دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

نیم‌ضرب‌های داخلی و کاربردهای آن

Semi-Inner Products and Applications

استاد راهنما

دکتر محمد جانفدا

استاد مشاور

دکتر علی اکبر عارفی جمال

پژوهشگر

ربابه معظمیان

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: معظمیان نام: ربابه

عنوان: نیم‌ضرب‌های داخلی و کاربردهای آن Semi-Inner Products and Applications

---

استاد راهنما: دکتر محمد جانفدا
استاد مشاور: دکتر علی اکبر عارفی جمال

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: حکیم سبزواری دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۹۱

واژگان کلیدی: نگاشت دوگانی نرمال شده، هموار، اکیدا محدب، تظریف، نیم‌ضرب داخلی تعمیم یافته

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا نیم‌ضرب داخلی به‌مفهوم لومر و گیلس و نیم‌ضرب‌های بالایی و پایینی و دو نگاشت وابسته به آن‌ها که نرم را از یک فضای نرمدار حقیقی تولید می‌کنند معرفی می‌کنیم. هم‌چنین تعریفی از نیم‌ضرب داخلی تعمیم یافته به‌وسیله رابطه آن‌ها با نگاشت‌هایی از فضای برداری نرمدار به فضای دوگان آن هدف ما است. سپس نمایش ریس از توابع خطی پیوسته را به‌وسیله نیم‌ضرب داخلی تعمیم یافته مطالعه می‌کنیم.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر محمد جانفدا، که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

هم‌چنین از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به بهترین نحو اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.

هم‌چنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر قدیر صادقی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و ستایش می‌کنم وجود مقدسش را که اگر دعاهای خیر ایشان نبود قطعا من به این مرحله نمی‌رسیدم. و از برادران عزیزم و خواهر عزیزتر از جانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند تشکر می‌کنم.

ربابه معظمیان

۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم نیم‌ضرب داخلی هم از نظر تئوری و هم از جنبه‌های کاربردی حائز اهمیت است. نیم‌ضرب داخلی به مفهوم لومر [۲] [۱۳] و گیلس [۳] [۹] در سال ۱۹۶۱ توسط لومر معرفی شد و خواص اساسی آن توسط گیلس مورد بررسی قرار گرفت. مطالعات بیشتری روی این بحث توسط میلچیچ [۴] [۱۴] - [۲۳] و روشکا [۵] [۲۶] و نات [۶] [۲۴] و سایرین انجام پذیرفت.
هدف از این پایان‌نامه پس از تعریف انواعی از نیم‌ضرب‌های داخلی و بررسی خواص مقدماتی آن‌ها، بررسی توابعی متناظر با این نیم‌ضرب‌ها به نام نیم‌ضرب‌های بالایی و پایینی است.
این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است. ابتدا فصل اول را با بیان مفاهیم مورد نیاز در مورد فضاهای نرمدار و فضاهای باناخ و سپس معرفی ضرب داخلی شروع می‌کنیم و به بیان قضایا و تعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌پردازیم. در فصل دوم به معرفی نیم‌ضرب داخلی به مفهوم لومر و گیلس و نیم‌ضرب داخلی بالایی و پایینی و خواص مقدماتی آن‌ها می‌پردازیم و هم‌چنین روابط‌شان را با نگاشت دوگانی بیان می‌کنیم و به کمک توابع مطرح شده در فضاهای نیم‌ضرب داخلی برخی نامساوی‌ها را بهبود خواهیم داد. و در فصل آخر تعمیمی از نیم‌ضرب داخلی را بیان می‌کنیم.
این پایان‌نامه برگرفته از مقالات زیر است:

1. S. S. Dragomir and J. J. Koliha, *Two mappings related to semi- inner products and their applications in geometry of normed linear spaces*, Rgmia, Res. Rep. col. 2 (1) (1999), 21 - 35.

2. H. Zhang, and J. Zhang, *Generalized semi- inner products with applications to regularized learning*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), 181 - 196.

