بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض

عنوان:

گراف مقسوم علیه‌های صفر و گراف تام حلقه‌ی جابه‌جایی

استاد راهنما:

دکتر محمد تقی دیبایی

تدوین:

رقیه حافظیه

شهریور ۱۳۸۷

بسمه تعالی

تاریخ:..........................
شماره:..........................
پیوست:..........................
واحد:..........................

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ رقیه حافظیه دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

گراف مقسوم‌علیه‌های صفر وگراف تام حلقه‌ی جابه‌جایی

در روز چهارشنبه مورخ ۸۷/۶/۲۰ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/ (هجده و ۲۶) می‌باشد.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

داور داخلی	داور خارجی	استاد راهنما
دکتر حسین ذاکری	دکتر حمیدرضا میمنی	دکتر محمدتقی دیبایی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر.

طالقانی ، بعد از
، شماره ۵۹۹ ،
۱۵۶۱
۷۷۵
۷۷۶:۲
شهید بهشتی ، میدان
شگاه تربیت معلم .
۳۱۹۷۹ ـ ۳۷۵۵ .

به نام حضرت دوست

که هرچه هست از اوست

و هرچه از اوست نیکوست

قدردانی و تشکر

به نام آنکه جان را فکرت آموخت.

سپاس خدای را که یاریم داد تا راهی را که در پی بی‌نهایت علم آغاز نموده بودم به انجام رسانم و شکرگزارم که این پایان، تولد نگرشی نو به کتیبه‌ی همیشه حیرت‌آور آفرینش خواهد بود. و در پیمودن این راه نه چندان سهل هدایتگری باید، که اگر روشن‌گریِ هدایت‌گرانه‌اش نبود، حتی تصور روزنه‌ی امیدی برای این تولد محال می‌نمود. هر چند قدرت واژه‌ها در برابر زحماتش قد خم می‌کند، ولی با زبان قاصر از جناب آقای دکتر محمدتقی دیبایی که تحت عنوان استاد راهنما، بزرگ‌ترین راهنمایی‌ها را نثار این جانب فرموده‌اند، نهایت قدردانی را دارم.

و نگاهی دیگر از جنس سپاس، تقدیم دکتر حسین ذاکری و دکتر حمیدرضا میمنی که توجه خود را از تلاش حقیر دریغ نفرمودند و بذل عنایتشان مرا تا همیشه قدرشناس خواهد کرد. و سپاس بیکران، نثار همراه زندگی‌ام، جناب آقای محمد عبدی عربلو که همراهی صمیمانه و همکاری بی‌دریغش، راه را بر من هموار نمود.

