چکیده

نام خانوادگی: صفاآبادی **نام:** اعظم
عنوان پایان‌نامه: گراف‌های وابسته به ایدال های هم ماکسیمال حلقه‌های تعویض پذیر
استاد راهنما: دکتر نسرین شیرعلی **استاد مشاور:** دکتر سیدجمال هاشمی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض **گرایش:** جبر
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۱/۱۰/ ۸۸
تعداد صفحه: ۱۲۰
واژه‌های کلیدی: کمر گراف – گونای گراف – دسته – همبند – درخت – جنگل – حلقه

چکیده: در این پایان نامه گراف ساده $\Gamma(R)$ را برای حلقه تعویض پذیر و یکدار R تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که دو راس مجزای a,b تشکیل یال می‌دهند اگر و تنها اگر $aR+bR=R$ و در ادامه زیر گراف $\Gamma_2(R)$ را زیر گراف وابسته به عناصر غیریکه حلقه R تعریف می‌کنیم و در ادامه خواص گراف $\Gamma_2(R)-J(R)$ را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم اگر $U(R)$ عناصر یکه حلقه R باشند آن‌گاه طبق تعریف اولیه شارما از یال در $\Gamma(R)$ داریم هر $x\in U(R)$ به هر راس از $\Gamma(R)$ متصل خواهد بود و این نشان می‌دهد هر $x\in J(R)$ یک راس تنها از $\Gamma_2(R)$ است. بنابراین بخش اصلی گراف $\Gamma(R)$ زیر گراف $\Gamma_2(R)-J(R)$ است و به همین دلیل اهمیت بررسی خواص $\Gamma_2(R)-J(R)$ آشکار می‌شود.

دانشگاه شهید چمران – اهواز
مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

(نتیجه ارزشیابی پایان نامه دوره کارشناسی ارشد)

بدین وسیله گواهی می‌شود پایان نامه **اعظم صفاآبادی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** (**گرایش جبر**) از دانشکده **علوم ریاضی و کامپیوتر** به شماره دانشجویی **۸۶۲۵۲۰۱** تحت عنوان:

گراف‌های وابسته به ایدال‌های هم‌ماکسیمال حلقه‌های تعویض‌پذیر

جهت اخذ درجه **کارشناسی ارشد** در تاریخ **۱۳۸۸/۱۰/۲۱** توسط هیأت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه **عالی** تصویب گردید.

	مرتبه علمی	امضاء
۱ – اعضای هیأت داوران:		
الف – استاد راهنما: دکتر نسرین شیرعلی	استادیار	امضاء
ب – استاد مشاور: دکتر سیدجمال هاشمی	استادیار	امضاء
ج – داور اول: دکتر ولی گرجی‌زاده	استادیار	امضاء
د – داور دوم: دکتر البرز آذرنگ	استادیار	امضاء
ه– نماینده‌تحصیلات تکمیلی (استادناظر): دکترعبدعلی کوچک‌پور	استادیار	امضاء
۲– مدیر گروه: دکترسینا هدایتیان	استادیار	امضاء
۳– معاون پژوهشی –تحصیلات‌تکمیلی‌دانشکده: دکترمنصورسراج	استادیار	امضاء
۴ – مدیرکل‌تحصیلات‌تکمیلی: دکتر رحیم پیغان	استاد	امضاء

پیشگفتار

در این پایان نامه گراف‌های وابسته به‌ایدال‌های هم ماکسیمال حلقه تعویض‌پذیر و یک‌دار R را، مورد بررسی قرار می‌دهیم. گراف تعریف شده در فوق را $\Gamma(R)$ نامیده و خواص آن را از لحاظ اویلری یا درخت بودن و سایر ویژگی‌های یک گراف، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل (۱)، به تعریف و معرفی گراف‌های مختلف پرداخته و قضایای مهمی از جمله فرمول مشخصه اویلر رابیان و اثبات خواهیم کرد.

در فصل (۲)، به تعریف حلقه پرداخته و ایدال‌های اول و ماکسیمال آن را تعریف و مورد بررسی قرار داده‌ایم. سپس با تعریف $J(R)$ به‌عنوان اشتراک ایدال‌های ماکسیمال حلقه R ، به اثبات قضایای مختلفی در این زمینه پرداخته‌ایم.

