دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش ریاضی فیزیک

مکانیک کوانتومی روی خمینه های همتافته:

رویکرد کوانتش هندسی

اساتید راهنما:

دکتر رسول رکنی زاده

دکتر محمدرضا پوریای ولی

پژوهشگر:

صلاح الدین عبدالهادی رنگکانی

۱ بهمن ۱۳۹۱

چکیده

مکانیك کلاسیك، با کارهای پیشروانه ریاضی فیزیکدانان اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، دارای یك صورتبندی هندسی روی فضاهای همتافته شد. از طرف دیگر مکانیك کوانتومی به طور مشخص دارای ساختار محدود به فضای اقلیدسی دارد. از همان دوران شروع مکانیك کوانتومی تلاش هایی صورت می گرفت که این ضعف مکانیك کوانتومی مرتفع، و نظریه دارای ساختار مستقل از مختصات خاص شود.

کوانتش یعنی با آگاهی از توصیف کلاسیک یک سامانه‌ی فیزیکی، توصیف کوانتومی آن را بازسازی کنیم. برای توصیف سامانه‌هایی که به علت داشتن نوعی تقارن، دارای درجات آزادی کمتری هستند مجبور به کاهش دادن فضای فاز آن‌ها هستیم، و همچنین سامانه‌هایی که فضای فاز کلاسیکی آن‌ها خمیده باشد ما را بر آن می‌دارد که به دنبال روشی برای کوانتش باشیم که مکانیک کوانتومی را روی فضای فاز کلاسیک با هندسه ای اختیاری بنا کند. به این ترتیب ساختار هندسی مکانیک کلاسیک در مکانیک کوانتومی بازتاب یابد، در واقع به دنبال ارائه‌ی صورتبندی هندسی مکانیك کوانتومی هستیم که در همه‌ی دستگاه‌های مختصات صادق باشد.

واژگان کلیدی: کوانتش هندسی، خمینه همتافته، مکانیک کوانتومی، مکانیک کلاسیک

مقدمه

کوانتش، یا به عبارت دیگر برقراری ارتباط بین ساختارهای کلاسیک و کوانتومی، از اوایل قرن بیستم و آغاز مکانیک کوانتومی مورد توجه ریاضی فیزیکدانان بوده است. برای ارائه‌ی یک توصیف کوانتومی از یک سامانه‌ی مشخص، از توصیف کلاسیک آن به عنوان راهنما بهره می‌گیریم؛ در واقع مکانیک کوانتومی بدون مکانیک کلاسیک نه قابل درک و نه قابل صورت‌بندی است. پس در صورت‌بندی هر نظریه‌ی کوانتومی، حضور ساختار متناظر کلاسیک به عنوان یک ضرورت مطرح می‌شود. اولین نظریه کوانتش توسط دیراک، معروف به کوانتش کانونیک مطرح شد. در این روش به متغیرهای کانونیک مکان و تکانه q_i و p_i به ترتیب عملگرهای $\hat{q}_i$ و $\hat{p}_i$ را نسبت می‌دهد به طوری که روابط جابجایی زیر برآورده شود:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad i, j = 1, ..., n \tag{۱}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\{\widehat{q_i, p_j}\} = i\hbar\delta_{ij} \quad i, j = 1, ..., n \tag{۲}$$

این روابط همان اصل انطباق بین مکانیک کلاسیک و کوانتومی در حد $\hbar \to 0$ را نشان می‌دهد. اما این روش فقط محدود به توابعی است که حداکثر از مرتبه دوم نسبت به p و q باشند. در سال ۱۹۲۷ وِی وان[۱] نظریه‌ای متقابل که فرآیند کوانتش کردن مشاهده پذیرها با استفاده از تبدیل فوریه است را ارائه کرد. این فرآیند برای مشاهده پذیرهای مکان و تکانه منطبق با فرآیند کوانتش کانونیک است اما با این وجود، برای مشاهده پذیرهای پیچیده تناظر بین براکت پواسون و جابجاگر ها

[۱] Weyl

حفظ نمی‌شود.در سال ۱۹۷۰ کاستانت[۷] و سال ۱۹۶۹سوریو [۱۲] توانستند یک فرمول‌بندی جدید برای مکانیک کوانتومی در فضای فاز کلاسیک ارائه نمایند که تا امروز مورد توجه قرار گرفته و کاربردهای فراوانی یافته است.

