دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

حلقه‌های J - $*$ - تمیز قوی

نگارش: مریم مالکی

استاد راهنما: دکتر سید حمید سید جوادی

استاد مشاور: دکتر بهزاد نجفی

دی/۱۳۹۲

تشکر و قدردانی

با توکل به قادر متعال، خداوند بخشنده‌ی مهربان کار این پایان‌نامه را آغاز کردم، لطف حضرت حق سبب شد عزیزانی از بندگانش در مسیرم قرار گیرند و مرا در هر چه بهتر به ثمر رسیدن این امر یاری نمایند. در این مجال اندک فقط با بردن نام این بزرگواران می‌توانم بخشی ناچیزی از زحمات بی‌مقدارشان را قدردان باشم.

تشکر می‌کنم از استاد گرانقدرم جناب آقای **دکتر حاج سید جوادی** که در تمامی مراحل آماده‌سازی این پایان‌نامه با صبر و دقتی بی‌نظیر مرا راهنمایی کردند و زمینه آشنایی هر چه بیشتر با علم گسترده ریاضیات را برایم فراهم ساختند. هم‌چنین تشکر می‌کنم از جناب آقای **دکتر نجفی** که به‌عنوان استاد مشاور با صبر و حوصله مطالب را مطالعه کردند و نکات مهمی به بنده یادآور شدند. هم‌چنین از قبول زحمت و بررسی دقیق جناب آقای **دکتر موسوی** به عنوان داور خارجی و جناب آقای **دکتر نصر آزادانی** به عنوان داور داخلی کمال تشکر را دارم. در نهایت از همسر بزرگوارم که با شکیبایی خود مرا در این عرصه حمایت و یاری کردند سپاس‌گذارم.

چکیده

در این پایان نامه، حلقه ها یکدار می‌باشند و $*$-حلقه R را حلقه J-$*$-تمیز قوی گوییم هرگاه برای هر $a \in R$ عضو تصویری $e \in R$ موجود باشد که $a - e \in J(R)$ و $ae = ea$ به این منظور نشان می‌دهیم $*$-حلقه R، J-$*$-تمیز قوی است اگر و تنها اگر R، $*$-تمیز قوی باشد و $\frac{R}{J(R)}$ بولی باشد اگر و تنها اگر R به‌طوریکتا تمیز باشد و برای هر $a \in R$، $a - a^* \in J(R)$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in R$ عضو تصویری یکتایی مثل $e \in R$ موجود باشد که $a - e \in U(R)$ و $ae = ea$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in R$ تصویر یکتایی مثل $e \in R$ موجود باشد که $a - e \in J(R)$.

برای هر $*$-ایدآل I از R نشان می‌دهیم که R، J-$*$-تمیز قوی است اگر و تنها اگر R آبلی باشد و هر خودتوانی به پیمانه I و $\frac{R}{I}$، J-$*$-تمیز قوی باشد.