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، $Nil(R)$ ایده‌آل اعضای پوچ‌توان، $Z(R)$ مقسوم‌علیه‌های صفر، $Reg(R)$ اعضای منظم R و $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$ مقسوم‌علیه‌های صفرِ ناصفر R باشند. گراف مقسوم‌علیه‌های صفر R، گرافی است (غیر جهت‌دار) با مجموعه‌ی رئوس $Z(R)^*$ به طوری که به‌ازای هر $x, y \in Z(R)^*$ $(x \neq y)$، x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. این گراف را با $\Gamma(R)$ نمایش می‌دهیم. در این بحث مشخص می‌کنیم تحت چه شرایطی $diam(\Gamma(R)) \leq 2$ یا $gr(\Gamma(R)) \geq 4$، سپس نتایج حاصل را در مورد حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها، حلقه‌ی سری‌های توانی و حلقه‌ی ایده‌آل‌سازی بررسی می‌کنیم. همچنین گراف تام حلقه‌ی R گرافی است با مجموعه‌ی رئوس همه اعضای R به طوری که به‌ازای هر $x, y \in R$ $(x \neq y)$، x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x + y \in Z(R)$. این گراف را با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیرگراف‌های $Reg(\Gamma(R))$، $Nil(\Gamma(R))$ و $Z(\Gamma(R))$ از $T(\Gamma(R))$ با مجموعه‌ی رئوس $Reg(R)$، $Nil(R)$ و $Z(R)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه از مقالات [1] و [2] به عنوان مراجع اصلی استفاده شده است. مفهوم گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی اولین بار توسط بک [۱]، هنگام تحقیق در مورد مسأله‌ی رنگ‌آمیزی حلقه‌ی جابه‌جایی مطرح شد. وی در این بحث تمامی اعضای حلقه را به عنوان مجموعه‌ی رئوس گراف در نظر گرفت. سپس اندرسون [۲] و لیوینگستون [۳] در [5] گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R را به عنوان گرافی (غیر جهت‌دار) با مجموعه‌ی رئوس مقسوم‌علیه‌های صفرِ ناصفر R معرفی کردند به طوری که به‌ازای هر $x, y \in Z(R)^*$، x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. اندرسون و لیوینگستون، مولای [۴] [11]، دی‌مایر [۵] و اشنایدر [۶] [9] در میان همه‌ی خواص یک گراف به بررسی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی جابه‌جایی پرداختند. به عنوان مثال اندرسون و لیوینگستون نشان دادند که گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه‌ی جابه‌جایی گرافی همبند، قطر آن کوچک‌تر یا مساوی ۳ است. اگر این گراف شامل دوری باشد، و R حلقه‌ی آرتینی باشد کمر کوچک‌تر یا مساوی ۴ است. همچنین آنها حدس زدند این مطلب در حالتی که R آرتینی هم نباشد، ممکن است برقرار باشد. سپس دی‌مایر، اشنایدر و مولای این حدس را به طور مستقل ثابت کردند. برهانی کوتاه از این مطلب در [8] آورده شده است. سپس اکستل [۷] و استیکلز [۸] به بررسی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه‌ی ایده‌آل‌سازی پرداختند. به ویژه آنها در [6, section 3] مشخص کردند تحت چه شرایطی این گراف کامل است و در چه

---

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Livingston
[۴] Mulay
[۵] DeMeyer
[۶] Schneider
[۷] Axtell
[۸] Stickles

شرایطی قطر آن برابر ۲ است. همچنین لوی[۹] و شپیرو[۱۰]، این مطالب را در مورد یک حلقه‌ی فون‌نویمن منتظم مورد مطالعه قرار دادند.

در این بحث ابتدا به بررسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R پرداخته، سپس گراف تام حلقه‌ی جابه‌جایی R را به عنوان گرافی (غیر جهت‌دار) با مجموعه‌ی رئوس همه‌ی اعضای R در نظر می‌گیریم به طوری که به‌ازای هر $x, y \in R$، x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x + y \in Z(R)$. این گراف را با $T(\Gamma(R))$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$، $Nil(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ از این گراف را به طور کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل اول یادآوری و مقدمات لازم جهت فصول بعد را بیان می‌کنیم. به ویژه گراف مقسوم‌علیه‌های صفر و گراف تام یک حلقه‌ی جابه‌جایی و نیز بعضی زیرگراف‌های آن را به طور کامل معرفی می‌نماییم.

در فصل دوم به بررسی قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R پرداخته و به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آن شرایط $gr(\Gamma(R)) \geq ۴$ یا $diam(\Gamma(R)) \leq ۲$. سپس از نتایج حاصل استفاده کرده، قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها، حلقه‌ی سری‌های توانی و حلقه‌ی ایده‌آل‌سازی را محاسبه می‌کنیم.