با توجه به ساختار کوانتش کانونیک شرایطی که یک فرآیند کوانتش باید برآورده کند تا به آن یک کوانتش هندسی کامل بگویند به صورت زیر است:

برای سامانه کلاسیک توصیف شده توسط مختص‌های مزدوج کانونیک (q^i, p_j) که فضای فاز آن خمینه همتافته (M, ω) و مجموعه مشاهده پذیرهای کلاسیک آن توابعی برحسب مکان و تکانه هستند، توصیف کوانتومی توسط فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و نگاشت Q از مشاهده پذیرهای کلاسیک به مشاهده پذیرهای کوانتومی که عملگرهای خودالحاق روی $\mathcal{H}$ است؛ بیان می‌شود به طوری که :

۱) $Q_1 = I$ که ۱ تابع ثابت وI عملگر همانی روی H است.

۲) نگاشت $f \mapsto Q_f$ خطی است.

۳) $[Q_f, Q_g] = \frac{i}{\hbar} Q_{\{f,g\}} \qquad \forall f, g \in F(M)$

۴) برای $(M, \omega) = \mathbb{R}^{2n}$ با فرم همتافته استاندارد ، عملگرهای Q_{q_i} و Q_{p_i} به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$Q_{q_i}\psi = q_i\psi \qquad Q_{p_i}\psi = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial q_i} \qquad \forall\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, dq)$$

شرط (۴) هم ارز با این است که Q_{q_i} و Q_{p_i} به طور کاهش‌ناپذیری روی $\mathcal{H}$ اثر کند یعنی هیچ زیرفضای $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ غیر از صفر و خود $\mathcal{H}$ وجود ندارد که تحت کنش عملگرهای Q_{q_i} و Q_{p_i} ناوردا بماند.

اما قضیه گرونه ولد-فان هوفه بیان می دارد که چنین کوانتشی وجود ندارد از این رو ، روش‌های مختلف مبتنی بر حذف یا تضعیف بعضی از شرایط فوق می‌باشد.

حل مساله بالا اولین بار در مراجع [۷] و [۱۲] داده شد، که در دو مرحله انجام شده است: پیش کوانتش و قطبش.

هدف از پیش کوانتش ساختن یک نگاشت $Q : f \mapsto Q_f$ که در همه‌ی شرایط به جز قاعده (4)

صدق می‌کند. در واقع شرط کاهش ناپذیری فضای هیلبرت را در نظر نمی‌گیریم و در مرحله دوم معرفی قطبش برای کاهش فضای هیلبرت است. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، شامل عملگرهای خودالحاق متناظر توابع روی فضای فاز M و قطبش این را به توابع روی فضای پیکربندی کاهش می‌دهد همچنین قطبش مجموعه مشاهده پذیرهای کوانتش‌پذیر را شناسایی می‌کند.[۱۶]، [۱۷] و [۱۸].

این پایان نامه به صورت زیر مرتب شده است:

در فصل اول جنبه های هندسی مکانیك کلاسیک و صورتبندی هامیلتونی مورد بحث قرار می‌گیرد.[۱]، [۹] و [۱۳]. در فصل دو و سه مروری مختصر به ترتیب از مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتوم می‌آوریم.[۲]، [۳] و [۵]. در فصل چهار کوانتش هندسی را همراه با مثال هایی معرفی می‌کنیم که با استفاده از این کوانتش و با انتخاب بستری مناسب (صورتبندی هامیلتونیِ مکانیک کلاسیک)، دستورالعملی برای کوانتش سامانه‌های دینامیکی دارای فضای فاز پیچیده (غیر تخت) ارائه می‌دهیم تا هندسه‌ی مکانیک کلاسیک را در توصیف کوانتومی آن دیده شود. به این ترتیب می‌توان مکانیک کوانتومی را مستقل از دستگاه های مختصات فرمولبندی کرد.[۱۷].