واژگان کلیدی: حلقه J-$*$-تمیز قوی، حلقه $*$-تمیز قوی، حلقه به‌طور یکتا تمیز.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه به بررسی ساختار حلقه‌های $*$–تمیز قوی و J–$*$–تمیز قوی اختصاص دارد. حلقه تمیز در سال ۱۹۹۷ توسط نیکلسون [1] تعریف شد، طبق تعریف وی یک حلقه تمیز است هرگاه به‌توان هر عضو آن‌را به‌صورت مجموع عضوی یکه و عضوی خودتوان نوشت [؟]. در سال ۱۹۹۹ نیکلسون حلقه تمیز قوی را تعریف کرد، طبق این تعریف حلقه‌ای که هر عضو آن را به‌توان به صورت مجموع عضوی خودتوان و عضوی یکه نوشت که با هم جابه‌جا می‌شوند حلقه تمیز قوی است [؟]. در هفده سال اخیر چنین حلقه‌هایی مورد توجه زیادی قرار گرفت، زیرا این حلقه‌ها ارتباط زیادی با حلقه‌های تبادلی، فن نیومن منظم و منظم–یکه و... دارند. در سال ۲۰۰۴ نیکلسون و ژو [2] حلقه‌هایی را مورد بررسی قرار دادند که عناصر آن به‌طور یکتا به‌صورت مجموع عضوی یکه و خودتوان نوشته می‌شدند [؟]. در سال۲۰۰۶ نیکلسون، چن [3] و ژو حلقه‌های گروهی که خاصیت فوق را داشتند، مورد بررسی قرار دادند [؟]. بالاخره چن در سال ۲۰۱۱ حلقه‌های به‌طوریکتا تمیز را تعریف کردند و در سال ۲۰۱۲ یانگ [4] حلقه‌های به‌طوریکتا تمیز قوی را تعریف کرد [؟]. چن در سال ۲۰۱۰ حلقه‌های J–تمیز قوی را تعریف کرد، طبق تعریف وی حلقه‌هایی که به‌توان هر عضو از آن را به‌صورت مجموع عضوی خودتوان و عضوی از ژاکوبسن رادیکال آن حلقه نوشت، حلقه J–تمیز قوی خواهد بود [؟]. هم‌چنین در سال ۲۰۱۰ واش [5] شروع به ارائه نسخه $*$ این حلقه‌ها کرد، وی برای یک حلقه R عمل $* : R \longrightarrow R$ را با ویژگی‌های زیر تعریف کرد، برای $\forall a, b \in R$ ، $(a+b)^* = a^* + b^*$ ،$(ab)^* = b^*a^*$ و $(a^*)^* = a$. وی R را یک $*$–حلقه و خودتوان $e^2 = e = e^* \in R$ را عضو تصویری نامید. واش یک $*$–حلقه را $*$–تمیز تعریف کرد هرگاه به‌توان هر عضو از آن‌را به‌صورت یک عضو خودتوان و یک عضو تصویر نوشت و درصورتی‌که این دو عضو

[1] $W.K.Nicholson$

[2] $Y.Zhou$

[3] $H.Chen$

[4] $X.Yang$

[5] $L.Vas$

با هم جابه‌جا شوند حلقه را $*$-تمیز قوی نامید[۱۶]. بالاخره در همان سال چن حلقه‌های J-$*$-تمیز قوی را تعریف کرد، طبق تعریف وی یک حلقه J-$*$-تمیز قوی است هرگاه به‌توان هر عضو آن را به‌صورت مجموع عضوی تصویری و عضوی از رادیکال ژاکوبسن آن حلقه نوشت [؟]. در این پایان نامه که مشتمل بر چهار فصل است به بررسی حلقه‌های $*$-تمیز قوی و J-$*$- تمیز قوی پرداخته‌ایم.

در فصل اول، مطالب در چهار بخش ارائه شده است. بخش اول یادآوری برخی تعاریف اولیه مانند ایدآل، حلقه‌های آرتینی و نوتری و ...است.بخش دوم به تعریف خودتوان یک حلقه اختصاص یافته است. بخش سوم حلقه‌های موضعی را تعریف می‌کنیم و بالاخره در بخش آخر حلقه‌های تبادلی را تعریف و مورد بررسی قرار داده‌ایم. در تهیه مطالب این فصل از [؟]، [؟] و [؟] بهره گرفته‌ایم.

فصل دوم، زمینه اصلی برای ورود به مبحث پایان نامه است، در اصل بدون دانستن مطالب این فصل ارتباط برقرار کردن با فصول بعدی ممکن نخواهد بود. در این فصل حلقه‌های تمیز قوی، به‌طوریکتا تمیز و J-تمیز قوی را تعریف می‌کنیم. سپس به بیان ارتباط این حلقه‌ها را با یکدیگر بیان می‌پردازیم. در تهیه مطالب این فصل از [؟]، [؟]، [؟] و [؟] بهره گرفته‌ایم.

