بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه :

حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی و غیرخطی به روش تجزیه آدومیان

استاد راهنما:
دکتر حسن حسین زاده

استاد مشاور:
دکتر ماشاالله متین فر

تدوین :
محسن رامززاده

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر گرامی ام که در لحظات سخت زندگی مرا یاری نمودند.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی حد خدای متعال را که بـی منـت بـه مـن توفیـق طـی مراحـل تحـصیلی را ارزانـی داشت.در تدوین این پایان نامه از همکاری افراد مختلفی برخـوردار بـودم کـه برخـود ضـروری مـی دانـم سپاسگزارشان باشم.

از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر حسن حسین زاده که در تمامی مراحل تدوین این پایان نامه با رهنمودها و نظرات سودمندشان من را یاری کردند صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر ماشاءالله متین فر که در تدوین ایـن پایـان نامـه مـن را یـاری نمودند تشکر می نمایم.

چکیده:

یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربرد فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد معادلات انتگرال است.روشهای متعددی برای حل این معادلات وجود دارد، پایان نامه حاضرروش تجزیه آدومیان را برای حل دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم ودستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه می دهد.

در فصل اول تعریفی از معادلات انتگرال ،تقسیم بندی معادلات انتگرال وتقسیم بندی دستگاه معادلات انتگرال ارائه می دهیم.

درفصل دوم معرفی روش تجزیه آدومیان وبررسی روش تجزیه را برای حل انواع معادلات انتگرال فردهلم و ولترای خطی و غیر خطی را ارائه می کنیم..همچنین در فصل دوم همگرایی روش آدومیان را برای معادلاتی که توابع یک متغیره خطی ویا غیرخطی دارند مورد بررسی قرار می دهیم.

در فصل سوم دو نوع فرمول متفاوت برای تعیین چندجمله ای های آدومیان توابع غیرخطی یک متغیره و چند متغیره ارا ئه می دهیم .

در فصل چهارم حل دستگاه معادلات انتگرال ولترای خطی و غیرخطی نوع اول و دوم و همچنین دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم خطی و غیرخطی را با استفاده ازروش تجزیه آدومیان ارائه خواهیم کرد.

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

فهرست مطالب

پیشگفتار

درواقع روش تجزیه آدومیان درسال ۱۹۶۱ بوجود آمد اما به قدرکافی تکمیل نـشده بـود تـا در مباحث ریاضی مطرح شود.جورج آدومیان (۱۹۹۶-۱۹۲۲) این روش را به تدریج گـسترش داد و در اوایل سال ۱۹۸۰این روش به عنوان یک روش کلی برای حل خانواده ی وسیعی از معادلات انتگرال ,معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی و غیرخطی ارائه شد.

همچنین روش تجزیه برای حل معادله جبری ، معادله انتگرالی ، معادله دیفرانـسیل معمـولی و معادلات دیفرانسیل جزیی به کار می رود.جواب به صورت یک سری نامتناهی مشخص شده که بـه سرعت به جواب دقیق نزدیک می شود.

آدومیان درسال ۱۹۸۲ این روش را برای حل معادلات دیفرانسیل تـصادفی بـه کـار بـرد .بحـث همگرایی این روش توسط Yves Cherruault دراوایل سال ۱۹۸۰ مطرح شد و ریاضیدانان دیگر کاربردهای مختلف این روش را گسترش داده و تکمیل کردند.کلیات مباحـث مطـرح شـده توسـط ادومیان در قالب یک مجموعه مدرن برای اولین بار درسال ۱۹۸۳ به چاپ رسـید.آدومیـان درسـال ۱۹۹۴ نیز آخرین اثر خود را منتشر کرد.وی در این کتاب به ارائه روش تجزیه جهـت حـل مـسائل مقدار اولیه و مرزی با شرایط بسیار پیچیده و همچنین گونه جدیـدی از روش تجزیـه خـویش مـی پردازد.