فهرست مطالب

۱ مقدمه ای بر هندسه همتافته ۱

۱.۱ خمینه های هموار ۱

۲.۱ اشیاء هندسی روی خمینه‌ها ۳

۳.۱ حساب روی خمینه‌ها ۹

۴.۱ صورتبندی هامیلتونی روی خمینه‌ی همتافته ۱۸

۵.۱ مختلط سازی میدانهای برداری حقیقی ۳۱

۶.۱ خمینه های مختلط ۳۵

۷.۱ کلاف خطی ۳۶

۸.۱ هموستار ۳۸

۲ مکانیک کلاسیک ۴۲

۱.۲ پیش گفتار ۴۲

۲.۲ تقارن‌ها ۴۶

۳.۲ نمایش هامیلتونی و لیوویل ۵۰

۱.۳.۲ توصیف هامیلتونی ۵۵

۲.۳.۲ توصیف لیوویل ۵۵

۳ مکانیک کوانتومی ۵۷
۱.۳ فضای هیلبرت ۵۷
۲.۳ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت ۶۱
۱.۲.۳ عملگر کراندار ۶۱
۲.۲.۳ عملگر خودالحاق ۶۳
۳.۲.۳ عملگر برافکنشی ۶۴
۴.۲.۳ عملگرهای یکانی ۶۷
۳.۳ صورتبندی ریاضی مکانیک کوانتومی ۶۹
۴.۳ نمایش هایزنبرگ و شرودینگر ۷۱
۵.۳ ثابت‌های حرکت ۷۳

۴ مکانیک کوانتومی روی خمینه‌های همتافته: رویکرد کوانتش هندسی ۷۴
۱.۴ پیش‌گفتار ۷۵
۲.۴ پیش کوانتش ۷۸
۱.۲.۴ شرط انتگرال‌پذیری ۸۱
۲.۲.۴ عملگرهای خودالحاق ۸۳
۳.۴ قطبش حقیقی ۸۷
۱.۳.۴ n-فرمی‌ها، چگالی‌ها و انتگرال‌گیری روی خمینه ۹۱
۲.۳.۴ $(-\frac{1}{2})$-D- چگالی‌ها ۹۵
۳.۳.۴ کوانتش ۱۰۰
۴.۳.۴ چند مثال ۱۰۷
۴.۴ قطبش مختلط ۱۱۵

۱.۴.۴ ساختار مختلط ۱۱۸
۲.۴.۴ کوانتش ۱۲۲
۳.۴.۴ مثال از قطبش مختلط ۱۲۹
۵.۴ نیم فرم ها و تصحیح متاخطی ۱۳۵
۱.۵.۴ گروه $ML(n, \mathbb{C})$ ۱۳۵
۲.۵.۴ کوانتش ۱۳۹
۶.۴ نتیجه گیری ۱۴۳

مراجع **۱۴۵**

فصل ۱

مقدمه ای بر هندسه همتافته

۱.۱ خمینه های هموار

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم که X یک مجموعه غیرتهی باشد، یک توپولوژی روی X یک کلاس[۱] از زیرمجموعه های X مانند τ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:*

۱) $X, \emptyset \in \tau$؛

۲) *اجتماع دلخواه از عناصر τ متعلق به τ باشد؛*

۳) *اشتراک متناهی از عناصر τ، متعلق به τ باشد.*

در این صورت عناصر τ را مجموعه های باز و (X, τ) یا X را یک فضای توپولوژیک با توپولوژی τ گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید که X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. تابع $f : X \to Y$ را همانریختی[۲] گوئیم هرگاه f پوشا و یک‌به‌یک و خودش و وارونش پیوسته باشند.*

---

[۱] Collection

[۲] Homeomorphism

تعریف ۳.۱.۱. *منظور از یک n- خمینه توپولوژیکی عبارت است از یک فضای توپولوژیک M که دارای ویژگی های زیر است:*

۱ - M هاسدورف است، یعنی:

$$\forall p, q \in M \;\; p \neq q \quad \exists\, \mathcal{U}(p) \;\; \exists\, \mathcal{V}(q) \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

۲ - شمارش پذیر نوع دوم باشد، یعنی دارای یک پایه شمارش پذیر باشد؛

۳ - موضعا همانریخت با فضای $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی برای هر $p \in M$، همسایگی $\mathcal{U}$ از p و مجموعه باز $\mathcal{V}$ از $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ همانریختی باشد.