---
[۲] Lumer
[۳] Giles
[۴] Miliĉić
[۵] Rosca
[۶] Nath

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل سعی شده به اختصار برخی از تعاریف و قضایایی که در ادامه کاربرد دارند، یادآوری شوند. مفاهیم این فصل را می‌توان در بسیاری از مراجع آنالیزحقیقی و یا آنالیزتابعی مقدماتی نظیر [۱] یافت.

۱.۱ فضاهای نرمدار و باناخ

در این بخش به معرفی فضاهای نرمدار، فضای باناخ، توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره و برخی از قضایای مشهور و مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X فضایی برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، در این صورت تابع

$$\| \, . \, \| : X \to [\circ, \infty)$$

یک نرم نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند

۱. $\| x \| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲. $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$،

۳. $\| x + y \| \leq \| x \| \| y \|$.

فضای برداری X روی میدان $\mathbb{K}$ را یک فضای نرمدار گویند، اگر یک نرم $\| \, . \, \|$ روی X وجود داشته باشد. اگر X یک فضای نرمدار باشد، آن‌گاه $d(x, y) = \| x - y \|$ یک متر روی X تعریف می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱. فضای باناخ یک فضای نرمدار است که با متر تعریف شده توسط نرم، کامل [۱] باشد. فضای باناخی که میدان اسکالر آن، حقیقی باشد را فضای باناخ حقیقی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $(X, \| . \|)$ و $(Y, \| . \|)$ دو فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، نگاشت خطی $T : X \to Y$ را یک نگاشت خطی کراندار [۲] می‌نامیم، اگر

$$\sup_{x\neq \circ} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} < \infty$$

در این حالت نرم عملگر T، $\| T \|$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\| T \| = \sup_{x\neq \circ} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}$$

می‌دانیم برای نگاشت خطی $T : X \to Y$ کراندار بودن با پیوستگی در یک نقطه و یا پیوستگی یکنواخت معادل است.

مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار $T : X \to Y$ را با $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم، به‌علاوه $B(X, X)$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

هر تبدیل خطی $f : X \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی نامیده می‌شود. مجموعه تمام تابعک‌های خطی روی X را با X^* نشان می‌دهیم و فضای دوگان [۳] نامیده می‌شود، به‌عبارت دیگر $X^* = B(X, \mathbb{C})$ و هم‌چنین اعضای X^* را با x^* و فضای $B(X^*, \mathbb{C})$ را با X^{**} نمایش می‌دهیم. X^* را دوگان اول X و X^{**} را دوگان دوم X می‌نامیم. به‌علاوه اثر تابعک خطی x^* از X^* را بر x با نماد $\langle x^*, x\rangle$ نمایش خواهیم داد.

تعریف ۴.۱.۱. (توپولوژی ضعیف). فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی τ روی X که هر $f \in X^*$ نسبت به τ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X گویند و آن‌را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهند. در واقع تمام مجموعه‌های به شکل

$$U(f, x_\circ, \epsilon) = \{x \in X \big| \mid f(x) - f(x_\circ) \mid < \epsilon\}, \qquad f \in X^*, x_\circ, \epsilon > \circ \qquad (۱.۱)$$

تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف روی X می‌دهند. X به همراه توپولوژی ضعیف را گاهی با (X, wk) نشان می‌دهیم.

---
[۱] Complete
[۲] Bounded Linear Mapping
[۳] Dual space

گزاره ۵.۱.۱. *دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرمدار X همگرای ضعیف به x است اگر و فقط اگر برای هر $f \in X^*$ داشته باشیم*

$$f(x_n) \to f(x).$$

برهان. ر.ک. [۱]. □

قضیه ۶.۱.۱. *اگر X فضای نرمدار باشد آن‌گاه $(X, wk)^* = X^*$.*

برهان. .ر.ک. [۲۸]. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X فضای نرمدار و X^{**} دوگان دوم آن باشد نگاشت $\widehat{}: X \to X^{**}$ را که به‌صورت $\widehat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌شود نشاننده متعارف نامیم. هرگاه $\widehat{}$ پوشا باشد X را انعکاسی نامیم. لازم به یادآوری است که اگر X فضایی باناخ باشد می‌توان نشان داد $\widehat{}$ یک همریختی طولپا از X به روی یک زیر فضای بسته X^{**} است.