در فصل‌های (۳) و (۴)، با تعریف $\Gamma_1(R)$ ، به‌عنوان گراف وابسته به عناصر یکال حلقه R و $\Gamma_2(R)$ ، به‌عنوان گراف وابسته به عناصر غیریکال حلقه R ، خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

می‌دانیم اگر $U(R)$ عناصر یکال حلقه R باشند، آن‌گاه طبق تعریف اولیه شارما از یال در $\Gamma(R)$ ، هر $x \in U(R)$ به هر راس از $\Gamma(R)$ متصل خواهد بود و این نشان می‌دهد، هر $x \in J(R)$ یک راس تنها از $\Gamma_2(R)$ است. بنابراین بخش اصلی گراف $\Gamma(R)$ ، زیر گراف $\Gamma_2(R) - J(R)$ است، که در فصل (۴) به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته است.

فهرست مندرجات

۱ **تعاریف و قضایای مقدماتی** ۳

۱.۱ تعریف های اساسی نظریه گراف ۳

۲.۱ رده‌هایی خاص از گراف‌ها ۱۱

۳.۱ گراف های یکریخت ۲۲

۲ **مفاهیم اصلی نظریه حلقه‌ها** ۳۵

۱.۲ مقدمه ۳۵

۲.۲ ایدال‌ها ۳۸

۳ **گراف‌های وابسته به ایـــدال‌های هم ماکسیمال حلقه‌های تعویض‌پذیر** ۵۱

۱.۳ بررسی خصوصیات $\Gamma_۲(R)$ ۵۱

۴ بررسی حلقه‌های خاص ۷۱

۱.۴ بررسی گونای حلقه‌های خاص ۷۱

۲.۴ گونای $\Gamma(R)$ ۹۲

۳.۴ گونای $\Gamma_۲(R)$ ۹۸

A واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۱۰۶

B واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۱۱۰

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعریف های اساسی نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ . هر گاه B و A مجموعه‌های ناتهی باشد، $A \times B$ را حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A, B در نظر گرفته و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a,b) : \quad a \in A \ , \ b \in B\}$$

(a,b) را یک زوج مرتب می‌نامیم، یعنی ترتیب نوشتن مولفه‌های a,b در این نماد اهمیت دارد. به عبارت دیگر $(a,b) \neq (b,a)$ ، مگر این‌که $a = b$. اما هر گاه ترتیب نوشتن مولفه‌ها بی‌اهمیت باشد، از نماد $\otimes$ به جای $\times$ در حاصل ضرب دکارتی استفاده می‌کنیم و $A \otimes B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \otimes B = \{(a,b) : \quad a \in A \ , \ b \in B\}$$

اما در این‌جا داریم: $(a,b) = (b,a)$.

تعریف ۲.۱.۱ . یک گراف از یک مجموعه V به نام مجموعه راس‌ها (نقاط) و یک مجموعه E به نام یال‌ها (خطوط) و یک نگاشت

$$f : E \longrightarrow V \otimes V$$

که از مجموعه یال‌هابه مجموعه زوج‌های $V \otimes V$ تعریف شده، تشکیل شده است. یک گراف را با $G = (V, E, f)$ یا $G = (V, E)$ و یا به طور خلاصه با G نشان می‌دهیم.

نکته : هر گاه یال $e \in E$ نظیر زوج رئوس u و v از مجموعه $V \otimes V$ باشد، آن‌گاه می‌نویسیم:

$$f(e) = (u, v)$$

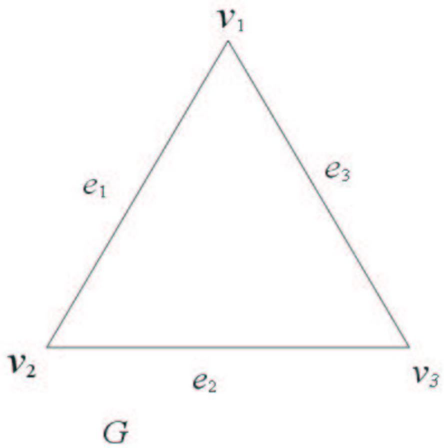
اگر بین راس‌های u, v از گراف G، یال $e \in E$ موجود باشد، آن‌گاه u, v را رئوس مجاور می‌نامیم و از نماد $e = (u, v)$ استفاده می‌کنیم.