فصل سوم، فصل اصلی این پایان نامه می‌باشد که در چهار بخش ارائه شده است. قبل از ورود به بخش اول حلقه‌های $*$-تمیز قوی و J-$*$-تمیز قوی را تعریف می‌کنیم سپس ارتباط این حلقه با یکدیگر را بیان می‌داریم. در بخش یک حلقه‌های $*$-منظم را تعریف می‌کنیم و ارتباط آن‌ها را با حلقه‌های $*$-تمیز قوی و J-$*$-تمیز قوی بیان می داریم. در بخش دوم $*$-ایدآل و رادیکال اول $P(R)$ را تعریف می‌کنیم سپس با در نظر گرفتن یک $*$-ایدآل I از یک حلقه R که $I \subseteq J(R)$ شرایط لازم و کافی برای J-$*$-تمیز قوی بودن حلقه R را بررسی می‌کنیم و سپس نتیجه می‌گیریم حلقه R، J-$*$-تمیز قوی است اگر و تنها اگر آبلی باشد و $R/P(R)$، J-$*$-تمیز قوی باشد. دربخش سوم، با داشتن حلقه R توسیعی از آن به صورت $R[i]$ را تعریف می‌کنیم و $*$-حلقه بودن آن را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم این حلقه جدید J-$*$-تمیز قوی خواهد بود اگر و تنها اگر R، J-$*$-تمیز قوی باشد. در بخشی آخر از این فصل به بررسی خاصیت J-$*$-تمیز قوی روی حلقه‌های گروهی می‌پردازیم. در تهیه مطالب این فصل از [؟]، [؟] و [؟] بهره گرفته‌ایم.

در سال ۲۰۰۳ کمیلو [۶] و سیمون [۷] حلقه‌های $g(x)$-تمیز قوی را تعریف کردند، طبق تعریفی که آن‌ها ارائه کردند یک حلقه R، $g(x)$-تمیز قوی است هرگاه برای هر $r \in R$ دو عضو $u \in U(R)$ و s به‌طوری‌که $g(s) = ۰$ چنان موجود باشند که $r = s + u$ و $su = us$ [؟]. ما در فصل چهارم این پایان نامه ارتباط بین حلقه‌های $g(x)$-تمیز قوی و J-تمیز قوی را مورد بررسی قرار دادیم و توانستیم حلقه J-$g(x)$-تمیز قوی را تعریف کنیم. حاصل این پژوهش در قالب یک مقاله ارائه و پذیرفته شد [؟].

---

[۶] *Camillo*

[۷] *Simon*

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل سعی کرده‌ایم مفاهیم و مقدمات اولیه مورد نیاز برای فصول و بخش‌های بعدی را با رعایت اختصار بیان کنیم. در تهیه مطالب این فصل از [۱]، [۲]، [۸] و [۱۸] کمک گرفته‌ایم. این فصل شامل چهار بخش است، در بخش اوّل مطالب ابتدایی از جبر ناجابجایی را یادآوری می‌کنیم، در بخش دوم عضو خودتوان یک حلقه را تعریف می‌کنیم و بعد از آن حلقه بولی، کاهشی و ... را تعریف می‌کنیم. در بخش سوم حلقه موضعی را تعریف می‌کنیم و در بخش آخر به تعریف حلقه تبادلی می‌پردازیم.

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱. حلقه یکدار R که هر عضو آن معکوس‌پذیر باشد، حلقه تقسیم نامیده می‌شود. هرگاه R حلقه تقسیم و جابه‌جایی باشد، آن گاه R میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم R حلقه و S زیر مجموعه‌ای ناتهی از آن باشد که تحت اعمال جمع و ضرب در R بسته است، هرگاه S تحت این اعمال حلقه باشد آن‌را یک زیر حلقه گوییم. زیر حلقه I از R را یک ایدآل چپ گوییم هرگاه برای هر $x \in I$ و $r \in R$ داشته باشیم $rx \in I$. هم‌چنین I را ایدآل راست گوییم هرگاه برای هر $x \in I$ و $r \in R$ داشته باشیم $xr \in I$.
I را ایدآل گوییم هرگاه ایدآل چپ و راست باشد.

مثال ۳.۱. فرض کنیم R حلقه باشد و $C(R) = \{a \in R \mid ax = xa \ \forall x \in R\}$. در این صورت $C(R)$ زیر حلقه‌ای از R است که ممکن است ایدآل نباشد. $C(R)$ را مرکز حلقه می‌نامیم.

تعریف ۴.۱. ایدآل P از حلقه R را ایدآل اول گوییم، هرگاه $P \neq R$ و اگر A, B ایدآل‌هایی از R باشند به‌طوری‌که $AB \subset P$ آن‌گاه $A \subset P$ یا $B \subset P$.