قضیه ۸.۱.۱. *شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای نرمدار X انعکاسی باشد آن است که برای هر $u \in X^* \setminus \{۰\}$*

$$\exists v \in X \qquad \ni \qquad \| v \| = ۱ \qquad u(v) = \| u \|$$

برهان. ر.ک. [۱۰]. □

تعریف ۹.۱.۱. (توپولوژی ضعیف ستاره). فرض کنید X فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. منظور از توپولوژی ضعیف τ روی X^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است که نسبت به آن توپولوژی برای هر $x \in X$، $\widehat{x}$ پیوسته می‌شود، X^* به همراه این توپولوژی را گاهی با (X^*, wk^*) نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است از آن‌جا که X^* فضایی نرمدار است دارای توپولوژی ضعیف $\sigma(X^*, X^{**})$ نیز می‌باشد. به وضوح توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* ضعیف‌تر از توپولوژی ضعیف روی X^* است. در واقع برای هر $\epsilon > ۰$، $f \in X^*$ و $x \in X$، مجموعه‌های به شکل

$$\begin{aligned} U(f_۰, x, \epsilon) &= \{f \in X^* \mid \mid \widehat{x}(f) - \widehat{x}(f_۰) \mid < \epsilon\} \\ &= \{f \in X^* \mid \mid f(x) - f(x_۰) \mid < \epsilon\}. \end{aligned}$$

تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌دهند.

گزاره ۱۰.۱.۱. *اگر $\{f_n\}_{n \in N}$ دنباله‌ای در فضای نرمدار X باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای این‌که $\{f_n\}_{n \in N}$ همگرای ضعیف ستاره به f در X^* باشد آن است که برای هر $x \in X$ داشته باشیم*

$$f_n(x) \to f(x)$$

برهان. ر.ک.[۱]. □

قضیه ۱۱.۱.۱. (باناخ-آلاغلو). [۴] *اگر X فضای نرمدار باشد آن‌گاه مجموعه*
$$B^* = \{f \in X^* \big| \parallel f \parallel \leq ۱\}$$
در توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

برهان. ر.ک. [۲۸]. □

قضیه زیر شروط معادل انعکاسی بودن یک فضای باناخ را بیان می‌کند.

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر X یک فضای باناخ باشد آن‌گاه موارد زیر هم ارزند،*

الف) *X انعکاسی است.*

ب) *X^* انعکاسی است.*

ج) *توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره روی X بر هم منطبق‌اند.*

د) *گوی واحد X، فشرده ضعیف است.*

برهان. ر.ک. [۲۸]. □

قضیه ۱۳.۱.۱. (هان-باناخ). [۵] *فرض کنید X یک فضای نرمدار، M زیر فضایی از X و $f : M \to \mathbb{C}$ خطی و کراندار باشد، f را می‌توان به $F : X \to \mathbb{C}$ توسیع داد که F خطی و کراندار است و $\parallel F \parallel = \parallel f \parallel$.*

برهان. ر.ک. [۲۷]. □

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه هان باناخ می‌توان نشان داد که اگر $x \in X$ دلخواه باشد آنگاه $x^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که
$$\langle x^*, x\rangle = \parallel x \parallel^۲ = \parallel x^* \parallel^۲ .$$
برای این منظور کافی است قرار دهیم $M = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ و $f : M \to \mathbb{C}$ را به‌صورت $f(\lambda x) = \lambda \parallel x \parallel^۲$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\parallel f \parallel = \parallel x \parallel$ حال می‌توان، بنابر قضیه هان-باناخ، f را به تابعکی چون x^* بر X گسترش داد که $\parallel x \parallel = \parallel f \parallel = \parallel x^* \parallel$ و $x^*\big|_M = f$ یعنی $\langle x^*, x\rangle = \parallel x \parallel^۲$.