در فصل سوم گراف تام حلقه‌ی جابه‌جایی R را معرفی و آن را با نماد $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم. مطالعه‌ی این گراف به دو بخش تقسیم می‌شود. حالتی که $Z(R)$ ایده‌آل R است و حالتی که $Z(R)$ ایده‌آل R نیست. در حالت اول نشان می‌دهیم زیرگراف $Z(\Gamma(R))$ از $T(\Gamma(R))$ همواره همبند و مجزا از زیرگراف $Reg(\Gamma(R))$ است. همچنین در این حالت $Reg(\Gamma(R))$ به صورت اجتماع مجزا از زیرگراف‌هایی است که هر یک گرافی کامل یا دوبخشی کامل است. حال آنکه اگر $Z(R)$ ایده‌آل R نباشد، زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ از $T(\Gamma(R))$ هیچ‌گاه مجزا نیستند. به علاوه $T(\Gamma(R))$ همبند است اگر و تنها اگر $R = (Z(R))$.

[۹] Levi
[۱۰] Shapiro

فصل ۱

یادآوری و مقدمات

۱—۱ گراف

تعریف ۱.۱. گراف G متشکل از $V(G)$، مجموعه‌ی رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ی یال‌ها است که متناظر با مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی $V(G)$ است.

معمولاً برای نشان دادن یال از علامت $x-y$ به جای علامت $\{x,y\}$ استفاده می‌شود. اگر $x-y$ یک یال باشد، x و y را مجاور نامیم. به طور معمول از گراف‌ها برای بیان تصویری یک رابطه‌ی دوتایی بین اشیاء یک مجموعه استفاده می‌شود. به عنوان مثال مجموعه‌ی رئوس می‌توانند نمایشی برای کامپیوترهای یک شبکه باشند به گونه‌ای که رئوس مجاور نمایانگر زوج‌هایی از کامپیوترهاست که با یک کابل به هم وصل شده‌اند.

تعریف ۲.۱. زیرگرافی از G، گرافی مثل G' است به طوری که $E(G') \subseteq E(G)$ و $V(G') \subseteq V(G)$.

تعریف ۳.۱. زیرگراف G' از گراف G را زیرگراف القایی نامیم اگر به‌ازای هر دو رأس از $V(G')$ مثل x و y، x و y در G' مجاورند اگر و تنها اگر x و y در G مجاور باشند.

تعریف ۴.۱. یک مسیر به طول r از x به y در گراف G، دنباله‌ای از $r+1$ رأس دو به دو متمایز مانند $x_1 = x$، x_2، ... و $x_{r+1} = y$ است که به‌ازای هر $1 \leq i \leq r$، x_i و x_{i+1} مجاورند.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم G یک گراف باشد. گوییم گراف G همبند است اگر بین هر دو عضو دلخواه و متمایز آن مسیری موجود باشد. همچنین G را کاملاً ناهمبند نامیم اگر هیچ دو رأس از گراف G مجاور نباشد.

به‌ازای هر دو رأس از G مانند x و y، $d(x,y)$ را به عنوان طول کوتاه‌ترین مسیر بین x و y تعریف می‌کنیم (توجه کنیم $d(x,x) = 0$ و اگر هیچ مسیری بین x و y موجود نباشد، آنگاه $d(x,y) = \infty$).

تعریف ۶.۱. فرض کنیم G یک گراف باشد. قطر گراف G را با نماد $diam(G)$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$diam(G) = \sup\{d(x,y) \mid \text{هستند } G \text{ رئوسی از گراف } y, x\}$$

تعریف ۷.۱. یک دور گرافی همبند است که هر رأس آن دقیقاً دو همسایه داشته باشد.

تعریف ۸.۱. طول کوتاه‌ترین دور در گراف G را کمر گراف G نامیم و با $gr(G)$ نمایش می‌دهیم (توجه کنیم اگر G شامل هیچ دوری نباشد، آنگاه $gr(G) = \infty$).