تعریف ۵.۱. ایدآل M از حلقه R را ماکزیمال گوییم، هرگاه $M \neq R$ و اگر N ایدآلی باشد که $M \subset N \subset R$، آن‌گاه $M = N$ یا $N = R$.

مثال ۶.۱. ایدآل (۳) از $\mathbb{Z}$ ماکزیمال است ولی ایدآل (۴) ماکزیمال نیست. زیرا $\mathbb{Z} \subsetneqq (۲) \subsetneqq (۴)$.

قضیه ۷.۱. در حلقه ناصفر و یکدار R همواره ایدآل‌های (چپ) ماکزیمال وجود دارند، به‌عبارت دیگر هر ایدآل (چپ) در R مشمول در یک ایدآل (چپ) ماکزیمال است.

اثبات. [؟، قضیه۱۸.۲] □

تعریف ۸.۱. ایدآل Q از حلقه R را اولیه گوییم، هرگاه $Q \neq R$ و اگر برای هر $a, b \in R$ که $ab \in Q$ و $a \neq Q$ آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که $b^n \in Q$.

مثال ۹.۱. هر ایدآل اول، اولیه است.

تعریف ۱۰.۱. گوییم شرط زنجیر افزایشی ACC برای خانواده‌ی $\{C_i \ : \ i \in I\}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی C برقرار است اگر شامل هیچ زنجیر اکیداً صعودی نامتناهی نباشد.

دو معادل دیگر برای این شرط در زیر آمده است:

(۱) برای هر زنجیر افزایشی $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \ldots$ از این خانواده عدد صحیح مثبت n چنان موجود باشد که $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \ldots$.

(۲) هر زیر خانواده ناتهی از خانواده داده شده یک عضو ماکزیمال داشته باشد.

به همین ترتیب که در بالا آمده شرط زنجیر کاهشی (DCC) نیز تعریف می‌شود و نظایر (۱) و (۲) برای آن موجود است.

اگر R یک حلقه و M یک R- مدول چپ (راست) باشد. گوییم M نوتری(آرتینی) است اگر شرط زنجیر افزایشی (کاهشی)برای خانواده تمام زیر مدول‌های M برقرار باشد. حلقه R را نوتری چپ (راست) گوییم اگر R به‌عنوان R- مدول چپ (راست) نوتری باشد. گوییم R نوتری است هرگاه نوتری چپ و راست باشد.

حلقه R را آرتینی چپ (راست) گوییم اگر به‌عنوان R- مدول چپ (راست) آرتینی باشد. گوییم R آرتینی است ، اگر آرتینی چپ و راست باشد.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R- مدول چپ باشد.

(۱) M یک R- مدول ساده (تحویل پذیر) نامیده می‌شود ، اگر $M \neq \circ$ و هیچ زیر مدولی غیر از خودش و صفر نداشته باشد.

(۲) M یک R- مدول نیم‌ساده (کاملاً تحویل‌پذیر) نامیده می‌شود اگر هر R- زیر مدول M جمع‌وند مستقیمی از M باشد.

قضیه ۱۲.۱. (ودربرن-آرتین) شرایط زیر برای حلقه آرتینی R معادل هستند.

(۱) R ساده است.

(۲) R اولیه است.

(۳) به ازای عدد صحیح مثبت n، R با حلقه تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی یک حلقه تقسیم یکریخت است.

اثبات. [؟، قضیه۱۴.۱] □

تعریف ۱۳.۱. فرض کنیم R حلقه باشد، در این صورت اشتراک ایدآل‌های چپ ماکزیمال R یک ایدآل است که آن‌را رادیکال ژاکوبسن حلقه R نامیده و با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۴.۱. فرض کنیم R حلقه باشد، برای $y \in R$ شرایط زیر معادل اند:

(۱) $y \in J(R)$.

(۲) $1 - xy$ معکوس پذیر چپ است ، برای هر $x \in R$.

(۳) $yM = \circ$ برای هر $R-$ مدول ساده M.

اثبات. [؟، نتیجه ۴.۱] □

نتیجه ۱۵.۱. هرگاه Rحلقه باشد، پوچ‌ساز چپ حلقه R به‌صورت

$$ann(R) = \{a \in R \mid ra = \circ , \ \forall r \in R\}$$

می‌باشد. هم‌چنین $J(R)$ اشتراک تمام پوچ‌سازهای چپ R-مدول‌های چپ ساده است.