[۴] Banach-Alaoglu
[۵] Hahn-Banach

قضیه ۱۴.۱.۱. (قضیه نگاشت باز). [۶] *فرض کنید X و Y فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$ پوشا باشد، در این‌صورت T یک نگاشت باز است.*

برهان. ر.ک. [۲۷]. $\square$

قضیه ۱۵.۱.۱. (قضیه نگاشت معکوس). [۷] *فرض کنید X و Y فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$ یک‌به‌یک و پوشا باشد، در این صورت $T^{-1} \in B(Y,X)$.*

برهان. ر.ک. [۲۷]. $\square$

۲.۱ ضرب داخلی و ویژگی‌های آن

در این بخش ضرب داخلی و مفاهیم مربوط به آن‌را به اختصار بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی X عبارت است از تابع $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ به قسمی که به ازای هر $x,y,z \in X$ و اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱. $\langle x,x \rangle \geq 0$،

۲. $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

۳. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$،

۴. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$.

قضیه ۲.۲.۱. (نامساوی کشی-شوارتز) [۸] *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه برای هر $x,y \in X$ داریم $|\langle x,y \rangle| \leq \| x \| \| y \|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر برای بعضی $\alpha \in \mathbb{C}$، $x = \alpha y$.*

برهان. ر.ک. [۲۸]. $\square$

فرض کنید X فضای ضرب داخلی باشد، در این‌صورت با تعریف $\| x \| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$، X را می‌توان به یک فضای نرم‌دار تبدیل کرد.

[۶] Open mapping theorem
[۷] Inverse mapping theorem
[۸] Cauchy-Shwartz inquality

قضیه ۳.۲.۱. *فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر*

$$\| x+y \|^{2} + \| x-y \|^{2} = 2 \| x \|^{2} + 2 \| y \|^{2}$$

این تساوی به قانون متوازی الاضلاع [۹] مشهور است.

برهان. ر.ک. [۲۸]. □

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد، اگر H با نرم حاصل از ضرب داخلی، یعنی $\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ فضای کامل باشد، یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد، آن‌را یک فضای هیلبرت [۱۰] می‌نامیم.

فضای $L^{2}(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ فضای هیلبرت است.

قضیه ۵.۲.۱. *(قضیه نمایش ریس در فضای هیلبرت). اگر H فضای هیلبرت و $f \in H^*$ باشد، در این‌صورت $y \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$*

$$f(x) = \langle x, y\rangle.$$

برهان. ر.ک. [۲۸]. □

۳.۱ فضاهای نرمدار هموار، اکیدا محدب و مشتق‌پذیر گتیوگس

در این بخش مفاهیمی از فضاهای نرمدار هموار، فضای اکیدا محدب، مشتق‌پذیری گتیوگس و قضایا و تعاریف وابسته‌ی مورد نیاز در فصل‌های آتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. نگاشت $J : X \to 2^{X^*}$ که X^* فضای دوگان X است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$J(x) = \Big\{x^* \in X^* | \langle x^*, x\rangle = \| x^* \| \| x \|; \qquad \| x^* \| = \| x \| \Big\}, \qquad x \in X$$

را نگاشت دوگانی نرمال شده [۱۱] از فضای خطی X می‌نامیم.

از قضیه هان-باناخ دیدیم که برای هر $x \in X$ مجموعه $J(x)$ مجموعه‌ای ناتهی است. حال اگر X یک فضای هیلبرت باشد برای هر $x \in X$ به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که $J(x) = \{x\}$.