درواقع وقتی این روش برای حل یک معادله تابعی به کار می رود، بسیار کاراتر از روش قـدیمی تقریب متوالی است.زیرا که اگر روش تقریب متوالی همگرا شود ،روش آدومیان نیز به خوبی همگـرا خواهد شد.در این پایان نامه بررسی این روش را برای حل انواع دستگاه های معادلات انتگرال ولتـرا و فردهلم ارائه می دهیم.

فصل اول

معادلات انتگرال

۱-۱ معادله انتگرال

تعریف: یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال ظـاهر می شود.یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهـولی اسـت و بایـد معلـوم شـود بـه صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\, u(t)\, dt. \qquad (۱-۱)$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگـرال نامیـده مـی شـود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حـدود انتگرالگیـری هستند.

در معادله (۱-۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$ در زیرعلامت انتگرال ظاهر شده است و در حالتهای دیگر ممکن است در خارج از علامت انتگرال هم ظاهر شود.

باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند .هدف پیـداکردن تابع مجهول $u(x)$ است که در رابطه (۱-۱) صدق کند.برای این کار روشهای مختلفی به کار برده مـی شود.

معادلات انتگرال در مباحث بسیاری از علوم از قبیل فیزیک ، بیولوژی ، شیمی و مهندسی ظاهر می شوند.

در مثال زیر درباره نحوه تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال بحث خواهیم کرد.

مثال ۱-۱: مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$u'(x) = ۲x\,u(x) \qquad x \geq ۰, \qquad (۲-۱)$$

که در شرط اولیه زیر صدق می کند :

$$u(۰) = ۱ \qquad (۳-۱)$$

معادله (۱-۲) را می توان به سادگی با به کار بردن ایده جدا کردن متغیرها حل کرد.

جواب معادله دیفرانسیل (۱-۲) با توجه به شرط (۱-۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) = e^{x^{2}} \qquad (۱-۴)$$

اما اگر از طرفین رابطه (۱-۲) نسبت به x از ۰ تا x انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{x} u'(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} t\,u(t)\,dt, \qquad (۱-۵)$$

و در نتیجه با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۱-۲) و استفاده از شرط اولیه (۱-۳) داریم:

$$u(x) = 1 + 2\int_{0}^{x} t\,u(t)\,dt \qquad (۱-۶)$$

از مقایسه طرفین روابط (۱-۶) و (۱-۱) در می یابیم که (۱-۶) یک معادله انتگرال با هسته $k(x,t) = 2t$ و تابع $f(x) = 1$ است.

همان طوری که در بالا هم اشاره شد، هدف اصلی ما تعیین تابع مجهول $u(x)$ است که در زیر علامت انتگرال نظیر معادله کلی (۱-۱) و معادله خاص (۱-۶) ظاهر شده است و در معادله انتگرال داده شده صدق می کند.به معادلات انتگرال (۱-۱) و (۱-۶) معادلات انتگرال خطی می گویند. زیرا که تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی است یعنی توان یک دارد. اما اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال با توابع غیرخطی نظیر $u^{2}(x)$ یا $\cos(u(x))$ یا $e^{u(x)}$ و غیره تعویض شود، آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می گویند.

۱-۲ تقسیم بندی معادلات انتگرال

متداولترین معادلات انتگرال خطی را می توان بـه دو گـروه معـادلات انتگـرال فـردهلم و معـادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود.

اما معادلات انتگرال خطی و غیرخطی را می توان به پنج نوع دسته بندی کرد:

۱-معادلات انتگرال فردهلم

۲-معادلات انتگرال ولترا

۳-معادلات انتگرال-دیفرانسیل

۴-معادلات انتگرال منفرد

۵-معادلات انتگرال فردهلم-ولترا

اکنون تعاریف و خواص عمده هر نوع را بررسی می کنیم:

۱-۲-۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پایین و بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \mu\int_a^b k(x,t)u(t)\,dt, \qquad a \le x, t \le b, \qquad (۱-۷)$$

که در آن هسته معادله انتگرال ، $k(x,t)$ و تـابع $f(x)$ از قبـل مـشخص هـستند و μ هـم یـک پارامتر معلوم است. معادله (۱-۷) را خطی می گویند. زیرا که تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شده است یعنی توان $u(x)$ یک است. بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدامیک از مقـادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته تقسیم می شوند:

۱-زمانی که $\phi(x) \equiv ۰$ معادله (۱-۷) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \mu\int_a^b k(x,t)u(t)\,dt = ۰. \qquad (۱-۸)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

۲-زمانی که $\phi(x) \equiv ۱$ معادله (۱-۷) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$u(x) = f(x) + \mu\int_a^b k(x,t)u(t)\,dt. \qquad (۱-۹)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می گویند.