اثبات. [؟، نتیجه ۴.۲] □

لم ۱۶.۱. برای $y \in R$ شرایط زیر معادل اند:

(۱) $y \in J(R)$.

(۲') $۱ - xyz \in U(R)$ (گروه یکه‌های حلقه R)برای هر $x, z \in R$.

اثبات. [؟، لم ۴.۳]

□

نتیجه ۱۷.۱. $J(R)$ بزرگترین ایدآل چپ است (و بنابراین بزرگترین ایدآل خواهد بود) به‌طوری‌که $۱ + J(R) \subseteq U(R)$.

اثبات. [؟، نتیجه ۴.۵] □

گزاره ۱۸.۱. فرض کنیم ϑ ایدآلی از R باشد که $\vartheta \subseteq J(R)$ در این صورت $\frac{J(R)}{\vartheta} = J(\frac{R}{\vartheta})$.

اثبات. [؟، گزاره ۴.۶] □

گزاره ۱۹.۱. R و $\bar{R} = \frac{R}{J(R)}$ دارای مدول‌های چپ ساده یکسان هستند.

هر عضو $x \in R$ معکوس پذیر چپ (معکوس پذیر) است اگر و تنها اگر $\bar{x} \in \bar{R}$ معکوس پذیر چپ (معکوس پذیر) باشد.

اثبات. [؟، گزاره ۴.۸] □

۲.۱ خودتوان

تعریف ۲۰.۱. عضو $a \in R$ خودتوان نامیده می‌شود، هرگاه $a^۲ = a$.

تعریف ۲۱.۱. حلقه R بولی نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو آن خودتوان باشد.

تعریف ۲۲.۱. عضو $a \in R$ پوچ‌توان نامیده می‌شود، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که $a^n = 0$.

تعریف ۲۳.۱. یک حلقه کاهش یافته (کاهشی) نامیده می‌شود، هرگاه دارای هیچ عضو پوچ‌توان ناصفری نباشد.

تعریف ۲۴.۱. اگر I یک ایدآل از حلقه R باشد ، گوییم خودتوان $x \in \frac{R}{I}$ به R ارتقا داده می‌شود ، اگر خودتوان $e \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که تصویر آن تحت همریختی طبیعی $R \longrightarrow \frac{R}{I}$ ، x باشد.

هم‌چنین ، اگر L یک زیر گروه جمعی از حلقه R باشد ، گوییم خودتوان‌ها به پیمانه L ارتقا داده می‌شوند هرگاه برای $x \in R$ که $x - x^2 \in L$ خودتوانی مثل $e = e^2 \in R$ موجود باشد که $e - x \in L$.

مثال ۲۵.۱. فرض کنیم حلقه $R = \mathbb{Z}$ و ایدآل I ایدآل تولید شده توسط $3^2 - 3 = 6$ باشد. در این صورت $\bar{3}$ خودتوانی در $\frac{R}{I}$ است که نمی‌توان آن را به R ارتقا داد.

تعریف ۲۶.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $a \in G$. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت m که $a^m = e$ (e عضو همانی است) را مرتبه a گوییم. درصورتی‌که چنین mی موجود نباشد a را از مرتبه نامتناهی گوییم.

تعریف ۲۷.۱. گروه G تابدار نامیده می‌شود هرگاه، مرتبه هر عضو از G متناهی باشد.

۳.۱ حلقه‌های موضعی

تعریف ۲۸.۱. حلقه R یک حلقه موضعی نامیده می‌شود اگر $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه تقسیم باشد.

برای مثال تمام حلقه‌های تقسیم موضعی هستند.

قضیه ۲۹.۱. برای هر حلقه ناصفر R عبارات زیر معادل‌اند:

(۱) R تنها یک ایدآل چپ ماکزیمال دارد.

(۲) R تنها یک ایدآل راست ماکزیمال دارد.

(۳) $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه تقسیم است.

(۴) $R \setminus U(R)$ ایدآلی از R است.

(۵) $R \setminus U(R)$ یک گروه جمعی است.

($'$۵) برای هر n ، اگر $a_1 + a_2 + ... + a_n \in U(R)$ ، آن‌گاه برای یک $1 \leqslant i \leqslant n$ داریم $a_i \in U(R)$.

