$\theta \mu_1(F) + (1-\theta) \mu_2(F) < \mu_1(F)$$

که نتیجه می‌دهد $\mu_2(F) < \mu_1(F)$ و خواهیم داشت

$$\mu_2(F) < \theta\, \mu_1(F) + (1-\theta)\, \mu_2(F)$$

که متناقض با کمینه بودن $\theta\, \mu_1 + (1-\theta)\, \mu_2$ است.□

قضیه ۱.۲.۱۲ فرض کنید که Ω یک فضای توپولوژی هاسدورف فشرده باشد. اگر C یک زیرمجموعه ناتهی، محدب و فشرده ضعیف* از $M(\Omega)$ باشد، آنگاه حداقل دارای یک نقطه فرین است.

اثبات قضیه فوق را می‌توان در [۲۶] یافت.

قضیه ۱.۲.۱۳ فرض کنید که C یک زیرمجموعه محدب و فشرده (نسبت به توپولوژی ضعیف*) در $M(\Omega)$ باشد، و $F \in C(\Omega)$. آنگاه تابعک خطی $\mu \to \mu(f)$ کمینه خود را در یک نقطه فرین از C اختیار می‌کند.

برهان: طبق قضیه ۱.۲.۱۲ ، مجموعه نقاط فرین C ناتهی است. همچنین بنا به قضیه‌های ۱.۱.۹ و ۱.۲.۳ تابع خطی $\mu \to \mu(f)$ کمینه خود را در مجموعه C اختیار می‌کند. اکنون برای هر عدد طبیعی n، مجموعه A_n را به صورت زیر تعریف کنید :

$$A_n = \left\{ \mu \in C \;:\; \mu(F) \le m + \frac{1}{n} \right\}،$$

که در آن m کمینه $\mu(F)$ روی C است. به وضوح هر مجموعه A_n یک زیرمجموعه ناتهی، محدب، و فشرده از C است. از طرفی برای هر n، $A_n \subseteq A_{n+1}$. زیرمجموعه $A(m)$ از C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

مجموعه $A(m)$ ناتهی است و تابعک خطی $\mu \to \mu(f)$ کمینه خود را در هر نقطه این مجموعه بدست می‌آورد. حال چون $A(m)$ فشرده و محدب نیز هست پس دارای یک نقطه فرین μ^* است (قضیه ۱.۲.۱۲). کافی است نشان دهیم که μ^* یک نقطه فرین C نیز هست. برای این کار فرض کنید چنین نباشد. پس اندازه‌های μ_1 و μ_2 در C وجود دارند به طوری که برای یک $0 < \theta < 1$، داریم :

$$\mu_1 \ne \mu^*,\ \mu_2 \ne \mu^*,\ \mu^* = \theta \mu_1 + (1-\theta)\mu_2. \qquad (۱-۲-۱)$$

آنگاه

$$m = \mu^*(F) = \theta\, \mu_1(F) + (1-\theta)\, \mu_2(F) \ge \theta m + (1-\theta) m = m\ .$$

با توجه به نامساوی فوق مشاهده می‌کنیم که فرض $\mu_1 \notin A(m)$ یا $\mu_2 \notin A(m)$ به تناقض $m > m$ منجر می‌گردد. بنابراین $\mu_1 \in A(m)$ و $\mu_2 \in A(m)$ که در این صورت

$$\mu^*(F) = \mu_1(F) = \mu_2(F) = m ,$$

و چون $A(m)$ محدب است، رابطه‌های (۱-۲-۱) ما را به تناقض می‌رساند. نتیجه می‌شود که μ^* یک نقطه فرین C می‌باشد.□

اکنون برای اینکه قضیه اصلی این بخش را بیان و اثبات نماییم، به یک مقدمه و یک قضیه از Gass [۲۱] نیازمندیم.

دستگاه m معادله و n مجهول زیر را در نظر بگیرید :

(۱-۲-۲)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,\dots,n \ , \quad m < n . \end{cases}$$

اگر بردارهای P_k و P_0 را به صورت

$$P_k^T = [a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}], \ \ k = 1,2,\dots,n \ , \ \ P_0^T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

معرفی کنیم ، آنگاه دستگاه معادلات (۱-۲-۲) را می‌توان به صورت فشرده زیر نوشت :

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n = P_0 \ , \ \ x_j \geq 0 \ , \ m < n \ . \qquad (۱-۲-۳)$$

حال مجموعه تمام جوابهای (۱-۲-۳) را با K نشان می‌دهیم و قضیه زیر را بدون اثبات از مرجع [۲۱ ، قضیه ٤، ص.٥٤] نقل می‌کنیم .

قضیه ۱.۲.۱٤ با فرض‌های فوق گیرید $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نقطه فرین K باشد. آنگاه حداکثر m مقدار از مقادیر x_i $(i = 1,2,\dots,n)$ اکیداً مثبت هستند.