قرارداد: در سراسر این پایان‌نامه، غیر از رسم گراف، از یال $e = (u, v)$ با نماد uv یاد می‌کنیم.

مثال ۳.۱.۱ . گراف G را با رئوس $V = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ و یال‌های

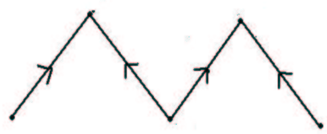
$$e_۱ = (v_۱, v_۲)\ ,\ e_۲ = (v_۳, v_۲)\ ,\ e_۳ = (v_۳, v_۱)$$

در زیر رسم می‌کنیم.



تعریف ۴.۱.۱ . یال e را سودار یا جهت‌دار نامیم، اگر نظیر زوج مرتبی از رئوس u, v باشد، در غیر این صورت یال e را بی سو می‌نامیم. گرافی را که یال‌های آن جهت‌دار باشد، گراف جهت‌دار گوییم.

مثال ۵.۱.۱ . گراف زیر یک گراف جهت‌دار را نشان می‌دهد:



تعریف ۶.۱.۱ . هر گاه یالی از یک راس شروع و به همان راس ختم شود، آن را طوقه می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ . اگر G یک گراف باشد، یک گشت به طول m ، در G ، دنباله‌ای متناهی از m یال به صورت

$$e_۱ e_۲ \cdots e_i \cdots e_m$$

است که در آن برای هر i، $e_i = v_{i-۱} v_i$ می‌باشد. این گشت را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد.

$$v_۰ \to v_۲ \to \cdots v_i \to v_{i+۱} \to \cdots \to v_{n-۱} \to v_m$$

در این حالت $v_۰$ را راس ابتدا و v_m را راس پایانی گشت می‌نامند و به آن یک گشت از $v_۰$ به v_m می‌گویند. یک گشت را که تمام یال‌های آن مجزا باشد، یک گذر می‌نامیم. به‌علاوه اگر رئوس $v_m, \cdots, v_۰$ مجزا باشند (احتمالاً به استثنای $v_۰ = v_m$) گذر را یک مسیر می‌نامیم. اگر $v_۰ = v_m$ ،

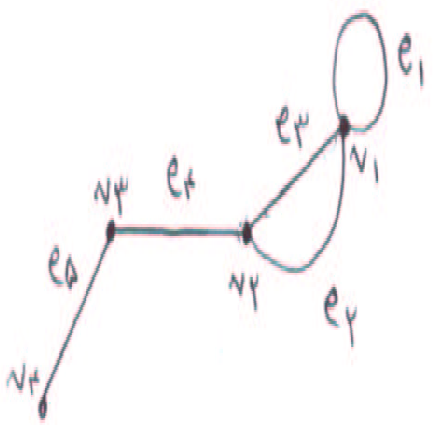
گذر یا مسیر را بسته می‌گوییم. مسیر بسته‌ای که حداقل دارای یک یال باشد، یک مدار یا یک دور نامیده می‌شود.

نمایش یک مسیر: یک مسیررا با راس‌هاو یال‌های موجود در آن به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$v_0 e_1 \cdots e_{n-1} v_n$$

مثال **۸.۱.۱** : گراف زیر در راس v_1 دارای طوقه است و یک مسیر در آن به صورت زیر مشخص شده است :

$$v_1 e_2 v_2 e_4 v_3$$



مثال **۹.۱.۱** . مسیر ذکر شده در مثال قبل، یک مسیر ساده است و مسیر $v_1 e_2 v_2 e_3 v_1$ یک دور است.