[۹] Parallelogram low
[۱۰] Hilbert space
[۱۱] Normalised duality mapping

در واقع اولا $x \in J(x)$ زیرا $\langle x, x\rangle = \| x \|^{2}$. حال اگر $y \in J(x)$ (یعنی $\varphi_y \in J(x)$ که در آن $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$) آن‌گاه باید

$$| \varphi_y(x) | = \| x \|^{2} = \| \varphi_y \|^{2} = \| y \|^{2}$$

لذا

$$\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle = \langle y, y\rangle$$

پس

$$\| x - y \|^{2} = \langle x - y, x - y\rangle = 0$$

یعنی $x = y$.

هم‌چنین برای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، $J(\lambda x) = \bar{\lambda} J(x)$. زیرا اگر $\lambda = 0$ که درست است. فرض می‌کنیم $\lambda \neq 0$ و $x^* \in J(\lambda x)$، به‌عبارت دیگر

$$\langle x^*, \lambda x\rangle = \|x^*\|\|\lambda x\| \qquad \text{و} \qquad \|x^*\| = \|\lambda x\|,$$

که نتیجه می‌گیریم

$$\langle \frac{1}{\lambda} x^*, x\rangle = \|\frac{1}{\lambda} x^*\|\|x\| \qquad \text{و} \qquad \|\frac{1}{\lambda} x^*\| = \|x\|,$$

در نتیجه $\frac{1}{\lambda} x^* \in J(x)$ در این‌صورت $x^* \in \bar{\lambda} J(x)$، که نتیجه می‌دهد $J(\lambda x) \subseteq \bar{\lambda} J(x)$، قسمت عکس به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. نگاشت $\tilde{J} : X \to X^*$ بخشی [12] از نگاشت دوگانی نرمال شده نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\tilde{J}(x) \in J(x).$$

تعریف ۳.۳.۱. یک فضای خطی نرمدار $(X, \| . \|)$ در $x \neq 0$ هموار [13] گفته می‌شود، اگر یک تابع خطی پیوسته منحصربه‌فرد x^* وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\langle x^*, x\rangle = \| x \|, \qquad \| x^* \| = 1.$$

برای مثال هر فضای هیلبرت در هر نقطه‌ی ناصفر هموار است.

[12] Section
[13] Smooth

تعریف ۴.۳.۱. (مشتق‌پذیری گتیوگس) [۱۴] : نگاشت، $\mathbb{R} \ni \| x \| \longmapsto x \in X$ روی $X \setminus \{\circ\}$ مشتق‌پذیر گتیوگس راست است، اگر حد زیر وجود داشته باشد

$$(V+ \| \,.\, \|)(x).h := \lim_{t \to \circ^+} \frac{\| x + th \| - \| x \|}{t}, \qquad (x \in X \setminus \{\circ\} \qquad h \in X)$$

هم‌چنین نرم $\| \,.\, \|$ روی $X \setminus \{\circ\}$ مشتق‌پذیر گتیوگس نامیده می‌شود اگر

$$(V+ \| \,.\, \|)(x).h = -(V+ \| \,.\, \|)(x).(-h), \qquad (h \in X).$$

قضیه ۵.۳.۱. *اگر $(X, \| \,.\, \|)$ فضای خطی نرمدار باشد و $x_\circ \in X$ که $\| x_\circ \| = ۱$ گزاره‌های زیر معادل‌اند*

الف) *X در $x_\circ$ هموار است.*

ب) *$J(x_\circ)$ شامل یک عضو منحصربه‌فرد در X^* است.*

ج) *اگر $\tilde{J}$ بخشی از نگاشت دوگانی J باشد آن‌گاه برای هر دنباله x_n در X که $\| x_n \| = ۱$، $n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{n \to \infty} x_n = x_\circ$، دنباله $\{\tilde{J}(x_n)\}$ با توپولوژی ضعیف در X^* به $\tilde{J}(x)$ همگرا است.*

د) *نرم $\| \,.\, \|$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر گتیوگس است.*