تعریف ۹.۱. گراف G را کامل نامیم هرگاه هر دو رأس دلخواه و متمایز آن مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با K^n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱. گراف G را دوبخشی کامل نامیم هرگاه مجموعه‌ی رئوسش را بتوان به دو بخش مانند G_1 و G_2 افراز کرد به طوری که هر یال رأسی در G_1 و رأس دیگرش در G_2 باشد، همچنین هر رأس در G_1 با تمام رئوس G_2 مجاور باشد و بالعکس. گراف دوبخشی کامل با m و n رأس را با $K^{m,n}$ نشان می‌دهیم (m و n می‌توانند بی‌نهایت هم باشند) گاهی اوقات گراف $K^{1,n}$ را گراف ستاره‌ای نامیم. همچنین $\overline{K^{m,3}}$ گرافی است که از اتصال گراف $G_1 = K^{m,3}$ ($V(G_1) = A \cup B$ به طوری که $|A| = m$ و $|B| = 3$) با گراف ستاره‌ای $G_2 = K^{1,m}$ بوجود می‌آید.

تعریف ۱۱.۱. زیرگراف‌های (القایی) G_1 و G_2 از G را مجزا نامیم هرگاه G_1 و G_2 هیچ رأس مشترکی

نداشته باشند و همچنین هیچ رأسی از G_1 (به طور مشابه G_2) مجاور با رأسی خارج از G_1 (به طور مشابه G_2) نباشد. [12] منبع مناسبی در نظریه‌ی گراف است.

تعریف ۱.۱۲. رأس x در گراف G را یک پایان نامیم هرگاه x فقط با یک رأس مجاور باشد.

تعریف ۱.۱۳. گراف G_1 با گراف G_2 یکریخت است هرگاه نگاشتی دوسویی مثل φ از $V(G_1)$ به $V(G_2)$ موجود باشد به طوری که به‌ازای هر دو رأس متمایز از G_1 مثل x و y، x و y در G_1 مجاورند اگر و تنها اگر $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ در G_2 مجاور باشند.

[12] منبع مناسبی در نظریه‌ی گراف است.

۱—۲ گراف مقسوم‌علیه‌های صفر و گراف تام حلقه‌ی R

در سراسر این بحث تمامی حلقه‌ها را جابه‌جایی و یکدار فرض می‌کنیم ($1 \neq 0$).

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $T(R)$ حلقه‌ی کامل کسرهای R، $Reg(R)$ مجموعه‌ی اعضای منظم R (یعنی اعضای غیر صفر R که مقسوم‌علیه صفر R نیستند.)، $Z(R)$ مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R و $Nil(R)$ ایده‌آل اعضای پوچ‌توان R باشند. در [5] اندرسون[1] و لیوینگستون[2]، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر R را به عنوان گرافی با مجموعه‌ی رئوس $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$ معرفی کرده و آن را با $\Gamma(R)$ نمایش داده‌اند، به طوری که برای هر دو عنصر متمایز از $Z(R)^*$ مثل x و y، این دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. این مفهوم به بک[3] [7]، کسی که همه‌ی اعضای حلقه‌ی R را به عنوان مجموعه‌ی رئوس در نظر گرفت و در مسائل رنگ‌آمیزی بسیار علاقه‌مند بود، برمی‌گردد. برای برخی مقاله‌های جدید در مورد گراف مقسوم‌علیه‌های صفر می‌توان به [3]، [4]، [6]، [8]، [16]، [17] و [18] مراجعه کرد.