تعریف ۱۰.۱.۱ . هر گاه G یک گراف باشد، گرافی که از افزودن یال uv به گراف G به دست می آید را با$G + uv$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ . طول یک مسیر یا یک دور، تعداد یال‌های موجود در آن (به انضمام یال‌های تکراری) می‌باشد. یک «k دور»، دوری به طول k و یک k مسیر، مسیری به طول k می‌باشد. بدیهی است که در یک گراف، هر دور باید به طول سه یا بیشتر باشد.

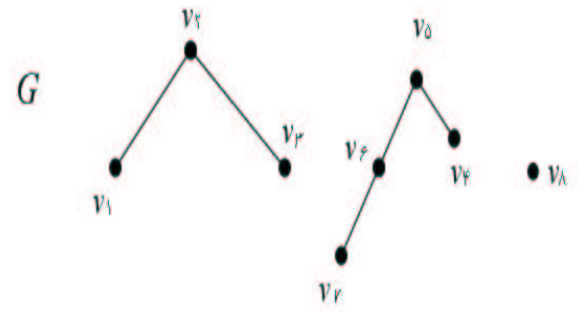
تعریف ۱۲.۱.۱ . اگر G یک گراف و v راسی از این گراف باشد. آن‌گاه زیرگرافی ازG را که از حذف v و همه یال‌هایی که v برآن‌ها واقع است به دست می آید، با $G - v$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه گرافی که از حذف یال e به دست می آید را با $G - e$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ . گراف G را همبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو راس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت G را ناهمبند می‌گوییم .
در گراف همبند G ، یال e را یک پل گوییم هرگاه $G - e$ یک گراف ناهمبند باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ . گراف G را ناهمبندکلی یا کلاً ناهمبند می‌نامیم، هرگاه بین هر دو راس متمایز آن یالی وجود نداشته باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ . هر زیر گراف همبند گراف G را یک مولفه گویند.

مثال ۱۶.۱.۱ . گراف زیر ناهمبند است، زیرا به‌عنوان مثال بین رئوس $v_۴, v_۸$ از گراف زیر، هیچ مسیری یافت نمی‌شود.



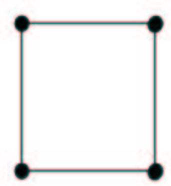
توجه: راس تنها به راسی گفته می‌شود که یالی از آن عبور نمی‌کند.

مثال ۱۷.۱.۱ . راس v_8 در گراف G، یک راس تنها نامیده می‌شود.

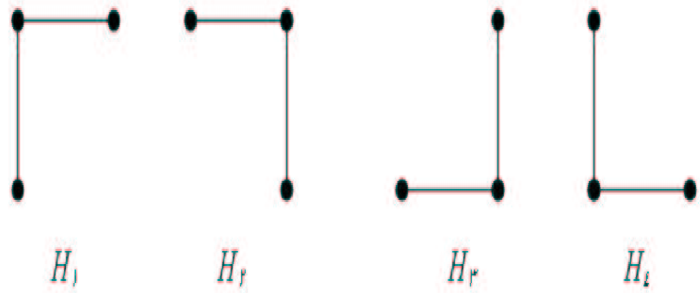
تعریف ۱۸.۱.۱ . گراف H را زیر گراف گراف G می‌نامیم، اگر یال‌ها و راس‌های H به مجموعه یال‌ها و راس‌های G متعلق باشد. به عبارت دیگر، اگر $G = (V, E, f)$ یک گراف باشد، گراف $H = (V', E', f')$ یک زیر گراف است اگر

$$V' \subseteq V \ , \ E' \subseteq E \ , \ f \mid E' = f'$$

مثال ۱۹.۱.۱ . تمام زیر گراف‌هایی راکه با حذف یک راس از گراف زیر نتیجه می‌شوند، مشخص می‌کنیم.



گراف‌های H_1 تا H_4 زیرگراف‌های مورد نظر هستند.



تعریف ۲۰.۱.۱ . زیرگراف H از گراف G را یک زیرگراف فراگیر می‌نامیم، هرگاه شامل تمام رئوس G باشد.

توجه: هرگاه v, w رئوس H باشند و vw یالی از G باشد، لزوماً vw یالی از H نیست.

