بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

(مؤسسه ریاضیات)

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

گروههای توپولوژیک راست فشردهٔ دور از مرکز و اندازه هار روی گروههای توپولوژیک راست فشرده

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مدقالچی

تدوین:

سید جلال‌الدین حسینی غنچه

شهریور ۱۳۷۸

بسمه تعالی

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

گروههای توپولوژیک راست فشردهٔ دور از مرکز و اندازهٔ هار روی گروههای توپولوژیک راست فشرده

استاد راهنما : آقای دکتر علیرضا مدقالچی

داور خارجی : آقای دکتر حمیدرضا فرهادی

داور داخلی : آقای دکتر امیر خسروی

دانشجو : **آقای سید جلال‌الدین حسینی غنچه**

زمان : ساعت ۳ بعدازظهر روز چهارشنبه مورخ ۷۸/۶/۳۱

مکان : **دانشگاه تربیت معلم، مؤسسه‌ی ریاضیات دکتر مصاحب.**

خلاصه: این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است که در فصل اول مقدماتی از آنالیز روی نیم گروهها و آنالیز هارمونیک بیان شده است و فصل دوم با تعریف شارش و شارش دور از مرکز آغاز می‌شود و با استفاده از λ_G (مجموعهٔ تمام انتقالهای چپ گروه توپولوژیک راست فشرده G) گروه دور از مرکز تعریف می‌شود که منظور همان دور از مرکز بودن شارش (λ_G, G) است. در بخش سوم فصل دوم شرایطی ارائه می‌شود که معادل با دور از مرکز بودن گروه توپولوژیک راست فشرده است و در انتها با استفاده از قضیهٔ دوگانی پونتر یاگین چند مثال از گروههای دور از مرکز و گروههایی که دور از مرکز نیستند ارائه می‌شود.

فصل سوم با ارائه یک سیستم نرمال از زیرگروههای G آغاز می‌شود که توسط I. Namioka در سال ۱۹۷۲ به دست آمده است. قضیهٔ وجود و منحصربفردی اندازهٔ هار روی گروههای توپولوژیک راست فشرده، که دارای یک سیستم نرمال از زیرگروههایش می‌باشد، بیان و اثبات می‌شود، سپس این شرط توسط قضیهٔ ساختاری (Furstenberg-Ellis-Namioka) توسیع می‌یابد، اما شرط وجود یک سیستم نرمال از زیرگروههای G شرط لازم برای وجود اندازهٔ هار روی گروه توپولوژیک راست فشرده نیست در این مورد مثالی در انتهای فصل سوم ارائه می‌شود.

بسمه تعالی

تاریخ ________

شماره ________

پیوست ________

واحد ________

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه ~~خانم~~ آقای سیدجلال الدین حسینی غنچه دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ محض در روز چهارشنبه مورخه ۷۸/۶/۳۱ در مؤسسهٔ ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون هیجده (۱۸/۰۰) می‌باشد.

- ۱- عالی ☐
- ۲- بسیار خوب ☑
- ۳- خوب ☐
- ۴- قابل قبول ☐
- ۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما

دکتر علیرضا مدقالچی

ممتحنین خارجی

۱- دکتر حمیدرضا فرهادی

۲-

ممتحنین داخلی

۱- دکتر امیر خسروی

۲-

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران - خیابان طالقانی بین بهار و شریعتی - پلاک ۵۹۹ - کد پستی ۱۵۶۱۴

تقدیم به :

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

که تشویقم کردند،

راهنمائیم نمودند

و اگر موفقیتی داشته‌ام متعلق به آنهاست.

موریس کلاین می‌گوید:

ریاضیات عالی‌ترین دستاورد فکری، اصیل‌ترین ابداع ذهن آدمی است.

موسیقی می‌تواند روح را برانگیزد یا آرام سازد،

نقاشی می‌تواند چشم‌نواز باشد،

شعر می‌تواند عواطف را تحریک کند،

فلسفه می‌تواند ذهن را قانع و راضی سازد،

مهندسی می‌تواند زندگی مادی آدمی را بهبود بخشد،

اما

ریاضیات همه این ارزشها را عرضه می‌کند.

تقدیر و تشکر

حمد و ستایش خداوند منان را که خلقت کائنات از او هستی یافت و عدم و وجود در اختیار اوست، خدایی که قدرت اندیشیدن و تفکر را به ما بخشید و روزنه‌ای از دنیای بیکران ادب و علم در منطقی‌ترین دانش بشری (ریاضیات) را به رویمان گشود تا توشه‌ای هر چند اندک در این علم پر آوازه کسب کنیم.

کسب این توشه بدون کمک و راهنمائی معلمان و اساتید این مرز و بوم میسر و ممکن نبود لذا بر خود وظیفه می‌دانم که از تمامی آنها تشکر و تقدیر نمایم.