۱-۲-۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل متعارفی معادلات انتگرال خطی ولترا که در آنها حد پایین عدد ثابت و حد بالای انتگرال گیری متغیر باشد به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \mu\int_a^x k(x,t)u(t)\,dt. \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ در زیر علامت به صورت خطی می باشد.

باید توجه کرد که (۱-۱۰) را می توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به طوری که هسته $k(x,t)$; $x \in [a,b]$، برای $t > x$ صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته بندی کرد:

۱-در حالتی که $\phi(x) \equiv ۰$، معادله (۱-۱۰) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \mu\int_a^x k(x,t)u(t)\,dt = ۰. \qquad (۱-۱۱)$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع اول می گویند.

۲-زمانی که $\phi(x) \equiv ۱$ ، آنگاه معادله (۱-۱۰) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$u(x) = f(x) + \mu\int_a^x k(x,t)\,u(t)\,dt. \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می نامند.

با توجه به معادلات (۱-۷) تا (۱-۱۲) می توان نتیجه گیری های زیر را ارائه نمود:

۱-« ساختمان معادلات فردهلم و ولترا »

در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول $u(x)$ بـه طـور خطـی زیـر علامـت انتگرال ظاهر می شود.

اما در مورد معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم ، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگـرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود.

۲-« حدود انتگرال گیری »

درمعادلات انتگرال فردهلم ، انتگرال گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می شود.امـا در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود فاصله انتگرال گیری متغیـر اسـت و معمـولاً حـد بـالای انتگرال گیری به صورت متغیر ظاهر می شود.

۳-« خاصیت خطی »

تابع مجهول $u(x)$ در معادله انتگرال ولترا و فردهلم در زیر علامت انتگرال با توان یـک ظـاهر مـی شود اما زمانی که به جای $u(x)$ عبارتی مانند $F(u(x))$ داشته باشیم، معادلات انتگـرال غیـر خطـی فردهلم و ولترا خواهیم داشت.

درزیر مثالهایی از معادلات انتگرال غیرخطی آورده شده است:

$$u(x) = f(x) + \mu\int_a^x k(x,t)\,u^2(t)dt. \qquad (۱۳-۱)$$

$$u(x) = f(x) + \mu\int_a^x k(x,t)\,e^{u(t)}dt. \qquad (۱۴-۱)$$

$$u(x) = f(x) + \mu\int_0^1 k(x,t)\sin(u(t))\,dt. \qquad (۱۵-۱)$$

در این مثالها به جای $u(t)$ به ترتیب $u^2(t)$، $e^{u(t)}$ و $\sin(u(t))$ آمده است.

۴-« منشأ ظهور معادلات انتگرال »

باید به این نکته مهم توجه کرد که معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی ، فیزیک ، شیمی و بیولوژی ظاهر می شود. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می روند. به طوری که اگر معادلات دیفرانسیل موردنظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم بوده و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

برحسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسأله ای ظاهر می شود روش ها و ایده های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار برده می شود.

۵-« خاصیت همگن بودن »

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (۱-۹) و معادله انتگرال ولترای نوع دوم (۱-۱۲) ، شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد ، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می نامند.در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیرهمگن می گویند.

۶-« رفتار تکین معادله انتگرال »

یک معادله انتگرال را منفرد می نامند اگر انتگرال موجود در معادله ناسره باشد این حالت معمولاً زمانی رخ می دهد که فاصله انتگرالگیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری نقاط از بازه مورد نظر یعنی $a \le t \le b$ بی کران باشد.