تعریف ۲۱.۱.۱ . فرض کنیم H یک زیرگراف از G و V' مجموعه رئوس H باشد، H را یک زیرگراف القا شده از G می‌نامیم، هرگاه شامل همه‌ی یال‌های G باشد که رئوس V' را به هم متصل می‌کند.

تعریف ۲۲.۱.۱ . اگر S مجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد، زیرگراف تولید شده توسط S را با $< S >$ نشان می‌دهیم و برابر زیرگراف ماکسیمال G با راس‌های در S است.

تذکر: طبق تعریف بالا دو راس از S، در $< S >$ تشکیل یال می‌دهند اگر و تنها اگر یال G باشند.

تعریف ۲۳.۱.۱ . هرگاه G گرافی با مجموعه رئوس V باشد، آن‌گاه تعداد یال‌هایی را که در یک راس مانند u تلاقی داشته باشد، درجه راس u نامیده و آن را با $deg(u)$ یا $d(u)$ نشان می‌دهیم.

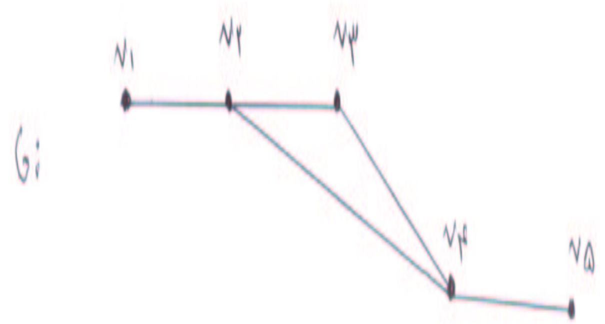
لم ۲۴.۱.۱ . (دست دادن) اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد، آن‌گاه مجموع درجه‌های رئوس G دو برابر تعداد یال‌های G است.

اثبات: از این‌که در شمارش درجات رئوس هر یال دو بار شمرده می‌شود، حکم ثابت می‌شود. ■

فاصله بین رئوس یک گراف

اگر G یک گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ باشد، آن‌گاه برای رئوس u, v در $V(G)$ ، فاصله آن‌ها را با $d(u, v)$ نمایش داده و آن را به صورت طول کوتاه‌ترین مسیر بین u, v تعریف می‌کنیم. در صورتی‌که بین u, v مسیری وجود نداشته باشد، از نماد $d(u, v) = \infty$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۵.۱.۱ . در گراف زیر، $d(v_۱, v_۵) = ۳$ است:



تعریف ۲۶.۱.۱ . قطر گراف G را با نماد $diam(G)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$diam(G) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \text{ رئوس متمایز } G \text{ باشند}\}$$

تعریف ۲۷.۱.۱ . کمر گراف G را با $g(G)$ نمایش داده و آن را برابر طول کوتاه‌ترین دور در G

تعریف می‌کنیم و $g(G)=\infty$ ، اگر G شامل دوری نباشد.

مثال ۲۸.۱.۱ . در گراف مثال قبل، $g(G)=3$.

۲.۱ رده‌هایی خاص از گراف‌ها

در این بخش گراف‌هایی را که دارای ساختاری خاص می‌باشند، معرفی می‌کنیم.

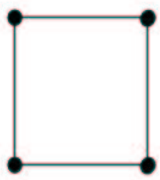
گراف‌های ساده

تعریف ۱.۲.۱ . گرافی را که بین هر دو راس آن بیش از یک یال وجود نداشته باشد، گراف ساده گوییم .

توجه: اگر در یک گراف بیش از یک یال از دو راس عبور کند، آن را گراف چندگانه گویند.

تعریف ۲.۲.۱ . هر گراف فاقد یال، یک گراف پوچ یا گراف تهی گفته می‌شود.

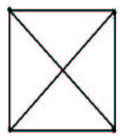
مثال ۳.۲.۱ . گراف زیر یک گراف ساده است، زیرا بین هر دو راس آن فقط یک یال وجود دارد.



گراف‌های منتظم

تعریف ۴.۲.۱ . گراف G را منتظم می‌گوییم، هر گاه تمام رئوس آن دارای درجه یکسان باشند. اگر درجه تمام رئوس G برابر k باشد، آن‌گاه G را یک گراف k ـ منتظم می‌نامیم.