بخصوص، از آقای دکتر علیرضا مدقالچی که در دوران تحصیل کارشناسی ارشد و در تدوین پایان‌نامه مرا راهنمائی و یاری نمودند و از سایر اساتید "مؤسسه ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب"، کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از آقای دکتر حمیدرضا فرهادی و آقای دکتر امیر خسروی که قبول زحمت نمودند و پایان‌نامهٔ اینجانب را مطالعه نموده و داوری دفاع اینجانب را پذیرفتند قدردانی و تشکر می‌نمایم.

در پایان بر خود واجب می‌دانم مراتب تشکر و امتنان را نسبت به خانواده‌ام ابراز دارم که همواره همراه و غمخوار من بوده‌اند.

فهرست

عنوان صفحه

پیشگفتار

این پایان نامه بر دو قسمت است. در قسمت اول شرایط معادل برای دور از مرکز بودن شارش و مثالهای متنوع مورد بررسی قرار می‌گیرد و در قسمت دوم وجود و منحصر به فردی اندازه هار روی گروههای توپولوژیک راست فشرده مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد که در آن نگاشت $t \longrightarrow st$ پیوسته است، در این صورت ما G را گروه توپولوژیک چپ فشرده می‌نامیم و شارش انتقال چپ $(\lambda_G$و$G)$ را در نظر می‌گیریم دبیلو.راپرت[1] حالتی را که G یعنی $(\lambda_G$ و $G)$ همپیوسته است مورد مطالعه قرار داده است یکی از نتایج درباره گروههای همپیوسته؛ این است که مرکز توپولوژیک

$$\{\eta \in G \mid \eta\rho: G \longrightarrow G\,;\, \nu \longrightarrow \nu\eta \text{ پیوسته}\}$$

در G بسته است. این ایجاب می‌کند که هیچکدام از گروههای توپولوژیک چپ فشردهٔ غیر بدیهی که از شارش دور از مرکز به دست می‌آیند همپیوسته نباشند. در فصل دوم ما آن رده ازگروههای توپولوژیک چپ فشرده را مطالعه خواهیم کرد که از نوع همپیوسته، گسترده‌تراند، رده‌ای که شامل آن گروههای توپولوژیک چپ فشرده است که از شارش‌های دور از مرکز به دست می‌آیند؛ این رده را ما گروههای توپولوژیک چپ فشرده دور از مرکز گوئیم که منظور همان دور از مرکز بودن شارش

1- W.Ruppert

(G و λ_G) است. در تحلیل ما از این رده؛ در حال حاضر شرایطی را که معادل دور از مرکز بودن G است (در مقایسه با شرایط معادل دبیلو. راپرت برای همپیوستگی G) مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین به یک جنبه قابل توجه نتایج نظریه گروههای توپولوژیک چپ فشرده دور از مرکز خواهیم پرداخت و آن فرایندی است که به طور مؤثر یک گام بعدی را برای همپیوستگی G تعیین می‌کند و می‌تواند تکرارهای پی در پی این فرآیند برای G دور از مرکز (غیر همپیوسته) با معنی باشد. ما بعضی از مثال‌ها از G دور از مرکز را بحث خواهیم کرد و در یکی از این مثالها چگونگی فرآیند فوق را دقیقاً ذکر می‌کنیم که نه‌تنها می‌تواند گام بعدی را تعیین‌کند بلکه می‌تواند به طور نامتناهی تکرار شود. در فصل دوم چند گروه غیر دور از مرکز را نیز ارائه می‌دهیم.

در فصل ۳ وجود و منحصر به فردی اندازهٔ هار روی گروههای توپولوژیک راست فشرده بررسی می‌شود.

گروههای توپولوژیک فشرده از توپولوژی دینامیک و دیگر دستگاهها ناشی می‌شوند. در کار اساسی که توسط آر.الیس[1]،آی نامیوکا[2] و فرستن برگ[3] روی شارش‌های دور از مرکز نشان داده شده است؛ که گروههای راست توپولوژیک فشرده از نوع دینامیکی همواره در یک اندازه احتمال که تحت، انتقال چپ پیوسته و

1- R.Ellis

2- I.Nomioka

3- Furstenberg

پایاست صدق می‌کنند [۱۶] به هرحال این خاصیت پایایی برای تعیین اندازه احتمال منحصر به‌فرد کافی نیست (برخلاف گروههای توپولوژیک فشرده).

در این پایان نامه برهان‌های الیس و نامیوکا را توسیع می‌دهیم تا نشان دهیم که اندازه پایای راست روی گروههای توپولوژیک راست G در صورتی وجود دارد که دارای یک سیستم قوی از زیر گروههای نرمال باشد. که این اندازه به‌طور منحصر بفرد تعیین می‌شود و همچنین تحت انتقال چپ پایاست.

با استفاده از کار نامیوکا نشان خواهیم داد که G دارای یک سیستم از زیر گروههای نرمال است؛ اگر مرکز توپولوژیک آن چگال و شمارا باشد و یا زیر گروه چنین گروهی باشد.