در ضمن دسته دیگری از معادلات مهم که به هر دو دسته از معادلات انتگرال ولترا و فردهلم مربوط می شود، معادلات انتگرال-دیفرانسیل می باشند که در قسمت بعد به معرفی آنها می پردازیم.

۱-۲-۳ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

ولترا در اوایل ۱۹۰۰ درحال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال-دیفرانسیل مواجه شد. در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می شود.در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می شود

تعدادی از پدیده ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرال-دیفرانسیل ظاهر می شوند.البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می گردند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال-دیفرانسیل آورده شده است:

$$u''(x) = -x + \int_{0}^{x} (x-t)\,u(t)\,dt, \qquad u(0)=0,\ u'(0)=1, \qquad (۱-۱۶)$$

$$u'(x) = -\sin(x) - 1 - \int_{0}^{x} u(t)\,dt, \qquad u(0)=1, \qquad (۱-۱۷)$$

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_{0}^{1} x\,t\,u(t)\,dt, \qquad u(0)=1, \qquad (۱-۱۸)$$

معادلات انتگرال (۱-۱۶)و(۱-۱۷) رامعادلات انتگـرال-دیفرانـسیل ولتراومعادلـه انتگـرال (۱-۱۸) را معادله انتگرال دیفرانسیل فردهلم می نامند.این تقسیم بندی بر اساس حدود انتگرالگیـری انجـام شـده است.

۱-۲-۴ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x)=\mu\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,t)u(t)\,dt, \qquad (۱۹-۱)$$

یا از نوع دوم

$$u(x)=f(x)+\mu\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,t)u(t)\,dt. \qquad (۲۰-۱)$$

را که در آنها حد پایین یا حد بالا یا هر دو حد انتگرالگیری نامتناهی و یا هسته معادلات انتگرال (۱-۱۹) و (۱-۲۰) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرالگیری نامتناهی باشد , معادلات انتگـرال منفرد می نامند.

در زیر چند مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد بودن آنها نامتناهی بودن بازه انتگرالگیری مربوط می باشد:

$$u(x)=۲x+۶\int_{۰}^{\infty}\sin(x-t)u(t)\,dt, \qquad (۲۱-۱)$$

$$u(x)=x+\frac{۱}{۳}\int_{-\infty}^{۰}\cos(x+t)u(t)\,dt, \qquad (۲۲-۱)$$

$$u(x)=۱+x^{۲}+\frac{۱}{۶}\int_{-\infty}^{\infty}(x+t)u(t)\,dt, \qquad (۲۳-۱)$$

علت منفرد نامیده شدن معـادلات انتگـرال زیـر ایـن اسـت کـه هـسته $k(x,t)$ در نقطـه $x=t$ نامتناهی می شود.

$$x^{۲} = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} u(t)\,dt, \tag{۲۴-۱}$$

$$x = \int_{۰}^{x} \frac{۱}{(x-t)^{\alpha}} u(t)\,dt, \qquad ۰ < \alpha < ۱, \tag{۲۵-۱}$$

$$u(x) = ۱ - ۲\sqrt{x} - \int_{۰}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} u(t)\,dt, \tag{۲۶-۱}$$

معادلات انتگرال شبیه به معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۵) را به ترتیب معادله انتگرال آبل و معادله انتگرال آبل تعمیم یافته می نامند.

این معادلات انتگرال منفرد ابتدا توسط یک ریاضیدان نروژی در سال ۱۸۲۳ بنام آبل معرفی شدند. معادلات انتگرال منفرد مشابه معادله (۱-۲۶) را معادله انتگرال ولترا نوع دوم منفرد به طور ضعیف می نامند.این گونه معادلات در کاربردهای مهندسی و فیزیک ، نظیر انتقال گرما ، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می شوند.

اکنون به بررسی چند مثال برای آشنایی با طبقه بندی معادلات انتگرال می پردازیم.