مثال ۵.۲.۱ . گراف زیر یک گراف ۳ـمنتظم است، زیرا درجه هر کدام از رئوس آن برابر ۳ است.



گراف‌های کامل

تعریف ۶.۲.۱ . گراف ساده G را کامل می‌گوییم، هر گاه بین هر دو راس آن یک یال وجود داشته باشد. اگر G گرافی کامل با n راس باشد، آن را با K_n نشان می‌دهیم.

توجه: بنا به تعریف برای هر راس در گراف کامل K_n داریم $d(v) = n - 1$. لذا بنا به لم دست‌دادن، گراف کامل دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال می‌باشد.

تعریف ۷.۲.۱ . گراف همبند G را یک گراف اویلری گوییم هرگاه یک گذر بسته در G موجود باشد به‌طوری‌که شامل همه یال‌های G باشد.

قضیه ۸.۲.۱ . گراف G اویلری است اگر و تنها اگر درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

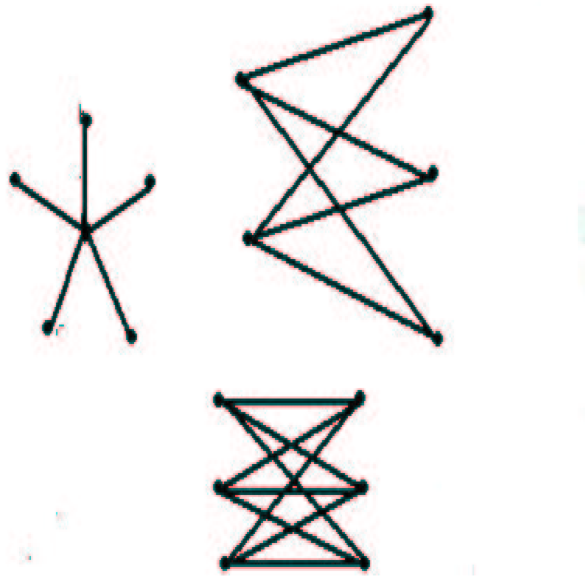
اثبات: ر.ک به مرجع [۳] ، صفحه ۴۰. ■

گراف‌های دو بخشی

تعریف ۹.۲.۱ . فرض کنید G گرافی با مجموعه رئوس V باشد و V_1, V_2 دو مجموعه جدا از هم باشد، به طوری که $V = V_1 \cup V_2$ و هیچ دو راسی از V_1 یا V_2 به یکدیگر متصل نباشد. از طرفی هر یال، راسی از V_1 را به راسی از V_2 متصل کند، در این صورت G را یک گراف دو بخشی می‌نامیم.

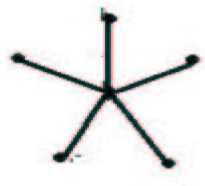
تعریف ۱۰.۲.۱ . اگر G یک گراف دو بخشی باشد که در آن هر راس از $V_۱$ به تمام رئوس $V_۲$ وصل شده است، G را یک گراف دو بخشی کامل می‌گوییم.
اگر G یک گراف دو بخشی کامل باشد، به طوری که $V_۱$ دارای m راس و $V_۲$ دارای n راس باشد، آن را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱.۲.۱ . $K_{۱,۵}, K_{۲,۳}, K_{۳,۳}$ در شکل زیر رسم شده است :



واضح است که گراف $K_{m,n}$ دارای mn یال و $m+n$ راس است و یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{۱,n}$ یک گراف ستاره‌ای نامیده می‌شود.