برهان. ر.ک. [۳]. □

نتیجه ۶.۳.۱. *اگر $(X, \| \,.\, \|)$ یک فضای خطی نرمدار باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند*

الف) *X هموار است.*

ب) *J یکنوا [۱۵] است.*

ج) *هر بخش $\tilde{J}$ از نگاشت دوگانی J از X با توپولوژی نرم به X^* با توپولوژی ضعیف $\sigma(X^*, X)$ پیوسته است.*

د) *نرم $\| \,.\, \|$ روی $X \setminus \{\circ\}$ مشتق‌پذیر گتیوگس است.*

برهان. ر.ک. [۳]. □

---
[۱۴] Gateaux differentiable
[۱۵] Univocal

تعریف ۷.۳.۱. یک فضای خطی نرمدار $(X, \| \cdot \|)$ را فضای اکیدا محدب [16] نامیم، اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و $\| x \| = \| y \| = ۱$ و $\lambda \in (۰, ۱)$ داشته باشیم
$$\| \lambda x + (۱ - \lambda) y \| < ۱.$$

به‌طور معادل، فضای باناخ X اکیدا محدب است اگر و فقط اگر از برقراری رابطه
$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$$
که $x, y \neq ۰$ نتیجه بگیریم برای بعضی $\lambda > ۰$، $x = \lambda y$.

در ادامه ویژگی‌های دیگری از نگاشت تناظر نرمال شده J را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۳.۱. *اگر $(X, \| \cdot \|)$ یک فضای خطی نرمدار باشد و $x_۰ \in X \setminus \{۰\}$ در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند*

الف) X *در* $x_۰$ *هموار است.*

ب) *برای هر بخش* $\tilde{J}$ *از نگاشت دوگانی نرمال شده* J *رابطه زیر را داریم*
$$\lim_{t \to ۰} Re\langle \tilde{J}(x_۰ + ty), y \rangle = Re\langle \tilde{J}(x_۰), y \rangle, \qquad (y \in X).$$

ج) *برای هر بخش* $\tilde{J}$ *از نگاشت دوگانی نرمال شده* J *رابطه زیر را داریم*
$$\lim_{t \to ۰} Re\Big\langle \frac{\tilde{J}(x_۰ + ty) - \tilde{J}(x_۰)}{t}, x_۰ \Big\rangle = Re\langle \tilde{J}(x_۰), y \rangle, \qquad (y \in X).$$

برهان. ر.ک. [۳]. □

نتیجه ۹.۳.۱. *اگر X فضای خطی نرمدار باشد، گزاره‌های زیر معادل‌اند*

الف) X *هموار است.*

ب)
$$\lim_{t \to ۰} Re\langle \tilde{J}(x + ty), y \rangle = Re\langle \tilde{J}(x), y \rangle, \qquad (y \in X).$$

ج)
$$\lim_{t \to ۰} Re\Big\langle \frac{\tilde{J}(x + ty) - \tilde{J}(x)}{t}, x \Big\rangle = Re\langle \tilde{J}(x), y \rangle, \qquad (y \in X).$$

برهان. ر.ک. [۳]. □

[16] Strictly convex

فصل ۲
نیم‌ضرب‌های داخلی

در این فصل نیم‌ضرب داخلی به‌مفهوم لومر و گیلس، نیم‌ضرب داخلی بالایی و پایینی و روابط بین نیم‌ضرب‌های داخلی بالایی و پایینی و نگاشت دوگانی را بیان می‌کنیم و سپس دو نگاشت $\varphi^{[,]}_{x,y}$ و $\psi^{[,]}_{x,y}$ را معرفی می‌کنیم و در نهایت با بیان تظریف نامساوی شوارتز و یک ویژگی از نیم‌ضرب داخلی، این فصل را به پایان می‌رسانیم.