زوج $(\mathcal{U}, \phi)$ را یک دستگاه مختصات یا کارت گوئیم.

تعریف ۴.۱.۱. *تابع $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را C^∞ گویند، هرگاه تمام مشتقات جزئی آن از هر مرتبه موجود و پیوسته باشد.*

تعریف ۵.۱.۱. *دو دستگاه مختصات $(\mathcal{U}, \phi)$ و $(\mathcal{V}, \psi)$ را C^∞- سازگار گوئیم هر گاه $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ ایجاب کند که*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

دیفئومورفیسم[۳] C^∞ باشد، یعنی این تابع یک به یک، پوشا و به عنوان تابعی از یک زیرمجموعه‌ی باز $\mathbb{R}^n$ به یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$، C^∞ و دارای وارون C^∞ باشد. نگاشت $(\psi \circ \phi^{-1})$ را تابع همپوشانی[۴] گوئیم.

اغلب فضاهای فیزیکی، غیراقلیدسی اما فضاهای توپولوژیک هاسدورف با پایه های شمارش پذیر هستند که ساختار دیفرانسیل را نیز با خود دارند. در واقع این خمینه ها به طور موضعی اقلیدسی اند.

[۳] Diffeomorphism

[۴] Overlap Function

اگر $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ در M همپوشانی داشته باشند، آن گاه نگاشت های $\phi\circ\psi^{-1}$ و معکوس آن $\psi\circ\phi^{-1}$، $\phi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ و $\psi(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})$ در $\mathbb{R}^n$ را بهم می نگارد.

تعریف ۶.۱.۱. *یک ساختار هموار روی خمینه توپولوژیکی M یک کلاس*

$$\mathcal{A} := \{(\mathcal{U}_\alpha,\phi_\alpha) \quad \alpha\in I\}$$

از دستگاه های مختصات است به طوری که:

۱) $\cup_{\alpha\in I}\mathcal{U}_\alpha = M$

۲) *برای هر α و β، $(\mathcal{U}_\alpha,\phi_\alpha)$ و $(\mathcal{U}_\beta,\phi_\beta)$ C^∞- سازگارند.*

۳) *کلاس $\mathcal{A}$ نسبت به (۲)، بیشین باشد یعنی اگر $(\mathcal{U},\phi)$ یک دستگاه مختصات باشد که با هر $(\mathcal{U}_\alpha,\phi_\alpha)$ در $\mathcal{A}$ سازگار باشد، آنگاه $(\mathcal{U},\phi)\in\mathcal{A}$.*

کلاس $\mathcal{A} := \{(\mathcal{U}_\alpha,\phi_\alpha) \quad \alpha\in I\}$ از دستگاه های مختصات که در شرایط (۱) و (۲) صدق کند را یک اطلس گوئیم، در حقیقت یک ساختار هموار یک اطلس بیشین[۵] است.

تعریف ۷.۱.۱. *یک خمینه هموار، یک خمینه‌ی توپولوژیکی با یک ساختار C^∞ روی آن است.*

به طور خلاصه، خمینه دیفرانسیل پذیر، از طریق دوتایی $(M,\mathcal{A})$ تعریف می‌شود که فضای توپولوژیک آن با تعریف M و ساختار دیفرانسیل پذیر روی M با اطلس بیشین $\mathcal{A}$ داده می‌شود.

۲.۱ اشیاء هندسی روی خمینه‌ها

در این فصل از انواع اشیاء هندسی که با مکانیک کلاسیک در ارتباط هستند و روی خمینه‌ها تعریف می‌شوند، سخن خواهیم گفت. مثال‌های زیادی از این اشیاء مانند توابع، منحنی ها، میدان‌های برداری و فرمها وجود دارند. در مورد توابع می‌توان به توابع هامیلتونی و لاگرانژی، در مورد منحنی‌ها

[۵] Maximal

به منحنی حل معادلات حرکت، در مورد میدان‌های برداری به میدان سرعت یک سیستم دینامیکی و در مورد فرم ها به فرم حجمی که در قضیه لیوویل ظاهر می‌شود، اشاره کرد.