مثال ۱۲.۲.۱ . گراف زیر یک گراف ستاره‌ای است:



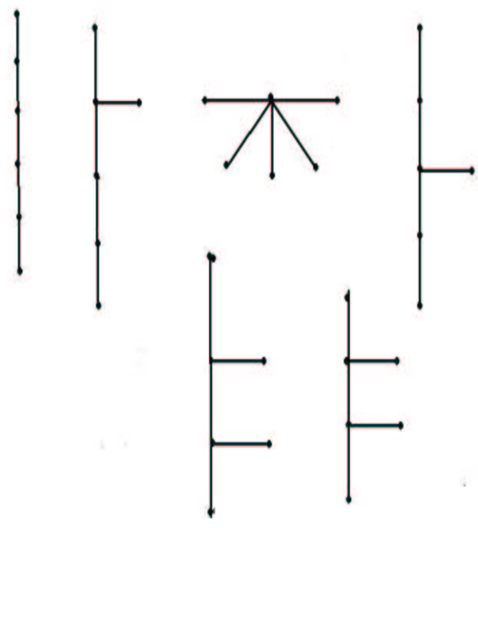
درخت

تعریف ۱.۲.۱۳ . هر گراف همبند فاقد دور، یک درخت نامیده می‌شود.

از تعریف درخت نتیجه می‌شود که هر درخت یک گراف ساده است و علاوه براین هر یال درخت، یک پل می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۴ . اگر شرط همبندبودن را از تعریف فوق حذف کنیم، گراف حاصل جنگل گفته می‌شود.

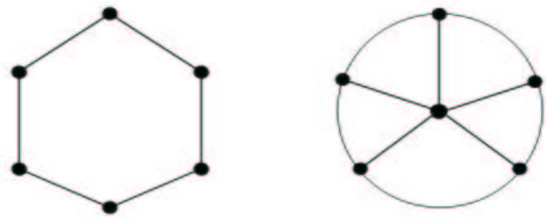
مثال ۱.۲.۱۵ . گراف‌های زیر درخت هستند:



تعریف ۱.۲.۱۶ . یک گراف همبند منتظم از درجه ۲ را یک گراف مداری می‌گویند. گراف مداری n راسی را با C_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۷.۲.۱ . چرخ n راسی که $n \geq ۳$ ، گرافی است که از افزودن یک راس به دور $n - ۱$ راسی $C_{n-۱}$ و اتصال آن به همه راس‌های $C_{n-۱}$ به دست می آید و آن را با W_n نشان می دهیم.

مثال ۱۸.۲.۱ . شکل زیر $C_۶$ و $W_۶$ را نشان می‌دهد:



حال قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیه ۱۹.۲.۱ . فرض کنیم G یک گراف n راسی باشد، در این‌صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

۱) G یک درخت است.

۲) G فاقد مدار و $n - ۱$ یال دارد.

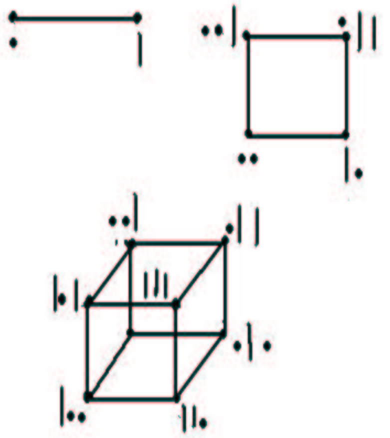
۳) G همبند و هر یال آن یک پل است.

۴) G همبند و $n - ۱$ یال دارد.

۵) بین هر دو راس G ، یک مسیر منحصربه‌فرد وجود دارد.

تعریف ۲۰.۲.۱ . گراف k مکعب، گرافی است که راس‌های آن دنباله‌های k تایی از ۰و۱ هستند و دو راس در آن مجاورند، اگر دنباله‌های متناظر فقط در یک مولفه با هم اختلاف داشته باشند. گراف k مکعب را با Q_k نشان می‌دهیم.