گراف تام حلقه‌ی R گرافی است با مجموعه‌ی رئوس همه‌ی اعضای R به طوری که به‌ازای

[1] Anderson
[2] Livingston
[3] Beck

هر دو عضو متمایز از R مثل x، y، این دو رأس مجاور‌ند اگر و تنها اگر $x+y \in Z(R)$. این گراف را به صورت $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم. زیرگراف‌های (القایی) $Reg(\Gamma(R))$، $Z(\Gamma(R))$ و $Nil(\Gamma(R))$ از گراف $T(\Gamma(R))$ به ترتیب زیرگراف‌هایی با مجموعه‌ی رئوس $Reg(R)$، $Z(R)$ و $Nil(R)$ هستند. لازم به ذکر است اگر A زیرحلقه‌ای از حلقه‌ی جابه‌جایی B باشد، آنگاه $T(\Gamma(A))$ لزوماً زیرگراف (القایی) از $T(\Gamma(B))$ نیست. در حالی که اگر x و y عناصری از A باشند و در گراف $T(\Gamma(A))$ مجاور باشند چون $Z(A) \subseteq Z(B)$، لذا x و y در $T(\Gamma(B))$ نیز مجاورند. در واقع $T(\Gamma(A))$ زیرگراف (القایی) از $T(\Gamma(B))$ است اگر و تنها اگر $Z(B) \cap A = Z(A)$.

مطالعه‌ی گراف $T(\Gamma(R))$ به دو حالت تقسیم می‌شود. در حالت اول فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد، در حالت دوم فرض می‌کنیم $Z(R)$ ایده‌آل R نباشد.

مطابق معمول $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{F}_q$ به ترتیب نمایانگر اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد صحیح به پیمانه‌ی n و میدان متناهی با q عضو هستند. گروه یکه‌های حلقه‌ی R را با $U(R)$ و عناصر غیر صفر از $A \subseteq R$ را با A^* نمایش می‌دهیم. گوییم R تقلیل‌یافته است هرگاه $Nil(R) = \{0\}$. [14] و [15] منابع مناسبی در نظریه‌ی حلقه هستند.

۱—۳ ایده‌آل‌سازی

در این بحث از تکنیک ایده‌آل‌سازی یک Rـ مدول روی حلقه‌ی R برای ساختن مثال‌هایی استفاده می‌کنیم.

برای Rـ مدولی مثل M، منظور از ایده‌آل‌سازی M روی R، حلقه‌ای است جابه‌جایی که از $R \times M$ با تعریف جمع و ضرب زیر تولید می‌شود.

$$(r,m)+(s,n) := (r+s, m+n)$$

$$(r,m)\cdot(s,n) := (rs, rn+sm)$$

نماد استاندارد برای این "حلقه‌ی ایده‌آل‌سازی شده"، $R(+)M$ است. برای مطالعه‌ی خصوصیات اولیه‌ی

حلقه‌های ایده‌آل‌سازی شده می‌توان به [۱۴] مراجعه کرد. همچنین در [6]، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر $\Gamma(R(+)M)$ مطالعه شده است.

۱—۴ حلقه فون نویمن منتظم R

حلقه‌ی R را فون نویمن منتظم نامیم هرگاه به‌ازای هر $x \in R$، y ای از R موجود باشد به طوری که $x = x^۲y$ یا به طور معادل R تقلیل‌یافته و از بعد صفر باشد [14; theorem 3.1].

فصل ۲

قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R

۲—۱ قطر و کمر

در این فصل به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آن شرایط $gr(\Gamma(R)) \geq ۴$ یا $diam(\Gamma(R)) \leq ۲$.
برای بررسی مطالب بعدی ابتدا سه قضیه‌ی زیر از [5] را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R متناهی یا حوزه‌ی صحیح باشد. به ویژه اگر گراف $\Gamma(R)$ ناتهی باشد در این صورت R متناهی است و میدان نیست.

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R)$ متناهی (یعنی $|Z(R)^*| < \infty$) و ناتهی باشد. آنگاه اعضایی ناصفر از R مثل x و y وجود دارند به طوری که $xy = ۰$. فرض کنیم $I = Ann_R(x)$. واضح است که $I \subseteq Z(R)$. حال چون $Z(R)$ متناهی است، لذا I نیز متناهی است. اگر R نامتناهی باشد چون به‌ازای هر $r \in R$، $ry \in I$، لذا عضوی از I مثل i هست به طوری که $J = \{r \in R \mid ry = i\}$ نامتناهی است. پس به‌ازای هر $r, s \in J$، $(r-s)y = i - i = ۰$. در نتیجه $r - s \in Ann(y)$. پس $Ann(y)$ زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $Z(R)$ است و این متناقض با فرض است. تناقض از جایی ناشی شد که فرض کردیم R نامتناهی باشد، لذا فرض خلف باطل است، یعنی R متناهی است.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. گراف $\Gamma(R)$ همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