۱ - توابع و منحنی ها روی خمینه‌ها:

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید که M و N خمینه های $C^r(0 \leq r \leq \infty)$ باشند، تابع $f : M \to N$ را از کلاس C^r گوئیم هرگاه برای هر $x \in M$، دستگاه مختصات (U, ϕ) شامل x از M و (V, ψ) شامل $f(x)$ از N با شرط $f(U) \subset V$ وجود داشته باشد به قسمی که تابع*

$$\hat{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

از کلاس C^r باشد.

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید که M یک خمینه و $p \in M$ باشد. یک منحنی با نقطه‌ی آغازین p، یک نگاشت C^1 مانند $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ است که در آن I فاصله‌ی باز، $0 \in I$ و $\gamma(0) = p$ می‌باشد.*

تعریف ۳.۲.۱. *اگر M یک خمینه‌ی C^∞ و $p \in M$ باشد. آن‌گاه $C^\infty(p)$ عبارت است از مجموعه‌ی تمام توابع C^∞ که دامنه‌ی آن ها، یک زیرمجموعه‌ی باز شامل p از M است،یعنی: $f \in C^\infty(p)$ است اگر همسایگی باز W حول p از M وجود داشته باشد به طوری که $f : W \to \mathbb{R}$، C^∞ باشد.*

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنیم که M یک خمینه هموار از بعد n باشد. فضای مماس بر M در p، که با T_pM نمایش داده می‌شود عبارت است از مجموعه نگاشت های $X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق می‌کند:*

۱) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall f, g \in C^\infty(p)$؛

۲) $X_p(fg) = (X_pf)g(p) + f(p)X_pg$.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این مجموعه یک فضای برداری است.

توابع:

$$\partial_i|_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \ : \ \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}|_p \ \ , \ \ i = 1, ..., n \qquad (۱.۱)$$

دارای ویژگی‌های خطی و قاعده‌ی لایب نیتز هستند؛ بنابراین متعلق به T_pM هستند.

می‌توان نشان داد:

$$\partial_1|_p, ..., \partial|_p$$

پایه‌ای برای فضای برداری T_pM تشکیل می‌دهند.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید که $F : M \to N$ یک تابع C^∞ بین خمینه ها باشد. در این صورت برای هر $p \in M$ یک همریختی فضای برداری $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$، با تعریف زیر موجود است:*

$$F_*(X_p)f = X_p(f \circ F) \qquad (۲.۱)$$

معمولا همریختی $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ را دیفرانسیل F در p گوئیم و گاهی آن را با $dF(p)$ نیز نشان می‌دهیم و از F_* به جای F_{*p} نیز استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۱. *اگر برای $p \in M$ فضای مماس بر M، T_pM باشد، آن‌گاه $\cup_{p\in M} T_pM$ را کلاف مماس[۶] بر M گوئیم و آن را با TM نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنید که M یک خمینه و T_pM فضای مماس بر M در p باشد. همچنین $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ کلاف مماس باشد. آن‌گاه با این توپولوژی و ساختار C^∞، TM یک خمینه هموار و $\pi : TM \to M$ تعریف شده به صورت $\pi(X_p) = \{p\}$ یک تابع C^∞ می‌باشد. که به هر عنصر از تار T_pM نقطه پایه[۷] p را نسبت می دهد.*

اثبات. به [۸] رجوع کنید. □

[۶] Tangent Bundle

[۷] Base Point

روی خمینه‌های هموار میدان های برداری (به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت می دهند) مثال‌هایی از مفاهیم به طور شهودی آشنا در فیزیک هستند که با آنها زیاد روبرو می شویم، مانند: میدان سرعت، میدان نیرو، میدان برداری هامیلتونی و ...