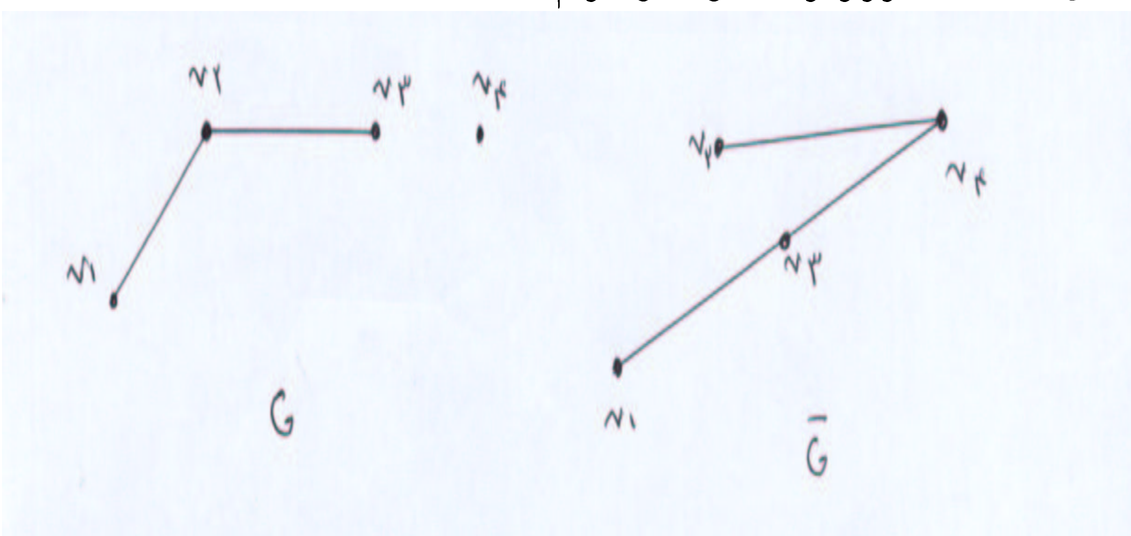
مثال ۲۱.۲.۱ . در زیر گراف‌های $Q_۱, Q_۲, Q_۳$ باتوجه به تعریف ذکر شده درفوق رسم شده‌است:



توجه: گراف مکعبی همان گراف Q_3 است. می‌توان دید که Q_k تعداد 2^k راس و $K2^{K-1}$ یال دارد و منتظم از مرتبه K است.

تعریف ۲۲.۲.۱ . اگر G یک گراف ساده باشد، مکمل G را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم و گرافی است که رئوس آن با رئوس G برابر است و u,v در $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

مثال ۲۳.۲.۱ . در زیر گراف دلخواه G و $\bar{G}$ رسم شده است:

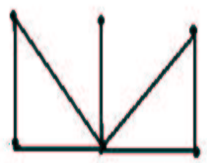


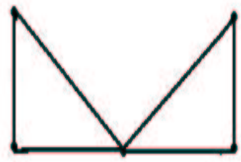
تعریف ۲۴.۲.۱ . اگر مجموعه‌ی V' را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$V' = \{x \in V \mid deg(x) \leq ۱\}$$

آن‌گاه نماد $\tilde{G}$ ، را برای زیر گراف $G - V'$ به کار می‌بریم و گراف تحویل یافته گفته می‌شود.

مثال ۲۵.۲.۱ . در زیر گراف‌های دلخواه G و $\tilde{G}$ رسم شده است:





تعریف ۲۶.۲.۱ . یک زیر مجموعه از راس‌های گراف G را دسته گوییم، هر گاه بین هر دو راس مجزای آن یالی موجود باشد و $W(G)$ کوچکترین کران بالای اندازه دسته‌ها تعریف می‌شود.

نشاندن یک گراف

تعریف ۲۷.۲.۱ . اگر $I = [a, b]$ یک فاصله بسته حقیقی باشد، هر تابع پیوسته f از I به $R^۲$ را یک خم پیوسته در صفحه گوییم. اگر $f\mid_{(a,b)}$ یک‌به‌یک باشد، آن را یک خم ژوردان گوییم. علاوه‌براین، درصورتی‌که $f(a) = f(b)$ باشد، آن را یک خم بسته ژوردان می‌گوییم.

اکنون می‌توان نشاندن یک گراف را در یک فضای مفروض تعریف کرد. فضای مورد نظر ما آن‌هایی هستند که خم ژوردان در آن‌ها تعریف می‌شود، ولی بیشتر به صفحه و فضای سه بعدی علاقه‌مند هستیم. گراف مورد نظر گرافی است که نقاط، نشانگر رئوس آن و خم‌های ژوردان که