($''$۵) $a + b \in U(R)$ نشان می‌دهد که $a \in U(R)$ یا $b \in U(R)$.

اثبات. [؟، قضیه ۱۹.۱] □

قضیه ۳۰.۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی دلخواه باشد. در این صورت

(۱) R ، تنها یک ایدآل ماکزیمال دارد.

(۲) R ، ددکیند متناهی است.(یعنی اگر برای هر $a, b \in R$، $ab = 1$ آن‌گاه $ba = 1$).

(۳) R ، هیچ خودتوان غیر بدیهی ندارد.

اثبات. [؟، قضیه ۱۹.۲] □

قضیه ۳۱.۱. (۱) فرض کنیم $R \neq 0$ و هر $a \notin U(R)$ پوچ‌توان باشد. آن‌گاه R یک حلقه موضعی است.

(۲) فرض کنیم R مشمول در حلقه تقسیم D باشدبه‌طوری‌که برای هر $d \in D^*$ ، d یا d^{-1} در R قرار بگیرد آن‌گاه R یک حلقه موضعی است.

اثبات. [؟، قضیه ۱۹.۳] □

مثال ۳۲.۱. اگر R یک حلقه موضعی باشد ، $R[[x]]$ نیز چنین خواهد بود. ۱)

تعریف ۳۳.۱. حلقه R نیم‌موضعی نامیده می‌شود اگر $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه آرتینی چپ باشد و یا به‌طور معادل $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه نیم‌ساده باشد.

قضیه ۳۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) R نیم‌موضعی است.

(۲) R تعداد متناهی ایدآل چپ ماکزیمال دارد.

اثبات. [؟، قضیه ۲۰.۲] □

۴.۱ حلقه‌های تبادلی

تعریف ۳۵.۱. حلقه R را تبادلی گوییم هرگاه برای هر $a \in R$، خودتوان‌های $e, f \in R$ موجود باشند به طوری‌که $e \in aR$ و $۱ - e \in (۱ - a)R$ یا این‌که $f \in Ra$ و $۱ - f \in R(۱ - a)$.

گزاره ۳۶.۱. حلقه R تبادلی است اگرو تنها اگر $\frac{R}{J(R)}$ تبادلی باشد و هرخودتوانی به پیمانه $J(R)$ ارتقا داده شود.

اثبات. [؟، نتیجه ۲.۴] □

لم ۳۷.۱. حلقه R موضعی است اگر و تنها اگر تبادلی آبلی و ساده باشد.

اثبات. [؟، لم ۱۷.۱] □

لم ۳۸.۱. فرض کنیم R حلقه تبادلی آبلی است. در این صورت برای هر ایدآل اول P از R، $\frac{R}{P}$ حلقه موضعی است.

اثبات. [؟، لم ۱۷.۲.۵] □

گزاره ۳۹.۱. هرگاهR حلقه تبادلی آبلی باشد آن‌گاه دارای فاکتورهای اولیه آرتینی است.

اثبات. فرض کنیم R حلقه تبادلی آبلی باشد و P یک ایدآل اولیه از R باشد. چون هر ایدآل اولیه، اول است طبق لم بالا $\frac{R}{P}$ موضعی است. چون P ایدآل اولیه است داریم $J(\frac{R}{P}) = ۰$ بنابراین $\frac{R}{P}$ حلقه تقسیم است. لذا $\frac{R}{P}$ آرتینی است. $\square$

فصل ۲

حلقه‌های تمیز قوی و J-تمیز قوی

موضوع اصلی مورد بحث این پایان نامه حلقه‌های $*$-تمیز قوی و J-$*$-تمیز قوی است اما قبل از این‌که به ساختار چنین حلقه‌هایی بپردازیم لازم است با حلقه‌های تمیز قوی و J-تمیز قوی آشنا شویم. به همین منظور این فصل را به بیان این مطالب اختصاص داده‌ایم. در ابتدای این فصل به بیان تعاریف حلقه‌های تمیز قوی، J-تمیز قوی و حلقه‌های به‌طور یکتا تمیز قوی می‌پردازیم. سپس ارتباط بین این حلقه‌ها را بیان می‌کنیم. تأکید می‌کنیم که مطالب این فصل پیش زمینه‌ای برای فصل آتی می‌باشد از این رو فقط اثبات برخی از قضایا که به درک مطالب فصل بعد کمک می‌کند آورده شده و مابقی به منابع ارجاع داده شده است.[۵]، [۴]، [۱۱]