تعریف ۸.۲.۱. *یک میدان برداری V روی خمینه‌ی M یک تابع است که به هر نقطه‌ی $p \in M$ یک بردار مماس V_p از T_pM نسبت می دهد:*

$$V : M \longrightarrow TM \ : \ p \in M \longmapsto V_p \in T_pM. \tag{۳.۱}$$

در حقیقت اگر $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ مجوعه توابع هموار روی خمینه M باشد، آن‌گاه میدان برداری V به صورت زیر عمل می‌کند:

$$V : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$V(f)(p) := V_p(f) \ ; \ f \in \mathcal{F}(M).$$

اگر در پیِ نگاشت ۳.۱ یک برافکنش اعمال کنیم، حاصل، یک نگاشت همانی خواهد بود:

$$\sigma : M \longrightarrow TM \quad , \quad \pi : TM \longrightarrow M \ \longrightarrow \ \pi \circ \sigma = id_M$$

لذا یک میدان برداری یک برش[۸] دیفرانسیل‌پذیر است.

مجموعه تمام میدان های برداری هموار روی M را با $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ نمایش می‌دهیم. نمایش میدان برداری V برحسب میدان‌های پایه روی دستگاه مختصات (U, φ) به صورت زیر است:

$$V = \sum_{i=1}^{n} (Vx^i) \ \partial_i \tag{۴.۱}$$

تعریف ۹.۲.۱. *جابجاگر دو میدان X و Y از فضای $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ به‌صورت زیر است:*

$$Z = [X, Y] := XY - YX, \tag{۵.۱}$$

[۸] Section

که X یا Y ابتدا روی تابع هموار f کنش می کند و یک تابع به دست می دهند. اثر جابجاگرها روی f نیز خود یک تابع هموار است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf).$$

چون X و Y از ویژگی‌های خطی و قاعده‌ی لایب نیتز پیروی می کنند، $[X,Y]$ نیز یک میدان برداری است.

تذکر ۱.۲.۱۰. جابجاگر $[X,Y]$ همان «مشتق لی» میدان برداری Y در راستای X است:
میدان برداریِ X یک شار[۹] تعریف می‌کند، منظور همه‌ی پاسخ‌های معادله دیفرانسیل $\dot{\alpha}(\tau) = X_{\alpha(\tau)}$ است. چگونگی تغییر اشیاء هندسی (توابع، میدان‌های برداری و ...) در امتداد این شار، به معنی مشتق گیری از آنها در امتداد X است. این نحوه مشتق گیری جزیی را «مشتق لی » می نامند و با L_X نشان می دهند.
اثر مشتق لی روی تابع هموار f :

$$L_X(f) = X(f) = \sum X(x^i)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

و اثر مشتق لی روی یک میدان برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_X Y = [X,Y]$$

لذا $L_X Y$ ، خود یک میدان برداری است.
یکی از ویژگی‌های مشتق لی این است که : $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.

نگاشت های خطی از T_pM به $\mathbb{R}$، فضای برداری دوگان T_pM را تولید می کند. این فضای برداری با T_p^*M نمایش داده می‌شود و به آن فضای هم‌مماس[۱۰] در نقطه p گفته می‌شود.

---

[۹] Flow

[۱۰] Cotangent

اجتماع مجزا از فضاهای هم مماس روی همه نقاط $p \in M$ $\quad T^*M := \bigcup\limits_{p\in M} T_p^*M$ کلاف هم مماس نامیده می‌شود. می‌توان ثابت نمود که T^*M دارای یک توپولوژی و ساختار C^∞ است که با این توپولوژی و ساختار C^∞، T^*M یک خمینه هموار است. اعضای T_p^*M را توسط ω_P نمایش می دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. *یک $1-$ فرمی عبارت است از نگاشت:*

$$\begin{aligned} \omega \quad &: M \longrightarrow T^*M \\ &: p \longmapsto \omega_p \in T_p^*M \end{aligned}$$

ω_p *نگاشت خطی از T_pM به اعداد حقیقی نیز هست:* $\omega_p(X_p) \in \mathbb{R}$.

به طور کلی می توان ω را در هر نقطه p ، روی هر میدان برداری X در نقطه p اثر داد که مقدار آن در نقطه p با عدد حقیقی $\omega_p(X_p)$ داده می‌شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. *$1-$فرمی ω هموار نامیده می‌شود اگر تابع $\omega(X)$ به ازاء هر میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ ، هموار باشد.*

مجموعه‌ی همه $1-$فرمی‌های هموار روی M با $\mathcal{X}^*(M)$ نشان داده می‌شود، که دوگان مجموعه‌ی $\mathcal{X}(M)$ است.