قضیه ۱.۲.۱٥ فرض کنید که Ω یک فضای توپولوژی هاسدورف فشرده بوده و $F_1, F_2, \dots$ و F_n متعلق به $C(\Omega)$ چنان باشند که برای هر $z \in \Omega$ داشته باشیم $F_1(z) = 1$. فرض کنید Q مجموعه تمام اندازه‌های رادن مثبت روی Ω باشد که $\mu(F_i) = C_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ و $C_1 > 0$. اگر $Q \neq \emptyset$ باشد آنگاه Q یک زیرمجموعه محدب فشرده از $M^+(\Omega)$ است. همچنین هر نقطه فرین μ^* از Q به صورت یک ترکیب خطی یکتا از اندازه‌های اتمی به صورت

زیر می‌باشد:

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \delta(z_i)\ , \alpha_i \geq \circ\ , \ z_i \in \Omega\ , \ i=1,2,\ldots,n\ .$$

برهان: مجموعه $M^+(\Omega)$ را به توپولوژی ضعیف* مجهز می‌کنیم. بنابه قضیه ۱.۱.۹ برای هر $f \in C(\Omega)$، تابع خطی $\mu \to \mu(f)$ پیوسته است و در نتیجه مجموعه‌های

$$\left\{ \mu \in M^+(\Omega) : \mu(F_i) = C_i\ , \ i=1,2,\ldots,n \right\}$$

همگی زیرمجموعه‌هائی بسته هستند. چون

$$Q = \bigcap_i \left\{ \mu \in M^+(\Omega) : \mu(F_i) = C_i \right\}$$

پس Q بسته است. اما Q زیرمجموعه‌ای از $\left\{ \mu \in M^+(\Omega) : \mu(1) = C_1 \right\}$ می‌باشد که این مجموعه بنا به قضیه ۱.۱.۱۲ فشرده است و بنابراین Q نیز فشرده می‌باشد. حال اگر μ_1 و μ_2 هر دو متعلق به Q بوده و $\circ \leq \theta \leq 1$ آنگاه $\theta\ \mu_1 + (1-\theta)\ \mu_2$ یک اندازه مثبت است و

$$\theta\,\mu_1(F_i) + (1-\theta)\,\mu_2(F_i) = \theta\, C_i + (1-\theta)\ C_i\ = C_i\ \ , i=1,2,\ldots,n\ .$$

یعنی $\theta\ \mu_1 + (1-\theta)\ \mu_2\ \in Q$ و بنابراین Q محدب است. برای اثبات قسمت دوم قضیه گوییم که چون Q فشرده و محدب است، بنا به قضیه ۱.۲.۱۲ دارای یک نقطه فرین μ^* است. نشان خواهیم داد که حداکثر تعداد n مجموعه برل مجزا وجود دارد که اندازه آنها نسبت به μ^* مخالف صفر است. فرض کنید $(n+1)$ مجموعه برل مجزای $A_\circ, A_1, \ldots,$ و A_n وجود داشته باشند به طوری که $\mu^*(A_i) \neq \circ$ قرار دهید $A_{n+1} = \Omega \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. نتیجه می‌شود که $A_\circ \subseteq A_{n+1}$ و بنابراین $\mu^*(A_{n+1}) > \circ$. برای هر $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ از $\mathbb{R}^{n+1}$، می‌توان یک اندازه μ روی مجموعه برل با تعریف زیر متناظر نمود:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\, \mu^*(A \cap A_i)\ .$$

فرض کنید K مجموعه تمام $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ ها باشد که اندازه متناظر آنها متعلق به مجموعه Q باشد. نقاط K را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$C_j\ = \int_\Omega F_j\, d\mu = \sum_{i=1}^{n+1}\ \alpha_i\ \int_\Omega F_j\, \chi_{A_j}\ d\mu = \sum_{I=1}^{N+1}\ \alpha_i\, a_{ji}\ \ , \ j=1,\ldots,n\ ,$$

که در آن

$$a_{ji}\ = \int_{A_i} F_j\ \ d\mu\ , \ i=1,\ldots,n+1, \quad j=1,\ldots,n\ .$$

دستگاه مزبور را می‌توان به صورت ماتریس $A\alpha = C$ نوشت که در آن $A = (a_{ji})_{n\times(n+1)}$ و $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}]^T$ و $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$ و $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$

فرض کنید A یک مجموعه برل دلخواه باشد. چون $\mu^*(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = 0$، پس

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap A_i) .$$

بنابراین μ^* متناظر با نقطه $\alpha^* = [1, 1, \ldots, 1]^T_{(n+1)\times 1}$ است و چون $\mu^* \in Q$ پس $\alpha^* \in K$.

اکنون نشان می‌دهیم که α^* یک نقطه فرین از K است .

برهان خلف: فرض کنید $\alpha^* = \frac{\alpha^1 + \alpha^2}{2}$ که در آن α^1 و α^2 متعلق به K هستند. اگر اندازه‌های متناظر با α^1 و α^2 به ترتیب μ_1 و μ_2 باشند، برای هر مجموعه برل A داریم :

و در نتیجه

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap A_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i^1 + \alpha_i^2)\, \mu^*(A \cap A_i) = \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)(A) .$$

یعنی $\mu^* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ و چون μ^* یک نقطه فرین از Q است پس $\mu^* = \mu_1 = \mu_2$. برای هر $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$، داریم $\mu^*(A_k) = \mu_1(A_k) = \mu_2(A_k) \neq 0$. اما

$$\mu^*(A_k) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^1\, \mu^*(A_k \cap A_i) = \alpha_k^1\, \mu^*(A_k) ,\ k = 1, 2, \ldots, n+1 ;$$

که نتیجه می‌شود $\alpha_k^1 = 1$ برای $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. به طور مشابه $\alpha_k^2 = 1$ برای $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ و بنابراین $\alpha^* = \alpha^1 = \alpha^2$. پس α^* یک نقطه فرین از K است. با توجه به قضیه ۱.۲.۱٤، α^* باید حداکثر n مؤلفه مخالف صفر داشته باشد که با $\alpha^* = [1, 1, \ldots, 1]^T_{(n+1)\times 1}$ در تناقض است. بنابراین حداکثر n مجموعه برل $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و می‌توان یافت به طوری که $\mu^*(A_i) \neq 0$. بنا به گزاره های ۱.۲.٦ و ۱.۲.۷ نتیجه‌می شود که عناصر $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ و در Ω موجودند به طوری که $\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \delta(z_i)$. □