۱.۲ نیم‌ضرب داخلی به‌مفهوم لومر وگیلس

در این بخش نیم ضرب داخلی به مفهوم لومر و گیلس را معرفی می‌کنیم و سپس به بیان پیوستگی نیم‌ضرب داخلی و رابطه‌ی آن با فضای هموار و فضای اکیدا محدب و قضایای مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید X فضایی خطی روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط $\mathbb{K}$ باشد. نگاشت، $[.,.] : X \times X \to \mathbb{K}$ را **نیم‌ضرب داخلی** به‌مفهوم لومر و گیلس [۱] یا به اختصار $(L-G-s.i.p)$ نامیم، اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ در ویژگی‌های زیر صدق کند

۱. $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$،

۲. $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$،

۳. $[x, x] = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$ و همواره $[x, x] \geq ۰$،

[۱] Semi-inner product

۴. $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y]$،

۵. $\mid [x, y] \mid^{۲} \leq [x, x][y, y]$.

تفاوت نیم‌ضرب داخلی با ضرب داخلی این است که در نیم‌ضرب داخلی لزوما تساوی

$$[x, y] = \overline{[y, x]}$$

برقرار نیست، یا به‌طور معادل در نیم‌ضرب داخلی تساوی

$$[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$$

لزوما برقرار نیست. در واقع نیم‌ضرب داخلی نسبت به مولفه دوم خطی نیست.
خاصیت ۵) را نامساوی کشی-شوارتز می‌نامیم. در ادامه همواره به جای " نیم‌ضرب داخلی به‌مفهوم لومر و گیلس " از نیم‌ضرب داخلی استفاده خواهیم کرد مگر آن‌که خلاف آن تصریح شود.
مثالی از نیم‌ضرب داخلی، فضای باناخ حقیقی $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ است که نرم روی آن به‌صورت

$$\parallel f \parallel_p = \left(\int_X \mid f(t) \mid^p d\mu \right)^{\frac{۱}{p}},$$

و نیم‌ضرب داخلی به‌صورت زیر است که در آن برای $g \in \mathbb{C} \setminus \{۰\}$، $sgng = \frac{g}{|g|}$ و برای $g = ۰$، $sgng = ۰$

$$[f, g] = \frac{۱}{\parallel g \parallel_p^{p-۲}} \int_X f \mid g \mid^{p-۱} sgn\overline{g} d\mu,$$

است، زیرا

.۱

$$\begin{aligned}
[f + h, g] &= \frac{۱}{\parallel g \parallel_p^{p-۲}} \int_X (f + h) \mid g \mid^{p-۱} sgn\overline{g} d\mu \\
&= \frac{۱}{\parallel g \parallel_p^{p-۲}} \int_X (f \mid g \mid^{p-۱} + h \mid g \mid^{p-۱}) sgn\overline{g} d\mu \\
&= \frac{۱}{\parallel g \parallel_p^{p-۲}} \int_X (f \mid g \mid^{p-۱} sgn\overline{g}) + (h \mid g \mid^{p-۱} sgn\overline{g}) d\mu \\
&= [f, g] + [h, g]
\end{aligned}$$

۲. $[f, f] > ۰$ زیرا

$$\begin{aligned}
[f, f] &= \frac{۱}{\parallel f \parallel_p^{p-۲}} \int_X f \mid f \mid^{p-۱} sgn\overline{f} d\mu \\
&= \frac{۱}{\parallel f \parallel_p^{p-۲}} \int_X \mid f \mid^p d\mu = \parallel f \parallel_p^{۲}
\end{aligned}$$

.۳

$$
\begin{aligned}
[f,\lambda g] &= \frac{1}{\| \lambda g \|_p^{p-2}} \int_X f \mid \lambda g \mid^{p-1} sgn\overline{(\lambda g)} d\mu \\
&= \frac{1}{\mid \lambda \mid^{p-2} \| g \|_p^{p-2}} \int_X f \mid \lambda \mid^{p-1} \mid g \mid^{p-1} \frac{\overline{\lambda}\overline{g}}{\mid \lambda \mid \mid g \mid} d\mu \\
&= \overline{\lambda} \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \int_X f \mid g \mid^{p-1} \frac{\overline{g}}{\mid g \mid} d\mu \\
&= \overline{\lambda} \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \int_X f \mid g \mid^{p-1} sgn\overline{g} d\mu \\
&= \overline{\lambda}[f,g]
\end{aligned}
$$