تعریف ۱۳.۲.۱. *دیفرانسیل هر تابع هموار روی M، $df : TM \longleftrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $(df)(X) = X(f)$ تعریف می‌شود که این تعریف بر تعریف ۲.۱ منطبق است.*
df مثالی از ۱ - فرمی‌ها است.

$1-$فرمی‌های $dx^1, ..., dx^n$ را «**فرم‌های دیفرانسیلِ پایه‌ی مرتبه ۱ روی** U » می‌نامند و داریم:

$$dx^i(\partial_j|_p) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p dx^i = \delta^i_j$$

هر $1-$فرمی هموار را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(\partial_i) dx^i \qquad (۶.۱)$$

که در آن $\omega(\partial_i)$ یک عدد حقیقی است که از اثر دادن ω روی میدان‌های پایه ∂_i بدست می آید. این رابطه روی کارت U از M برقرار است و با توجه به آنکه دستگاه های مختصات یک اطلس کامل روی M می‌سازند و همه‌ی M را می‌پوشانند و به یکدیگر به طور دیفرانسیل‌پذیر مرتبط می‌شوند، می توان ω را روی کل M تعریف کرد. یعنی از کنار هم قراردادن دستگاه های مختصات (φ, U)، (Ψ, V) و ....می توان نمایش موضعی[۱۱] ω را به روی کل M گسترش داد و یا سرتاسری[۱۲] کرد.

مثال: اگر g یک تابع هموار روی M باشد، دیفرانسیل کامل این تابع را خواهیم داشت :

$$dg(\partial_i) = \partial_i(g) = \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad , \quad dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i.$$

۳.۱ حساب روی خمینه‌ها

انتقال اشیاء هندسی بین دو خمینه

در این بخش چگونگی تولید اشیاء هندسی جدید از روی آنهایی که در بخش‌های قبل دیدیم و نیز نحوه انجام محاسبات روی این اشیاء را بررسی می‌کنیم.

در اینجا با دو مفهوم جدید آشنا خواهیم شد؛ یکی ضرب بیرونی فرمها، که تعمیمی است از ضرب برداری در فضای $\mathbb{R}^3$، و دیگری مشتق بیرونی، که تعمیمی از مفاهیم آشنای گرادیان، کرل و دیورژانس در فضای $\mathbb{R}^3$ است. بحث مختصری نیز راجع به خم‌های انتگرال میدان برداری خواهیم کرد. این بخش را با تحلیل تبدیلات خطی به وجود آمده روی فضاهای مماس و هم‌مماس دنبال می‌کنیم.

[۱۱] Local

[۱۲] Global

با داشتن نگاشت دیفرانسیل‌پذیر بین خمینه‌های M و N با ساختارهای دیفرانسیل‌پذیر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت :

$$F : (M, \mathcal{A}) \longrightarrow (N, \mathcal{B}) \tag{۷.۱}$$

می خواهیم بدانیم چگونه اشیاء هندسی از روی M به N منتقل می شوند.

۱. **توابع**

فرض کنید f یک تابع هموار روی خمینه‌ی مقصد N باشد:

$$\begin{aligned} f \quad &: N \longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\in N \longrightarrow f(q) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

نقطه‌ی $q \in N$ تصویر نقطه‌ی $p \in M$ تحت نگاشت F است : $F(p) = q$،

ترکیب $f \circ F$ تابعی هموار روی خمینه مبداء M است.

بازپسِ[۱۳] نگاشت[۱۴] F را با F^* نشان می دهیم. با این نگاشت، تابع f از N به M بازپس کشیده می‌شود.

$$F^* f = f \circ F : p \in M \longmapsto f(F(p)) \in \mathbb{R} \tag{۸.۱}$$

به بیان دیگر F^* فضای توابع هموار روی N را به فضای توابع هموار روی M می‌نگارد.

برعکس اگر F دیفئومورفیسم باشد، آنگاه می توان از یک تابع روی M تابعی روی N ساخت.