برهان. فرض کنیم $x, y \in Z(R)^*$ $(x \neq y)$. اگر $xy = 0$، آنگاه $d(x,y) = 1$. پس فرض کنیم $xy \neq 0$. اگر $x^2 = y^2 = 0$، آنگاه $x - xy - y$ مسیری به طول ۲ است، لذا $d(x,y) = 2$. حال اگر $x^2 = 0$ و $y^2 \neq 0$، چون y مقسوم‌علیه صفر R است، لذا عضوی مثل $b \in Z(R)^* \backslash \{x,y\}$ موجود است که $by = 0$. اگر $bx = 0$، آنگاه $x - b - y$ مسیری به طول ۲ است. حال فرض کنیم $bx \neq 0$، آنگاه $x - bx - y$ مسیری به طول ۲ است، لذا در هر حالت $d(x,y) = 2$. به طور مشابه اگر $x^2 \neq 0$ و $y^2 = 0$ حکم نتیجه می‌شود. لذا فرض کنیم x^2، y^2 و xy همگی ناصفر باشند. چون $x, y \in Z(R)^*$، لذا اعضایی مثل $a, b \in Z(R)^* \backslash \{x,y\}$ وجود دارند به طوری که $ax = by = 0$. اگر $a = b$، آنگاه $x - a - y$ مسیری به طول ۲ است. پس فرض کنیم $a \neq b$. اگر $ab = 0$، آنگاه مسیری به طول ۳ به صورت $x - a - b - y$ موجود است، لذا $d(x,y) = 3$. حال اگر $ab \neq 0$، آنگاه $x - ab - y$ مسیری به طول ۲ است، یعنی $d(x,y) = 2$. در نتیجه $\Gamma(R)$ همبند است و $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.

قضیه ۳.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد (R لزوماً یکدار نیست). اگر $\Gamma(R)$ شامل دوری باشد، آنگاه $gr(\Gamma(R)) \leq 4$.

برهان. فرض کنیم $\Gamma(R)$ شامل دوری مانند $x_0 - x_1 - \cdots - x_n - x_0$ باشد و $n \geq 4$. اگر i و j ای موجود باشد که $x_i x_j = 0$، $j > i + 1$ و یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

۱) $0 \leq i < j \leq n - 1$

۲) $1 \leq i < j \leq n$

در این صورت می‌توان با حذف x_k که $i < k < j$، طول دور را کوتاه‌تر کرد. لذا فرض کنیم $\Gamma(R)$ شامل دور $x_0 - x_1 - \cdots - x_n - x_0$ باشد که $n \geq 4$ و به‌ازای هر i و j که در شرایط بالا صدق کنند، $x_i x_j \neq 0$. اگر $x_1 x_{n-1}$ مخالف x_0 و x_n باشد، آنگاه می‌توان دوری به صورت $x_0 - x_1 x_{n-1} - x_n - x_0$

تشکیل داد که طول آن ۳ است. لذا بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنیم $x_1x_{n-1} = x_0$. در نتیجه $x_0^2 = x_0x_1x_{n-1} = 0$. حال اگر عضوی از R مثل y موجود باشد به طوری که $x_0y \notin \{0, x_0\}$، در این صورت $x_0 - x_1 - x_0y - x_0$ دوری به طول ۳ است. بالاخره اگر $Rx_0 = \{0, x_0\}$، آنگاه $Rx_0 \subset Rx_1$، لذا y ای در R هست که $x_1y \notin \{0, x_0, x_1\}$. از طرفی بر طبق فرض $x_0x_2 \neq 0$ ($i = 0$ و $j = 2$)، لذا $x_1y \neq x_2$ (زیرا اگر $x_1y = x_2$، آنگاه $0 \neq x_0x_2 = x_0x_1y = 0$ که چنین چیزی ممکن نیست). پس نتیجه می‌گیریم که دوری به صورت $x_0 - x_1 - x_2 - x_1y - x_0$ به طول ۴ موجود است. پس داریم $gr(\Gamma(R)) \leq 4$.