مثال ۱-۱: معادله انتگرال زیر را از نظر فردهلم یا ولترا بودن و از لحاظ خطی یا غیرخطی بودن و همچنین از جنبه همگن یا غیرهمگن بودن دسته بندی کنید:

$$u(x) = x - \frac{۱}{۶}x^{۳} + \int_{۰}^{x} (x-t)\,u(t)\,dt. \tag{۲۷-۱}$$

با توجه به حد بالای انتگرال یعنی x نشان دهنده آن است که معادله ولتراست و از نوع دوم هست. معادله خطی می باشد زیرا تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شده است. به علاوه حضور تابع $f(x) = x - \frac{x^{۳}}{۶}$ نشان می دهد که معادله غیر همگن است.

مثال ۱-۲: معادله زیر را دسته بندی کنید:

$$u(x)=\frac{1}{2}+x-\int_0^1 (x-t)\,u^2(t)\,dt. \qquad (۱-۲۸)$$

این معادله یک معادله انتگرال فردهلم است زیرا حدود انتگرالگیری ثابت هستند.اما از آنجا که تابع مجهول در زیر علامت انتگرال با توان ۲ ظاهر شده است بنابراین معادله غیرخطی است.با وجود تابع $f(x)=\frac{1}{2}+x$ خارج از علامت انتگرال معادله (۱-۲۸) غیرهمگن هم می باشد.

مثال ۱-۳: نوع معادله زیر را مشخص کنید:

$$u'(x)=1-\frac{1}{3}x^3+\int_0^x t\,u(t)\,dt, \qquad u(0)=0. \qquad (۱-۲۹)$$

به سادگی دیده می شود که معادله (۱-۲۹) عملگرهای انتگرال و دیفرانسیل هر دو را دارد و با توجه به اینکه حد بالای انتگرال هم یک متغیر است ، پس معادله (۱-۲۹) یک معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا می باشد. به علاوه معادله خطی می باشد زیرا $u(x)$ و $u'(x)$ به طور خطی در معادله ظاهر شده اند.

۱-۲-۵ معادلات انتگرال فردهلم-ولترا

معادله ای که به شکل زیر می باشد را یک معادله انتگرال فردهلم-ولترای خطی می نامند:

$$u(x)=f(x)+\mu_1\int_a^b k_1(x,t)\,u(t)\,dt+\mu_2\int_a^x k_2(x,t)\,u(t)\,dt. \qquad (۱-۳۰)$$

مثال ۱-۴: مثال زیر یک نمونه از این معادلات است:

$$u(x)=-x\,e^x+\int_0^1 u(t)\,dt+\int_0^x t\,u(t)\,dt \qquad (۱-۳۱)$$

توجه: یک جواب یک معادله انتگرال یا معادله انتگرال-دیفرانسیل روی فاصله انتگرالگیری یک تابع $u(x)$ است به طوری که آن تابع در معادله داده شده صدق کند. به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جایگذاری شود و در نتیجه دوطرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند آنگاه $u(x)$ جواب معادله می باشد.

مثال ۱-۵: نشان دهید که $u(x)=e^x$ یک جواب معادله انتگرال ولترا زیر است:

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)\,dt, \qquad (۱-۳۲)$$

حل: با جایگذاری $u(x)=e^x$ در طرف راست معادله (۱-۳۲) داریم:

$$RHS=1+\int_0^x e^t dt=1+[e^t]_0^x=e^x=u(x)=LHS$$

توجه: گاهی اوقات جواب به صورت شکل بسته برحسب توابع مقدماتی نظیر یک چندجمله ای یا یک تابع نمایی یا هذلولی یا مثلثاتی قابل نمایش است. همچنین گاهی اوقات به شکل یک سری معمولی که برای محاسبه تقریبی به کار برده می شود که در این حالت هرچه جملات سری بیشتر باشد دقت نتیجه حاصل بهتر خواهد بود.

۱-۳ روش های تبدیل معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل به یکدیگر

۱-۳-۱ تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش روشی که معادلات انتگرال ولترا نوع دوم را به معادلات دیفرانسیل معادل تبدیل می کند ارائه می شود.

برای مشتق گرفتن از $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)dt$ نسبت به x قاعده لایب نیتز به صورت زیر به کار می رود: