دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

تزریقی بودن نسبت به زیرمدول‌های بسته

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض گرایش جبر)

سید ابوالحسن سپهر حسینی

استاد راهنما

دکتر عاطفه قربانی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض گرایش جبر) آقای سید ابوالحسن سپهر حسینی

تحت عنوان

تزریقی بودن نسبت به زیرمدول‌های بسته

در تاریخ ۸ بهمن ۱۳۹۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه　　دکتر عاطفه قربانی

۲– استاد مشاور پایان‌نامه　　دکتر محمود بهبودی

۳– استاد داور ۱　　پروفسور منصور معتمدی (دانشگاه شهید چمران اهواز)

۴– استاد داور ۲　　پروفسور احمد حقانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان نامه مدول‌های c—تزریقی را روی دامنه‌های ددکیند مشخص می‌کنیم. برای این منظور نشان می‌دهیم که اگر R دامنه‌ی ددکیند باشد، آن‌گاه R—مدول X، c—تزریقی است اگر و تنها اگر یک‌ریخت با حاصل‌ضرب مستقیمی از R—مدول‌های نیم‌ساده‌ی همگن و R—مدول‌های تزریقی باشد. همچنین نشان می‌دهیم که دامنه‌ی نوتری جابجایی R ددکیند است اگر و تنها اگر هر R—مدول ساده c—تزریقی باشد.

رده‌بندی موضوعی: ۱۶D۵۰.

کلمات کلیدی: مدول‌های $\mathcal{P}$—خالص—تزریقی، مدول‌های c—تزریقی، ایدآل‌های تقریباً اصلی، دامنه‌های ددکیند.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ پیشگفتار

R—مدول‌های تزریقی برای اولین بار توسط بئر [۲] در سال ۱۹۴۰ معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. بئر آنها را گروه‌های آبلی کامل روی حلقه‌ی R نامید. نام تزریقی اولین بار در مقاله‌ی ایلنبرگ استفاده شد. بئر در مقاله‌اش نشان داد که هر مدول زیرمدول یک مدول تزریقی است. وی ثابت کرد برای R—مدول تزریقی M، هر نگاشت از هر ایدآل R به M را می‌توان به یک نگاشت از R به M گسترش داد که به محک بئر شهرت دارد. بئر همچنین ثابت کرد که یک حلقه نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر مدول روی آن حلقه تزریقی باشد.

در سال ۱۹۵۸متلیس [۱۶] در رساله‌اش ساختار مدول‌های تزریقی روی حلقه‌ی نوتری R را مورد بررسی قرار داد. اما اهمیت مدول‌های تزریقی در نظریه‌ی مدول‌ها به دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ برمی‌گردد. پس از دهه‌ی ۱۹۷۰ مدول‌های تزریقی علاقمندان زیادی پیدا کرد و تعمیم‌های گوناگونی به وجود آمد که به صورت غیر مستقیم از مطالعه‌ی تزریقی‌ها ناشی می‌شود.

تعداد زیادی از نتایج به دست آمده برای مدول‌های تزریقی را می‌توان به آسانی به مدول‌های خود—تزریقی M، با در نظر گرفتن M به عنوان یک مدول تزریقی در رسته $\sigma[M]$ شامل مدول‌های زیر M—تولید شده گسترش داد.

در سال ۱۹۸۰ افرادی همچون هرادا و مولر برای توسعه‌ی این موضوع کار کردند، در اوایل

۱۹۹۴ محققین مدول‌های منبسط را بیشتر مورد بررسی قرار دادند که نتیجه‌ی مهم آن قضیه‌ی اوسوفسکی—اسمیت بود و از آن موقع به دنبال تعمیم‌های گوناگون از آن قضیه هستند.

در سال ۲۰۰۴ سانتا—کلارا و اسمیت [۲۳]، نشان دادند که روی دامنه‌ی ددکیند هر حاصل‌ضرب مستقیم از مدول‌های ساده c—تزریقی هستند. سپس در سال ۲۰۰۹ سانتا—کلارا و اسمیت با همکاری مرموت [۱۸]، مدول‌های c—تزریقی را روی دامنه‌ی ددکیند مشخص کردند که مرجع اصلی این پایان‌نامه است.

این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است. در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی بیان می‌شوند. در فصل دوم R—مدول‌های $\mathcal{P}$—خالص—تزریقی را برای کلاس بزرگی از حلقه‌های R مشخص می‌کنیم. برای این منظور نشان می‌دهیم اگر R حلقه‌ای باشد که R/P، به‌ازای هر ایدآل ابتدایی چپ P، آرتینی باشد، آن‌گاه R—مدول X مدولی $\mathcal{P}$—خالص—تزریقی است اگر و تنها اگر X یک‌ریخت با جمعوند مستقیمی از مدول Y باشد که Y حاصل‌ضرب مستقیمی از مدول‌های ساده و تزریقی است. سپس با در نظر گرفتن زیرمدول‌های متمم نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی R با شرط فوق اگر M یک R—مدول باشد، آن‌گاه هر زیرمدول متمم M زیرمدول $\mathcal{P}$—خالص است. در فصل سوم ایدآل‌های تقریباً اصلی را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم روی دامنه‌ی ددکیند، مدول‌های c—تزریقی با مدول‌های $\mathcal{P}$—خالص—تزریقی معادلند. سپس مدول‌های c—تزریقی را روی دامنه‌ی ددکیند مشخص می‌کنیم. برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر R دامنه‌ی ددکیند باشد آن‌گاه R—مدول X، مدولی c—تزریقی است اگر و تنها اگر R—مدولی مانند Y وجود داشته باشد به‌طوری که Y حاصل‌ضرب مستقیمی از R—مدول‌های ساده و R—مدول‌های تزریقی و همچنین X یک‌ریخت با جمعوند مستقیمی از Y باشد. سپس نشان می‌دهیم که این جمعوند مستقیم، یک‌ریخت با حاصل‌ضرب مستقیمی از R—مدول‌های نیم‌ساده‌ی همگن و R—مدول‌های تزریقی است. سرانجام نشان می‌دهیم که دامنه‌ی نوتری جابجایی R، ددکیند است اگر وتنها اگر هر R—مدول ساده، c—تزریقی باشد.

۱—۲ نمادها و قراردادها

در این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها شرکت پذیر یک‌دار و تمامی مدول‌ها یکانی چپ می‌باشند، مگر این‌که خلاف آن ذکر شود.

(۱) فرض شده است که خواننده با مطالب جبر پیشرفته آشنا باشد.

(۲) فرض کنیم R یک حلقه، A و B مدول‌های دلخواه روی R باشند. در این‌صورت به ترتیب می‌نویسیم $A \leq B$ $(A < B)$، $A \leq_e B$، $A \ll B$ هرگاه متناظراً A یک زیرمدول (سره‌ی) B، A یک

زیرمدول اساسی B، A یک زیرمدول کوچک از B باشد.

(۳) نگاشت‌های ι و I به ترتیب بیانگر نگاشت‌های شمول و همانی هستند.

(۴) برخی از قضایای کتاب‌های [۱۳] و [۲۸]، برای آشنایی بیشتر خوانندگان با ذکر برهان بیان شده است.

۱ــ۳ مدول‌ها و حلقه‌های نیم‌ساده

تعریف **۱.۱** مدول (چپ) M روی حلقه‌ی R را ساده گوییم هرگاه $M \neq 0$ و M زیرمدول سره‌ی ناصفر نداشته باشد.

حلقه‌ی ناصفر R ساده است هرگاه R ایدآل (دوطرفه‌ی) سره نداشته باشد.

تعریف **۲.۱** فرض کنیم R یک حلقه باشد. Rــمدول (چپ) M را نیم‌ساده گوییم هرگاه هر Rــزیرمدول M، یک جمعوند مستقیم آن باشد.

تذکر **۳.۱** اگر $K \leq N \leq M$ زنجیری از مدول‌ها روی حلقه‌ی R و همچنین K یک جمعوند مستقیم M باشد، آن‌گاه K یک جمعوند N است.

اثبات. فرض کنیم K' زیرمدولی از M باشد به‌طوری که $M = K \oplus K'$. در این‌صورت ادعا می‌کنیم $N = K \oplus (N \cap K')$. می‌دانیم که

$$N = N \cap M = N \cap (K + K') = K + (N \cap K').$$

از طرف دیگر اگر $x \in K \cap (N \cap K')$، آن‌گاه $x \in K \cap K' = 0$ و نتیجه حاصل می‌شود. ■

نتیجه **۴.۱** اگر N یک زیرمدول Rــمدول نیم‌ساده‌ی M باشد، آن‌گاه N نیم‌ساده است.

اثبات. فرض کنیم N زیرمدولی از Rــمدول M باشد. در این‌صورت برای هر زیرمدول L از N، زیرمدول L' از M وجود دارد که $M = L \oplus L'$ و با توجه به تذکر ۳.۱، داریم $N = L \oplus (N \cap L')$. در نتیجه N نیم‌ساده است. ■

نتیجه **۵.۱** اگر L زیرمدول R—مدول نیم‌ساده‌ی M باشد، آن‌گاه M/L نیز R—مدول نیم‌ساده است.

اثبات. زیرمدول L' از M وجود دارد که $M = L \oplus L'$. پس $M/L \cong L' \leq M$ و با توجه به نیم‌ساده بودن L'، نتیجه حاصل می‌شود. ■

لم **۶.۱** هر R—مدول چپ نیم‌ساده‌ی ناصفر M، شامل حداقل یک زیرمدول ساده است.

اثبات. به مرجع [۱۳]، لم ۳.۲ مراجعه شود. ■

لم **۷.۱** برای هر R—مدول چپ M، شرایط زیر معادلند.

(۱) M نیم‌ساده است.

(۲) M حاصل‌جمع مستقیم خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده است.

(۳) M حاصل‌جمع خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده است.

اثبات. به مرجع [۱۳]، قضیه ۴.۲ مراجعه شود. ■

قضیه **۸.۱** برای حلقه‌ی R شرایط زیر معادلند.

(۱) همه‌ی دنباله‌های دقیق کوتاه از R—مدول‌ها شکافته می‌شوند.

(۲) همه‌ی R—مدول‌های چپ نیم ساده هستند.

(۳) همه‌ی R—مدول‌های چپ متناهی تولید نیم ساده هستند.

(۴) همه‌ی R—مدول‌های چپ دوری نیم ساده هستند.

(۵) R به‌عنوان R—مدول چپ نیم‌ساده است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنیم B مدولی روی R و A زیرمدول B باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم که A یک جمعوند مستقیم B است. دنباله‌ی دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} B/A \longrightarrow \circ$ را در نظر می‌گیریم که با توجه به قسمت (۱) شکافته می‌شود. پس همریختی R—مدولی $h : B \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری که $h\iota = ۱_A$. قرار می‌دهیم $A' = \ker h$ و ادعا می‌کنیم $B = A \oplus A'$. می‌دانیم $A + A' \subseteq B$. از طرف دیگر فرض کنیم $b \in B$، نشان می‌دهیم $b = b - h(b) + h(b) \in A + A'$. چون $h(b) \in A$ و $h\iota(A) = A$، پس $h(h(b)) = h(b)$ و لذا

$$h(b - h(b)) = h(b) - h(h(b)) = \circ.$$

بنابراین $b-h(b) \in \ker h = A'$ و $b = b - h(b) + h(b) \in A + A'$. در نتیجه $B = A + A'$.

سرانجام نشان می‌دهیم که $A \cap A' = \{0\}$. فرض کنیم $b \in A \cap A'$، در این‌صورت $b \in \ker h = A'$ و $h(b) = 0$. از طرف دیگر $h\iota(b) = 1_A(b) = b$، پس $b = h(b) = 0$ و در نتیجه $A \cap A' = \{0\}$.

(۲) ⇐ (۱). دنباله‌ی دقیق کوتاه دلخواه $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ از R−مدول‌ها را در نظر می‌گیریم. $f(A)$ زیرمدول B است، پس با توجه به قسمت (۲)، زیرمدول K از B وجود دارد که $B = f(A) \oplus K$. چون f تک‌ریختی است، لذا $B \cong A \oplus K$. حال ادعا می‌کنیم که $K \cong C$. داریم $K \cong B/f(A)$، لذا $B/\ker g \cong K$. از طرف دیگر $B/\ker g \cong C$. پس $K \cong C$ و $B \cong A \oplus C$. در نتیجه دنباله‌ی دقیق کوتاه فوق شکافته می‌شود.

(۲) ⇐ (۳) ⇐ (۴) ⇐ (۵). بدیهی است.

(۵) ⇐ (۲). فرض کنیم M مدولی روی R باشد. می‌دانیم که $M = \sum\limits_{m \in M} Rm$. از طرف دیگر برای هر $m \in M$، داریم $Rm = R/\mathrm{Ann}(m)$ و چون R، به‌عنوان مدول چپ نیم‌ساده است، پس Rm نیم‌ساده و حاصل‌جمع خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده می‌باشد. یعنی $Rm = \sum\limits_{i \in I_m} S_i$ که برای هر $i \in I_m$، S_i زیرمدول ساده است. در نتیجه

$$M = \sum_{m \in M} \sum_{i \in I_m} S_i.$$

یعنی M نیم‌ساده است. ■

تعریف ۹.۱ هرگاه حلقه‌ی R در یکی از شرایط فوق صدق کند، آن را حلقه‌ی نیم‌ساده می‌نامیم.

نتیجه ۱۰.۱ حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی چپ R، نوتری چپ و آرتینی چپ است.

اثبات. به مرجع [۱۳]، نتیجه‌ی ۶.۲ مراجعه شود. ■

۱−۴ رادیکال جیکوبسن

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت اشتراک تمام ایدآل‌های چپ ماکزیمال R را رادیکال جیکوبسن R گوییم و آن را با $\mathrm{Rad}(R)$ یا $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۲.۱ برای حلقه‌ی R، مجموعه‌های زیر با هم برابرند.

(۱) اشتراک تمام ایدآل‌های چپ ماکزیمال

(۲) اشتراک تمام ایدآل‌های راست ماکزیمال

(۳) اشتراک تمام پوچ‌سازهای R—مدول‌های چپ ساده

(۴) اشتراک تمام پوچ‌سازهای R—مدول‌های راست ساده

اثبات. به مرجع [۱۳]، نتیجه‌های ۲.۴ و ۵.۴ مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۳.۱ فرض کنیم M مدولی روی حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های ماکزیمال از M را رادیکال جیکوبسن M گوییم و آن را با $\mathrm{Rad}(M)$ یا $J(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم $\mathcal{U}$ کلاسی از مدول‌ها باشد. در این‌صورت مدول M را (متناهی) هم—تولید شده توسط $\mathcal{U}$ گوییم هرگاه یک مجموعه‌ی اندیس‌گذاری شده‌ی (متناهی) مانند $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ در $\mathcal{U}$ و تک‌ریختی $\circ \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ وجود داشته باشد.

لم ۱۵.۱ فرض کنیم M یک مدول چپ روی حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $Rad(M) = \circ$ اگر و تنها اگر M هم‌تولید شده توسط کلاسی از مدول‌های ساده باشد.

اثبات. به مرجع [۱]، گزاره‌ی ۱۶.۹ مراجعه شود. ■

لم ۱۶.۱ فرض کنیم R حلقه و M یک R—مدول باشد. در این‌صورت $Rad(M/Rad(M)) = \circ$.

اثبات. فرض کنیم $x + \mathrm{Rad}(M)$ یک عضو دلخواه $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M))$ باشد. در این‌صورت هر زیرمدول ماکزیمال $M/\mathrm{Rad}(M)$، شامل $x + \mathrm{Rad}(M)$ است. می‌دانیم که زیرمدول‌های ماکزیمال $M/\mathrm{Rad}(M)$، به شکل $M'/\mathrm{Rad}(M)$ هستند که M' زیرمدول ماکزیمال M می‌باشد. پس برای هر زیرمدول ماکزیمال M' از M داریم $x+\mathrm{Rad}(M) \in M'/\mathrm{Rad}(M)$ و لذا $x \in M'$. بنابراین $x \in \mathrm{Rad}(M)$ و $x + \mathrm{Rad}(M) = \circ$. ■

نتیجه ۱۷.۱ برای هر R—مدول M، مدول $M/Rad(M)$ هم‌تولید شده توسط R—مدول‌های چپ ساده است.

تعریف ۱۸.۱ حلقه‌ی R را J—نیم‌ساده گوییم هرگاه $\mathrm{Rad}(R) = ۰$.

قضیه ۱۹.۱ شرایط زیر برای حلقه‌ی R معادلند.

(۱) R نیم‌ساده است.

(۲) R، J—نیم‌ساده و آرتینی چپ است.

(۳) R، J—نیم‌ساده است و دارای شرط زنجیر کاهشی روی ایدآل‌های چپ اصلی است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). ابتدا نشان می‌دهیم که اگر R نیم‌ساده باشد، آن‌گاه هر ایدآل چپ R به‌صورت Re است به‌طوری که e عنصر خودتوان R می‌باشد. فرض کنیم L ایدآل چپ دلخواهی از R باشد، در این‌صورت ایدآل چپی مانند K از R وجود دارد که $R = L \oplus K$. حلقه‌ی R یک‌دار است، پس عناصر $l \in L$ و $k \in K$ وجود دارند که $۱ = l + k$. L ایدآل چپ است، بنابراین $Rl \subseteq L$. از طرف دیگر فرض کنیم $l_۰$ عضو دلخواهی از L باشد، در این‌صورت $l_۰ = l_۰ l + l_۰ k$. پس

$$l_۰ - l_۰ l = l_۰ k \in K \cap L = ۰.$$

لذا $l_۰ = l_۰ l \in Rl$ و در نتیجه $L = Rl$. حال نشان می‌دهیم l خودتوان است. داریم $l = l^۲ + lk$، پس $l - l^۲ = lk \in K \cap L = ۰$ و در نتیجه $l = l^۲$.

حال فرض کنیم R، نیم‌ساده باشد. می‌دانیم که $J = J(R)$ ایدآل R است، پس ایدآل چپی مانند B از R وجود دارد که $R = J \oplus B$. با توجه به بحث فوق عناصر خودتوان e و f از R وجود دارند که $B = Rf$ و $J = Re$ و همچنین $۱ = e + f$. بنابراین $f = ۱ - e$ و از طرف دیگر $f = f^۲$، پس $f(۱ - f) = ۰$. حال چون f یکه است داریم $f = ۱$ و در نتیجه $e = ۰$ و $J = Re = ۰$. پس R حلقه‌ی J—نیم‌ساده و آرتینی چپ است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳). واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱). اگر شرط (۳) را برای R داشته باشیم، آن‌گاه R در دو شرط زیر نیز صدق می‌کند.

(الف) هر ایدآل چپ ناصفر A از R، شامل یک ایدآل چپ مینیمالی مانند I می‌باشد. برای اثبات آن Ω را مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های چپ اصلی ناصفر مشمول در A در نظر می‌گیریم. این مجموعه

ناتهی است. چون $0 \neq a \in A$ وجود دارد و $(a) \in \Omega$. از طرف دیگر R دارای شرط زنجیر کاهشی روی ایدآل‌های چپ اصلی است، پس Ω دارای عضو مینیمالی چون I می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که I، ایدآل چپ مینیمال R است. اگر ایدآل چپ ناصفری مانند K از R وجود داشته باشد که $K \subseteq I \subseteq A$، آن‌گاه ایدآل اصلی ناصفری مانند L وجود دارد که $L \subseteq K \subseteq I \subseteq A$ و با مینیمالی I درتناقض است. بنابراین I ایدآل مینیمال چپ R می‌باشد.

(ب) هر ایدآل چپ مینیمال B، یک جمعوند مستقیم R، به‌عنوان $R-$مدول چپ است. برای اثبات (ب)، توجه کنیم که $J(R) = 0 \neq B$. پس ایدآل ماکزیمالی چون M وجود دارد که $B \nsubseteq M$. ادعا می‌کنیم که $B \cap M = 0$. اگر $B \cap M \neq 0$، آن‌گاه عنصر $0 \neq y \in B \cap M$ وجود دارد. پس $(y) \subseteq B$ و $(y) \subseteq M$ و چون B مینیمال است، لذا $B = (y) \subseteq M$، که تناقض است. بنابراین $B \cap M = 0$ و $R = B \oplus M$.

حال برای اثبات (۳) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم R نیم‌ساده نباشد. در این‌صورت ایدآل چپ می‌نیمال B_1 را در نظر می‌گیریم. طبق (ب)، ایدآل B_1 جمعوند مستقیمی از R است. پس ایدآل $A_1 \neq 0$ وجود دارد که $R = B_1 \oplus A_1$. از طرف دیگر با توجه به قسمت (الف)، ایدآل چپ مینیمال B_2 وجود دارد که $B_2 \subseteq A_1$. همچنین B_2 جمعوند مستقیمی از R است، بنابراین می‌توان نوشت $A_1 = B_2 \oplus A_2$. با ادامه‌ی این روند به زنجیر زیر از ایدآل‌های چپ می‌رسیم

$$A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq A_3 \supsetneqq \cdots.$$

اگر $i \in \mathbb{N}$ای وجود داشته باشد که $A_i = A_{i+1}$، آن‌گاه $B_{i+1} = 0$ که تناقض است. پس زنجیر فوق نمی‌ایستد. از طرف دیگر به ازای هر i، ایدآل چپ A_i جمعوند مستقیم R است و طبق برهان (۱) $\Leftarrow$ (۳)، اصلی می‌باشد. ولی این با شرط زنجیر کاهشی روی ایدآل‌های چپ اصلی در تناقض است. در نتیجه R نیم‌ساده می‌باشد. $\blacksquare$

تعریف ۲۰.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت زیرمدول N از $R-$مدول M را کوچک گوییم ($K \ll M$) هرگاه به‌ازای هر زیرمدول L از M، اگر $K + L = M$، آن‌گاه $L = M$.

گزاره ۲۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M یک $R-$مدول چپ باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned} Rad(M) &= \bigcap\{K \leq M : \text{ماکزیمال است } M \text{ در } K\} \\ &= \sum\{L \leq M : \text{کوچک است } M \text{ در } L\}. \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم زیرمدول L در M کوچک باشد. در این‌صورت اگر زیرمدول ماکزیمال از M مانند K وجود داشته باشد که $L \nleq K$، آن‌گاه $L + K = M$ و کوچک بودن L ایجاب می‌کند $K = M$ که تناقض است. لذا هر زیرمدول کوچک از M مشمول در $\mathrm{Rad}(M)$ می‌باشد.

فرض کنیم $x \in M$. در این‌صورت گر $N \leq M$ به‌طوری که $Rx + N = M$، آن‌گاه یا $N = M$ و یا این‌که زیرمدول ماکزیمال K از M وجود دارد که $N \leq K$ و $x \notin K$. اگر $x \in \mathrm{Rad}(M)$، آن‌گاه حالت دوم اتفاق نمی‌افتد پس $N = M$ و در نتیجه Rx در M کوچک است. ■

۱—۵ حلقه‌های اول و ابتدایی

تعریف **۲۲.۱** ایدآل P از حلقه‌ی R را اول گوییم هرگاه $P \neq R$ و برای ایدآل‌های A و B از R اگر $AB \subseteq P$، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف **۲۳.۱** زیرمجموعه‌ی ناتهی S حلقه‌ی R را m—سیستم گوییم هرگاه برای هر $a, b \in S$ عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $arb \in S$.

به سادگی نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه **۲۴.۱** ایدآل P از حلقه‌ی R اول است اگر و تنها اگر $R \backslash P$، یک m—سیستم باشد.

گزاره **۲۵.۱** فرض کنیم زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R یک m—سیستم باشد. در این‌صورت اگر ایدآل P نسبت به قطع نکردن S ماکزیمال باشد، آن‌گاه P یک ایدآل اول است.

اثبات. به مرجع [۱۳]، گزاره‌ی ۵.۱۰ مراجعه شود. ■

تعریف **۲۶.۱** برای ایدآل A از حلقه‌ی R تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{A} = \{s \in R : \text{هر } m-\text{سیستم شامل } s\text{، ایدآل } A \text{ را قطع کند}\}$$
$$\subseteq \{s \in R : s^n \in A \text{ عدد طبیعی } n \geqslant 1 \text{ وجود داشته باشد که}\}$$

در حلقه‌های جابجایی " $\subseteq$ " تبدیل به تساوی می‌شود.

قضیه **۲۷.۱** برای حلقه‌ی R و ایدآل A از آن، $\sqrt{A}$ برابر با اشتراک تمام ایدآل‌های اول شامل A می‌باشد. در اصل $\sqrt{A}$ یک ایدآل A است.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $s \in \sqrt{A}$ و ایدآل P اول و شامل A باشد. در این‌صورت $R\backslash P$ یک m—سیستم است که اگر s را شامل شود، آن‌گاه با توجه به تعریف $\sqrt{A}$، ایدآل A را قطع می‌کند که تناقض است. پس $s \notin R\backslash P$ و بنابراین $s \in P$.

برعکس. فرض کنیم s متعلق به اشتراک تمام ایدآل‌های اول شامل A باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم $s \in \sqrt{A}$. اگر $s \notin \sqrt{A}$، آن‌گاه با توجه به تعریف $\sqrt{A}$، یک m—سیستم مانند S شامل s وجود دارد که A را قطع نمی‌کند. با استفاده از لم تسورن ایدآل P شامل A وجود دارد که نسبت به قطع نکردن S ماکزیمال است. لذا با توجه به گزاره‌ی ۲۵.۱، P ایدآل اول شامل A است و $s \notin P$ که تناقض است. لذا فرض $s \notin \sqrt{A}$ نادرست می‌باشد و $s \in \sqrt{A}$. ■

تعریف **۲۸.۱** ایدآل C از حلقه‌ی R را نیم‌اول گوییم هرگاه برای هر ایدآل A از R، اگر $A^۲ \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$. (هر ایدآل اول، نیم‌اول می‌باشد.)

گزاره **۲۹.۱** برای ایدآل C از حلقه‌ی R شرایط زیر معادلند.

(۱) ایدآل C نیم‌اول است.

(۲) برای $a \in R$، اگر $(a)^۲ \subseteq C$، آن‌گاه $a \in C$.

(۳) برای $a \in R$، اگر $aRa \subseteq C$، آن‌گاه $a \in C$.

(۴) برای هر ایدآل چپ A از R، اگر $A^۲ \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

$'$(۴) برای هر ایدآل راست A از R، اگر $A^۲ \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

اثبات. به مرجع [۱۳]، گزاره‌ی ۹.۱۰ مراجعه شود. ■

تعریف **۳۰.۱** زیر مجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را $n-$سیستم گوییم هرگاه برای هر $a \in S$، عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $ara \in S$.

به‌سادگی نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه **۳۱.۱** ایدآل C از حلقه‌ی R نیم‌اول است اگر و تنها اگر $R\backslash C$، یک $n-$سیستم باشد.

لم **۳۲.۱** فرض کنیم N یک $n-$سیستم از حلقه‌ی R باشد و $a \in N$. در این‌صورت $m-$سیستم M، مشمول در N وجود دارد به‌طوری که $a \in M$.

اثبات. به مرجع [۱۳]، لم ۱۰.۱۰ مراجعه شود. ■

قضیه **۳۳.۱** برای هر ایدآل C از حلقه‌ی R شرایط زیر معادلند.

(۱) C ایدآل نیم‌اول است.

(۲) C اشتراکی از ایدآل‌های اول است.

(۳) $C = \sqrt{C}$.

اثبات. (۳) $\Leftarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۱). واضح است.

(۱) $\Leftarrow$ (۳). می‌دانیم که $C \subseteq \sqrt{C}$. نشان می‌دهیم $\sqrt{C} \subseteq C$. فرض کنیم $x \in \sqrt{C}$ و $x \notin C$، در این‌صورت از آن‌جا که C نیم‌اول است، پس $R\backslash C$ یک $n-$سیستم شامل x است. لذا $m-$سیستمی مانند M، شامل x وجود دارد که $M \subseteq R\backslash C$. بنابراین M ایدآل C را قطع نمی‌کند و با توجه به تعریف، $x \notin \sqrt{C}$ که تناقض است. پس $\sqrt{C} \subseteq C$ و در نتیجه $C = \sqrt{C}$. ■

نتیجه **۳۴.۱** برای هر ایدآل C از حلقه‌ی R، ایدآل $\sqrt{C}$ کوچک‌ترین نیم‌اول شامل C است.

تعریف **۳۵.۱** حلقه‌ی R را اول (نیم‌اول) گوییم هرگاه ایدآل (۰) در آن اول (نیم‌اول) باشد.

لم ۳۶.۱ فرض کنیم A یک ایدآل چپ مینیمال از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت $A^{۲} = \circ$ یا عنصر خودتوان e در A وجود دارد که $A = Re$.

اثبات. به مرجع [۱۳]، لم ۲۴.۱۰ مراجعه شود. ■

نتیجه ۳۷.۱ اگر A یک ایدآل چپ مینیمال از حلقه‌ی نیم‌اول R باشد، آن‌گاه عنصر خودتوان e در A وجود دارد که $A = Re$.

اثبات. با توجه به لم فوق واضح است. ■

قضیه ۳۸.۱ شرایط زیر برای حلقه‌ی R معادلند.

(۱) R نیم‌ساده است.

(۲) R نیم‌اول و آرتینی چپ است.

(۳) R نیم اول و دارای شرط زنجیر کاهشی روی ایدآل‌های چپ اصلی است.

اثبات. کافی‌ست که (۳) ⇐ (۱) را ثابت می‌کنیم. برهان قضیه‌ی ۱۹.۱ را به‌کار می‌بریم. از شرط J—نیم‌ساده فقط برای نشان دادن شرط (ب) استفاده کردیم که حلقه‌ی نیم‌اول با توجه به نتیجه‌ی فوق، دارای شرط (ب) در برهان قضیه‌ی ۱۹.۱ می‌باشد. پس همان برهان صادق است. ■

تعریف ۳۹.۱ حلقه‌ی R را نیم‌ابتدایی گوییم هرگاه J—نیم‌ساده باشد ($\mathrm{Rad}(R) = \circ$).

لم ۴۰.۱ حلقه‌ی R نیم‌ابتدایی است اگر و تنها اگر یک R—مدول چپ نیم‌ساده‌ی وفادار وجود داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم R—مدول چپ نیم‌ساده‌ی وفادار M وجود داشته باشد. در این‌صورت از آن‌جا که $\mathrm{Rad}(R)$ تمام R—مدول‌های ساده‌ی چپ را صفر می‌کند، پس $\mathrm{Rad}(R)M = \circ$. وفادار بودن M ایجاب می‌کند که $\mathrm{Rad}(R) = \circ$.

برعکس، فرض کنیم $\mathrm{Rad}(R) = \circ$ و همچنین $\{M_i\}$ مجموعه‌ی تمام R—مدول‌های چپ ساده باشد که باهم یک‌ریخت نیستند. در این‌صورت $M = \bigoplus_i M_i$ نیم‌ساده است و

$$\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_i \mathrm{Ann}(M_i) = \mathrm{Rad}(R) = \circ.$$

■

تعریف ۴۱.۱ حلقه‌ی R را ابتدایی چپ گوییم هرگاه دارای یک مدول چپ ساده‌ی وفادار باشد.
ایدآل A از حلقه‌ی R را ابتدایی چپ گوییم هرگاه حلقه‌ی R/A ابتدایی چپ باشد.