تعریف ۱.۲. عضو $a \in R$ را تمیز قوی گوییم، هرگاه عضو خودتوان $e^2 = e \in R$ و $u \in U(R)$ چنان موجود باشند که $a = e + u$ و $eu = ue$. حلقه R را تمیز قوی گوییم هرگاه هر عضو آن تمیز قوی باشد.

تعریف ۲.۲. عضو $a \in R$ را به‌طوریکتا تمیز گوییم، هرگاه اعضای یکتای $e^2 = e \in R$ و $u \in U(R)$ چنان موجود باشند که $a = e + u$ حلقه R را به‌طور یکتا تمیز گوییم هرگاه هر عضو آن به طور یکتا تمیز باشد.

تعریف ۳.۲. عضو $a \in R$ را J- تمیز قوی گوییم، هرگاه عضو خودتوان $e \in R$ و $w \in J(R)$ چنان موجود باشند که $a = e + w$ و $ew = we$. حلقه R را J- تمیز قوی گوییم هرگاه هر عضو آن J- تمیز قوی باشد.

قضیه زیر ارتباط بین حلقه‌های J-تمیز قوی و تمیز قوی را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۲. اگر حلقه R ، J- تمیز قوی باشد آن‌گاه تمیز قوی است.

اثبات. فرض کنیم $x \in R$ عضو J- تمیز قوی باشد. در این صورت خودتوان $e \in R$ و $w \in J(R)$ موجود است که $x = e + w$ و $ew = we$. بنابراین $x = (1-e) + (2e-1+w)$ چون $(2e-1)^2 = 1$ پس

$$(۲e-۱)(۲e-۱+w)=(۲e-۱)^۲+(۲e-۱)w\in U(R)$$

پس $(۲e-۱+w)\in U(R)$. به این ترتیب $x\in R$ تمیز قوی است. پس هر عضو دلخواه تمیز قوی است در نتیجه حلقه R تمیز قوی است. $\square$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم R حلقه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) R ، J- تمیز قوی است.

(۲) $\frac{R}{J(R)}$ بولی است و هر خودتوان به طور قوی به پیمانه $J(R)$ ارتقا داده می‌شود.

(۳) $\frac{R}{J(R)}$ بولی و R تمیز قوی است.

اثبات. ۲ $\Leftarrow$ ۱ فرض کنیم $x\in R$ در این صورت $x=e+w$ که $e^۲=e\in R$ ، $w\in J(R)$ و $ew=we$. پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}x+J(R)&=e+w+J(R)\\&=e+J(R)\end{aligned}$$

لذا $\frac{R}{J(R)}$ بولی است. فرض کنیم $\bar{e}\in\frac{R}{J(R)}$ خودتوان باشد. چون حلقه R، J- تمیز قوی است، خودتوانی مثل $f\in R$ موجود است که $e-f\in J(R)$ و $ef=fe$. پس $\bar{e}$ به پیمانه $J(R)$ به طور قوی ارتقا داده می‌شود.

۱ $\Leftarrow$ ۲ برای هر $x\in R$ داریم $\bar{x}\in\frac{R}{J(R)}$ خودتوان است. طبق فرض خودتوان $e\in R$ موجود است که $x-e\in J(R)$ و $ex=xe$. حال فرض کنیم $w=x-e$ در این صورت $x=e+w$ ، $w\in J(R)$ و $ew=we$. بنابراین R ، J- تمیز قوی است.

۳ $\Leftarrow$ ۱ با توجه به قضیه قبل واضح است.

۱ $\Leftarrow$ ۳ چون $\frac{R}{J(R)}$ بولی است $\bar{۲}=(\bar{۲})^۲$ ، در نتیجه $۲\in J(R)$. برای هر $x\in R$ طبق فرض خودتوان $e\in R$ موجود است که $u:=x-e\in U(R)$ و $ex=xe$. چون $\bar{u}=\bar{u}^۲$ پس