.۴

$$
\begin{aligned}
\mid [f,g] \mid &= \left| \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \int_X f \mid g \mid^{p-1} sgn\overline{g(t)} d\mu \right| \\
&\leq \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \int_X \mid f \mid \mid g \mid^{p-1} \mid sgn\overline{g(t)} \mid d\mu \\
&\leq \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \int_X \mid f \mid \mid g \mid^{p-1} d\mu \\
&\leq \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (\mid g \mid^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \left(\int_X \mid f \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \mid g \mid^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \| f \|_p \| g \|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= \frac{1}{\| g \|_p^{p-2}} \| f \|_p \| g \|_p^{p-1} \\
&= \| f \|_p \| g \|_p \\
&= [f,f]^{\frac{1}{2}} [g,g]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

گزاره ۲.۱.۲. *فرض کنید X فضای خطی و $[.,.]$ یک نیم‌ضرب داخلی روی X باشد، گزاره‌های زیر برقرارند*

الف) *نگاشت، $\| . \| : X \to \mathbb{R}^+$ که به‌صورت $\| x \| = [x,x]^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود، روی X یک نرم است.*

ب) *برای هر $y \in X$ تابع، $f_y : X \to \mathbb{K}$ که به‌صورت $f_y(x) = [x, y]$ تعریف می‌شود، با نرم تولید شده توسط نیم‌ضرب داخلی یک نگاشت خطی پیوسته روی Xاست، علاوه‌براین* $\| f_y \| = \| y \|$.

برهان. **الف)** برای اثبات این قسمت ابتدا خاصیت‌های نرم را بررسی می‌کنیم. فرض که $x \in X$ در این‌صورت با توجه به تعریف

$$\| x \| = [x, x]^{\frac{1}{2}} \geqslant 0,$$

و اگر $\| x \| = 0$ آن‌گاه $[x, x] = 0$ در نتیجه $x = 0$.

اگر $x \in X$، $\lambda \in \mathbb{K}$ آن‌گاه

$$\| \lambda x \| = [\lambda x, \lambda x]^{\frac{1}{2}} = (\lambda.\bar{\lambda})^{\frac{1}{2}} [x, x]^{\frac{1}{2}} = | \lambda | \| x \| .$$

سرانجام برای هر $x, y \in X$، با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز

$$\begin{aligned}
\| x + y \|^2 &= [x + y, x + y] \\
&= | [x, x + y] + [y, x + y] | \\
&\leq | [x, x + y] | + | [y, x + y] | \\
&\leq [x, x]^{\frac{1}{2}} [x + y, x + y]^{\frac{1}{2}} + [y, y]^{\frac{1}{2}} [x + y, x + y]^{\frac{1}{2}} \\
&= \| x \| \| x + y \| + \| y \| \| x + y \| .
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x, y \in X$

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

ب) با توجه به این‌که $f_y(x) = [x, y]$ و با استفاده از ویژگی ۱) و ۲) نیم‌ضرب داخلی، خطی بودن f_y واضح است.

با استفاده از نامساوی‌کشی شوارتز به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
| f_y(x) | &= | [x, y] | \\
&\leq [x, x]^{\frac{1}{2}} [y, y]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \| x \| . \| y \|
\end{aligned}$$

که کرانداری f_y و رابطه $\| f \| \leq \| y \|$ را نتیجه می‌دهد.

از طرف دیگر

$$\| f_y \| \geq \frac{| f_y(y) |}{\| y \|} = \frac{\| y \|^2}{\| y \|} = \| y \|$$