گزاره ۴۲.۱ ایدآل A از حلقه‌ی R، ابتدایی چپ است اگر و تنها اگر A پوچ‌ساز یک R−مدول چپ ساده باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$). فرض کنیم $A = \text{Ann}(M)$ که M یک مدول چپ ساده روی R باشد. در این‌صورت M به‌عنوان R/A−مدول نیز ساده و وفادار است. چون هر R/A−زیرمدول M، R−زیرمدول M نیز می‌باشد. لذا A ابتدایی می‌باشد.

($\Leftarrow$). فرض کنیم R/A، حلقه‌ی ابتدایی چپ و M یک R/A−مدول چپ ساده‌ی وفادار باشد. در این‌صورت M یک R−مدول است و اگر M' یک R−زیرمدول ناصفر سره‌ی M باشد، آن‌گاه $A \subseteq \text{Ann}(M')$. لذا M'، یک R/A−زیرمدول M نیز می‌باشد که تناقض است. پس M ساده می‌باشد و $\text{Ann}(M) = A$. ■

نتیجه ۴۳.۱ رادیکال جیکوبسن R برابر با اشتراک تمام ایدآل‌های ابتدایی چپ R می‌باشد.

گزاره ۴۴.۱ (۱) حلقه‌ی ساده‌ی R ابتدایی چپ (و نیز راست) می‌باشد.
(۲) هر حلقه‌ی ابتدایی چپ، نیم‌ابتدایی و اول است.

اثبات. (۱). حلقه‌ی R یک‌دار است، پس دارای ایدآل ماکزیمالی چون I می‌باشد. R/I، یک R−مدول چپ ساده است. از طرف دیگر $\text{Ann}(R/I)$، ایدآلی از حلقه‌ی ساده‌ی R می‌باشد و شامل عنصر ۱ از حلقه نیست، لذا $\text{Ann}(R/I) = 0$ و R/I، مدول وفادار است.

(۲). نیم‌ابتدایی بودن R از تعریف واضح است. فرض کنیم M یک R−مدول چپ ساده‌ی وفادار باشد، در این‌صورت اگر A ایدآل ناصفری از R باشد، آن‌گاه AM، یک R−زیرمدول از M است. وفاداری M ایجاب می‌کند که $AM \neq 0$. از طرف دیگر M ساده است، لذا $AM = M$. اگر B ایدآل ناصفر دیگری از R باشد، آن‌گاه

$$(BA)M = B(AM) = BM = M.$$

بنابراین $BA \neq ۰$ و در نتیجه حلقه‌ی R، اول می‌باشد. ■

گزاره ۴۵.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. در این‌صورت

(۱) R نیم‌ساده است $\Leftrightarrow$ R نیم‌ابتدایی است $\Leftrightarrow$ R نیم‌اول است.

(۲) R ساده است $\Leftrightarrow$ R ابتدایی چپ (راست) است $\Leftrightarrow$ R اول است.

اثبات. (۱). با توجه به قضایای ۱۹.۱ و ۳۸.۱ واضح است.

(۲). با توجه به گزاره‌ی فوق کافی‌ست نشان دهیم که اگر R اول باشد، آن‌گاه R ساده است. با توجه به قسمت (۱)، حلقه‌ی R نیم‌ساده و در نتیجه حاصل‌جمع مستقیمی از ایدآل‌های ساده است. اگر A و B ایدآل‌های ساده و مجزا از R در این حاصل‌جمع مستقیم باشند، آن‌گاه $AB \subseteq A \cap B = ۰$. پس $AB = ۰$ که با اول بودن R در تناقض است. در نتیجه R ساده می‌باشد. ■

گزاره ۴۶.۱ حلقه‌ی جابجایی R ابتدایی چپ است اگر و تنها اگر میدان باشد.

اثبات. اگر R میدان باشد، آن‌گاه به‌وضوح ابتدایی چپ است. حال فرض کنیم R حلقه‌ی جابجایی و ابتدایی چپ و M یک $R-$مدول چپ ساده‌ی وفادار باشد، در این‌صورت با توجه به جابجایی بودن R، ایدآل ماکزیمال I وجود دارد که $M \cong R/I$. داریم $IM = ۰$، پس $I = ۰$ و بنابراین R، میدان است. ■

۱—۶ زیرمدول‌های اساسی

تعریف ۴۷.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرمدول N از $R-$مدول M را اساسی در M گوییم و با $N \leq_e M$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر K از M داشته باشیم $N \bigcap K \neq ۰$.

تعریف ۴۸.۱ برای هر زیرمدول L از $R-$مدول M و $m \in M$ تعریف می‌کنیم:

$$Lm^{-۱} = \{r \in R : rm \in L\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $Lm^{-۱}$ یک ایدآل چپ R است.