فصل اول

پیشنیازها

۱. مقدماتی از توپولوژی

۱-۱ قضیه (استقراء ترانسفینی[1]): فرض کنیم $(A,<)$ مجموعه‌ای خوشترتیب و F خاصیتی باشد به‌طوری که به‌ازاء هر a از A، اگر هر x از A که $x<a$ خاصیت F داشته باشد آنگاه a خاصیت F دارد در این صورت، هر عضو A خاصیت F دارد.

اثبات: [۲۲؛ قضیه ۵.۶.۴].

۱-۲ تعریف: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $P:X\longrightarrow Y$ نگاشتی پوشا باشد. نگاشت P را یک نگاشت خارج قسمتی خوانیم در صورتی که داشته باشیم هر زیر مجموعهٔ Y مانند U در Y باز است اگر و فقط اگر $P^{-1}(U)$ در X باز باشد.

۱-۳ تعریف: اگر X فضایی و A مجموعه‌ای باشد و $P:X\longrightarrow A$ نگاشتی پوشا باشد آنگاه تنها یک توپولوژی τ در A وجود دارد که P نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی است. این به توپولوژی خارج قسمتی القا شده به وسیلهٔ P موسوم است.

۱-۴ تعریف: یکنواختی برای یک مجموعهٔ X، یک خانوادهٔ غیر خالی چون $\mathcal{U}$ از

1- Trasfinite

زیر مجموعه‌های $X\times X$ است به‌طوری که:

الف) هر عضو $\mathcal{U}$ شامل قطر Δ باشد؛ $(\Delta=\{(x,x) \mid x\in X\})$

ب) اگر $V\in\mathcal{U}$ آنگاه $V^{-1}\in\mathcal{U}$؛ $(V^{-1}=\{(x,y) \mid (y,x)\in V\})$

ج) اگر $U\in\mathcal{U}$ آنگاه یک V در $\mathcal{U}$ موجود باشد که $VV\subseteq U$؛

$(VV=\{(x,z) \mid \exists y\in x \quad (x,y)\in V\ ,\ (y,z)\in V\})$.

د) اگر U و V اعضایی از $\mathcal{U}$ باشند آنگاه $U\cap V\in\mathcal{U}$.

ه) اگر $U\subseteq V\subset X\times X, U\in\mathcal{U}$ آنگاه $V\in\mathcal{U}$.

دوتایی $(X,\mathcal{U})$ را فضای یکنواخت گویند.

۱-۵ تعریف: فضای توپولوژیک X را یک فضای T_1 گویند اگر و فقط اگر هر مجموعه تک عضوی بسته باشد.

۱-۶ تعریف: فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از نگاشتها باشد که هر نگاشت عضو $\mathcal{F}$ از فضای توپولوژیک X به توی فضای یکنواخت $(Y,\mathcal{V})$ تعریف شده است. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ را در $x\in X$ همپیوسته گویند اگر و فقط اگر برای هر عضو $V\in\mathcal{V}$ یک همسایگی U از x چنان موجود باشد که برای هر $f\in\mathcal{F}$ داشته باشیم؛

$f(U)\subseteq V[f(x)]$ که $V[f(x)]=\{y \mid (f(x),y)\in V\}$

و یا به طور معادل:

F در x همپیوسته است اگر و فقط اگر

برای هر V در $\mathcal{V}$ $\ \cap\{f^{-1}(V[f(x)]): f\in\mathcal{F}\}$ یک همسایگی x باشد.

۱–۷ تعریف: نقطه‌ای مانند x از مجموعه X و مجموعه بازی مانند U در فضای Y داده شده‌اند، قرار می‌دهیم

$$S(x,U) = \{f \mid f\in Y^X , f(x) \in U\}.$$

مجموعه‌های به‌صورت $S(x,U)$ تشکیل زیر پایه‌ای برای توپولوژی روی Y^X می‌دهند این توپولوژی را توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه (یا توپولوژی نقطه – باز) می‌نامند (منظور از Y^X مجموعه تمام توابعی است که از X به Y تعریف شده‌اند.)

۱–۸ قضیه: اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع همپیوسته در x باشد آنگاه، بستار $\mathcal{F}$ نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه، در x همپیوسته خواهد بود.

اثبات: [۱۲؛ ص ۲۳۲]

فرض کنیم F خانواده‌ای از توابع باشند که از X به توی Y تعریف شده‌اند و P نگاشتی از $F\times X$ به Y چنان باشد که (f,x) را به $f(x)$ بنگارد. از هر توپولوژی برای F یک توپولوژی حاصل ضربی برای $F\times X$ به‌دست می‌آید، حال سئوال اینجاست که نگاشت P در چه صورت نسبت به توپولوژی حاصل ضربی پیوسته است. یک