۲. **میدان های برداری**

فرض می‌کنیم X یک میدان برداری روی M باشد $X_p \in T_pM$. همان‌طور که دیدیم

[۱۳] Pull Back

[۱۴]

اگر g یک تابع هموار روی N باشد، $g \circ F$ یک تابع هموار روی M است. لذا می توان X_p را روی $g \circ F$ اعمال کرد: $X_p(g \circ F)$. اگر به نگاشت زیر توجه کنیم:

$$(X_F)_q : g \in \mathcal{F}(N) \longmapsto X_p(g \circ F) \in \mathbb{R}$$

می بینیم که $(X_F)q$ یک بردار مماسی روی خمینه‌ی مقصد در نقطه‌ی $q = F(p)$ است.
میدان‌های برداری روی M توسط نگاشت دیفرانسیل‌پذیر F_* به میدان‌های برداری روی N نگاشته می شوند: یعنی اگر F نگاشتی دیفئومورفیسم از خمینه‌ی M به خمینه‌ی N باشد، آنگاه:

$$F_* : TM \longrightarrow TN$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (F_*X)(f) &= X(f \circ F) \quad , \quad f \in \mathcal{F}(N) \\ X_F(f) &= X(f \circ F) \quad , \quad X \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

۳. فرم های دیفرانسیل بیرونی

فرض می‌کنیم $\omega \in \mathcal{X}^*(N)$، $1-$فرمی روی N باشد، همانطور که می‌دانیم ω روی میدان های برداری N کنش می‌کند.
با توجه به روابط قسمت قبل در مورد پیش رانِ[۱۵] میدان‌های برداری از M به N، می‌توان بازپسِ $1-$فرمی ها را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} (F^*\omega)(X)(f) &= \omega(F_*X)(f) \\ &= \omega(X(f \circ F)) \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

که در اینجا: $\omega \in \mathcal{X}^*(N) \quad , \quad f \in \mathcal{F}(M) \quad , \quad X \in \mathcal{X}(M)$.

[۱۵] Push Forward

متریک

تعریف ۱.۳.۱. *تانسورهای $\mathcal{T}_s^r$، نگاشت‌های چند خطی (با r اندیس پادوردا و s اندیس هموردا)هستند که r نسخه از T^*M را یعنی $\overbrace{(T^*M \times .... \times T^*M)}^{r}$ و s نسخه از TM را $\overbrace{(TM \times .... \times TM)}^{s}$ را به اعداد حقیقی می‌نگارد:*

$$(T_s^r)_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (۱۰.۱)$$

میدان تانسوری مرتبه $\binom{r}{s}$ به هر نقطه $p \in M$ یک چنین تانسوری را نسبت می‌دهد.

مجموعهٔ میدان‌های تانسوری هموردا نوع $\binom{r}{s}$ را با $\mathcal{T}_s^r$ نشان می‌دهیم.

میدان‌های برداری هموار، تانسورهای پادوردای مرتبه ۱ هستند: $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(M)$

همچنین، $1-$فرمی‌های هموار، تانسورهای هم وردای مرتبه ۱ هستند: $\mathcal{X}^*(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$

در تعریف نرم بردارها و حاصلضرب نقطه‌ای آنها از متریک استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توانیم به کمک متریک از هر بردار، فرم بسازیم. پس متریک روی بردارها اثر می‌کند.

تعریف ۲.۳.۱. *متریک روی خمینه‌ی هموار M یک میدان تانسوری g از نوع $\mathcal{T}_2^0$، تانسور هم وردای مرتبه ۲ است که در هر نقطه $p \in M$، g_p متقارن و غیرتبهگن - با تعاریف به ترتیب به‌صورت زیر است:*

$$(i)\ g_p(v_p, w_p) = g_p(w_p, v_p) \quad \forall v_p \ ,\ \ w_p \in T_pM,\ \ \forall\ p \in M$$

$$(ii)\ g_p(v_p, w_p) = 0 \ \ ,\ \ \forall w_p \in T_pM \quad \Longrightarrow v_p = o\ (\forall p \in M)\ .$$

متریک به عنوان نگاشت به صورت زیر عمل می‌کند:

$$g \in \mathcal{T}_2^0 : M \longrightarrow T^*M \times T^*M \qquad (۱۱.۱)$$

$$p \longmapsto g_p \qquad (۱۲.۱)$$