قضیه‌ی زیر از [8] صورت دیگر از قضیه‌ی ۳.۲ است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $S \subseteq R$ با این خاصیت باشد که به‌ازای هر $r \in R$ و $s \in S$، $rs \in S$. همچنین فرض کنیم x رأسی از یک دور در S باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A_n(x) := \{\text{دورهایی به طول } n \text{ با مرکز } x \text{ در } S\}$$

$$A(x) := \min\{m \mid A_m(x) \neq \emptyset\}$$

در این صورت $3 \leq A(x) \leq 4$. در نتیجه مجموعه‌ی همه‌ی دورهای موجود در S، برابر با اجتماع مجموعه‌ی دورهای به طول ۳ در S و مجموعه‌ی دورهای به طول ۴ در S است، لذا کمر گراف مقسوم‌علیه‌های صفر R برابر با ۳، ۴ یا ∞ است.

برهان. فرض کنیم $A(x) = n$. پس دوری به طول n در S و به مرکز x به صورت $x = x_1 - x_2 - \cdots - x_n - x_{n+1} = x$ موجود است ($n \geq 3$). قرار دهیم $x_0 := x_n$. اگر i ای متعلق به $\{1, 2, n\}$ موجود باشد به طوری که $Rx_i \cap \{x_{i-1}, x_{i+1}\} \neq \emptyset$، در این صورت $l(i)$ را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم.

$$l(i) := \begin{cases} x - x_2 - x_n - x & \text{اگر } i = 1 \\ x - x_2 - x_3 - x & \text{اگر } i = 2 \\ x - x_{n-1} - x_n - x & \text{اگر } i = n \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید که $l(i) \in A_3(x)$، در نتیجه $A(x) = 3$. پس فرض کنیم به‌ازای هر i متعلق به $\{1, 2, n\}$، $Rx_i \cap \{x_{i-1}, x_{i+1}\} = \emptyset$. اگر به‌ازای هر $i \in \{1, 2, n\}$، $Rx_i \subseteq \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\}$. در این صورت به‌ازای هر $i \in \{1, 2, n\}$، $Rx_i = \{x_i, 0\}$. در نتیجه $Rx_2 \cap Rx_n = 0$. در این حالت $x - x_2 - x_n - x$ عضوی از $A_3(x)$ است، یعنی $A(x) = 3$. نهایتاً فرض کنیم i ای از $\{1, 2, n\}$ باشد که $Rx_i \not\subseteq \{x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, 0\}$ پس y ای از Rx_i هست که به $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, 0\}$ تعلق ندارد. حال $l(i, y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$l(i, y) := \begin{cases} x - x_2 - y - x_n - x & \text{اگر } i = 1 \\ x - x_2 - x_3 - y - x & \text{اگر } i = 2 \\ x - y - x_{n-1} - x_n - x & \text{اگر } i = n \end{cases}$$

واضح است که $l(i, y) \in A_4(x)$، در نتیجه $A(x) \leq 4$. حال اگر قرار دهیم $S := Z(R)$، آنگاه واضح است که $A(x) = gr(\Gamma(R))$. پس $3 \leq gr(\Gamma(R)) \leq 4$، یعنی $gr(\Gamma(R)) = 3$ یا ۴ (در صورتی که $\Gamma(R)$ شامل دوری باشد).

لم ۵.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و $T(R)$ حلقه‌ی کامل کسرهای R باشد، آنگاه $diam(\Gamma(R)) = diam(\Gamma(T(R)))$ و $gr(\Gamma(R)) = gr(\Gamma(T(R)))$.

برهان. فرض کنیم $T = T(R)$. واضح است که $diam(\Gamma(T)) = 1$ اگر و تنها اگر $diam(\Gamma(R)) = 1$. پس فرض کنیم $diam(\Gamma(T)) = 2$، لذا اعضایی از T مثل $\frac{x}{s}$، $\frac{y}{s'}$ و $\frac{z}{t}$ وجود دارند به طوری که $\frac{x}{s} - \frac{z}{t} - \frac{y}{s'}$ مسیری به طول ۲ است. در نتیجه $xz = zy = 0$، پس $x - z - y$ مسیری به طول ۲ در گراف $\Gamma(R)$ است، لذا $diam(\Gamma(R)) \geq 2$. حال فرض کنیم $a, b \in Z(R)^*$ $(a \neq b)$ و $ab \neq 0$. پس عضوی مثل $q \in Z(T)^* \backslash \{a, b\}$ موجود است به طوری که $aq = bq = 0$. فرض کنیم $q = \frac{c}{t}$ که $c \in R$ و $t \notin Z(R)$.

در این صورت $ac = bc = \circ$، پس $a-c-b$ مسیری به طول ۲ بین a و b است، لذا $d(a,b) = ۲$. در نتیجه $diam(\Gamma(R)) = ۲$. برهان مشابه نتیجه می‌دهد اگر قطر $\Gamma(R)$ برابر ۲ باشد، آنگاه $diam(\Gamma(T)) = ۲$. حال بر طبق قضیه‌ی ۲.۲، قسمت اول حکم واضح است.

R را می‌توان زیر حلقه‌ای از $T = T(R)$ در نظر گرفت، لذا $\Gamma(R)$ زیرگرافی از $\Gamma(T)$ است و $gr(\Gamma(R)) \geq gr(\Gamma(T))$. حال فرض کنیم $gr(\Gamma(T)) = ۳$. در این صورت دوری به صورت $q_۱ - q_۲ - q_۳ - q_۱$، (به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۳$، $q_i \in T$) در گراف $\Gamma(T)$ موجود است. پس $q_۱q_۲ = q_۲q_۳ = q_۳q_۱ = \circ$. فرض کنیم به‌ازای هر $۱ \leq i \leq ۳$، $q_i = \frac{a_i}{t_i}$ که در آن $t_i \in R\backslash Z(R)$. لذا $a_۱a_۲ = a_۲a_۳ = a_۳a_۱ = \circ$. پس $a_۱ - a_۲ - a_۳ - a_۱$ دوری به طول ۳ در $\Gamma(R)$ است، در نتیجه $gr(\Gamma(R)) = ۳$. به طور مشابه اگر $gr(\Gamma(T)) = ۴$، آنگاه $gr(\Gamma(R)) = ۴$. حال بر طبق قضیه‌ی ۴.۲ حکم واضح است.

حال به تعاریف زیر از [10] و [4] مراجعه می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. دو رأس متمایز a و b از گراف G را عمود بر هم نامیم و به صورت $a \perp b$ نشان می‌دهیم، هرگاه a و b مجاور باشند و هیچ رأسی مثل c موجود نباشد به طوری که با هر دوی a و b مجاور باشد، به عبارت دیگر یال $a - b$ قسمتی از یک مثلث در G نباشد.

تعریف ۷.۲. گراف G را متمم‌دار نامیم هرگاه به‌ازای هر رأس از G مثل a، رأسی از G مثل b باشد که $a \perp b$. b را متمم a نامیم.

تعریف ۸.۲. گراف G را به طور یکتا متمم‌دار نامیم هرگاه اولاً متمم‌دار باشد، ثانیاً اگر $a \perp b$ و $a \perp c$ آنگاه b و c با رئوس مشترکی مجاور باشند.

در قضیه‌ی زیر از [4] نشان می‌دهیم گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(T)$ یکریختند.