بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد
ریاضی محض (آنالیز)

موضوع:

وجود و عدم وجود جواب های رده ای از معادلات بیضوی

استاد راهنما :
پروفسور قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور :
خانم دکتر سمیه خادملو

اساتید داور:
دکترمحسن علی محمدی
دکترحسن حسین زاده

دانشجو :
سعید شکوه

شهریور ۱۳۸۷

قدردانی و سپاس:

پیش از هر چیز خداوند متعال را شاکرم که همواره، یار و پشتیبان من بوده و هیچگاه من را در مسیر

سخت زندگی تنها نگذاشته است.
مراتب سپاس و تشکر را از استاد راهنمای بزرگوار

جناب آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی

ابراز می دارم، که با راهنمایی های بی شائبه مرا در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند.
همچنین کمال تشکر را از استاد مشاور محترم

خانم دکتر سمیه خادملو

دارم، که مرا در پیشبرد این پایان نامه یاری نمودند.

در پایان از خانواده عزیز و مهربانم که همواره با حمایتهای دلسوزانه موجبات دلگرمی ام را فراهم نموده اند، مراتب قدردانی خویش را ابراز می دارم .

تقدیم به همسرم

چکیده:

در این پایان نامه، ابتدا وجود و عدم وجودجواب برای مسأله ی مقدار مرزی:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)\, f(u), \quad u \geq 0 \quad in\ \Omega, \\ u(x) = +\infty, \qquad on\ \partial\Omega, \end{cases}$$

را بررسی کرده سپس مسأله ی فوق را تحت شرط Keller-Osserman مطالعه می کنیم.

در فصل سوم به بررسی وجودجواب های مسائل زیر می پردازیم:

$$\begin{cases} \Delta u \pm \lambda |\nabla u|^{q} = k(x)\, g(u), \qquad x \in \Omega, \\ u(x) = +\infty, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

در فصل آخرتعمیم مسائل مطرح شده در فصلهای قبل را به شکل زیر مشاهده می کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_p u = a(x)\, f(u), \quad u \geq 0 \quad x \in \Omega, \\ u(x) = +\infty, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \Delta_m u \pm \lambda |\nabla u|^{q(m-1)} = k(x)\, g(u), \qquad x \in \Omega, \\ u(x) = +\infty, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

کلمات کلیدی: معادلات p-لاپلاس، جوابهای مثبت، روش جواب بالایی و پایینی .

فهرست مندرجات

مقدمه:

در میان شاخه های مختلف ریاضی، آنالیز غیر خطی یکی از مهمترین و شاخص ترین آن می باشد. موفقیت این رشته به دلیل کاربرد وسیعی است که در پدیده های مختلف فیزیکی، مهندسی مکانیک کوانتومی و اقتصاد دارد. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزیی برمی خوریم. در سالهای اخیر بسیاری از پژوهشگران و آنالیزدانان، به مطالعه رفتار جوابهای دسته ای از معادلات دیفرانسیل جزیی از نوع بیضوی با شرط مرزی، به کمک آنالیز غیر خطی پرداخته اند. آنالیز غیر خطی و حساب تغییرات هم اکنون به عنوان یکی از شاخه های بسیار جذاب و پر کار در زمینه مطالعه معادلات بیضوی با شرط مرزی، تبدیل شده است.

در این پایان نامه در فصل دوم وجود و عدم وجود جواب را برای رده ای از معادلات لاپلاسین تحت شرط $Keller - 0sserman$ بررسی می کنیم سپس در فصل سوم وجودجوابهای بزرگ برای یک مسئله ی نیم خطی بیضوی بررسی کرده و در فصل چهارم به تعمیم این مسائل به حالت p − لاپلاسین می پردازیم.

کار اصلی ما مطالعه مقالات زیر می باشد:

Existence and nonexistence of blow-up boundary solutions for sublinear elliptic equations [9]

Large solutions of semilinear elliptic equations under the Keller-Osserman condition [11]

Existence of large solutions for a semilinear elliptic problem via explosive sub-supersolutions [22]

Existence of large solutions for a quasilinear elliptic problem via explosive sub-supersolutions [15]

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم. ابتدا معادلات دیفرانسیل جزیی و برخی کاربردهای آن را معرفی می کنیم سپس عملگر بیضوی، جواب بالایی و پایینی انفجاری را تعریف نموده و مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^p، سوبولوف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت.

۱. ۱ تعاریف و مفاهیم پایه ای

تعریف ۱ . ۱ .۱ (معادله دیفرانسیل):

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند. معادلات دیفرانسیل کاربرد زیادی در ریاضیات، فیزیک، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم دارند.

تعریف ۱ . ۱ .۲ (معادله دیفرانسیل جزیی):

هر رابطه بین متغیرهای مستقل $x_1,\dots,x_n$ و متغیر های تابع u و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل جزیی گویند. اگر $u = f(x_1,\dots,x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد، مشتق مرتبه kام u نسبت به مولفه x_i را به صورت $\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}$ نشان می دهیم، هرگاه بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده k باشد، معادله دیفرانسیل از مرتبه k است.

تعریف ۱ .۱ .۳ (دامنه):

فرض کنیم R^n فضای اقلیدسی $n-$ بعدی $(n \geq 2)$ با نقاط $(x_1,...,x_n)$ که $x_i \in R$ و $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ باشد در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد. نقاط x و y در Ω با یک منحنی در Ω می توانند به هم وصل شوند و برای هر $x \in \Omega$ یک $r > 0$ به اندازه کافی کوچک وجود دارد به طوری که $B_r(x) \subset \Omega$. ($B_r(x)$ یک گوی باز در R^n به شعاع r و مرکز x است.)

تعریف ۱ .۱ .۴ (نقطه حدی، بستار و مرز):

نقطه $x \in X$ یک نقطه حدی Ω گویند هرگاه برای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B_r^0(x) \cap \Omega \neq \phi$$

که در آن $B_r^0(x)$ یک همسایگی محذوف به شعاع r و مرکز x است. مجموعه نقاط حدی Ω را با Ω' نشان می دهیم. بستار Ω را که با $\overline{\Omega}$ نشان می دهیم عبارت است از اجتماع نقاط Ω و نقاط حدی آن، یعنی :

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$$

همچنین مرز Ω که با $\partial\Omega$ نشان می دهیم عبارت است از :

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega,$$

اگر $\Omega = R^n$، آنگاه $\partial\Omega = \phi$.

تعریف ۱ .۱ .۵

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω با $C(\Omega)$ نشان می دهیم. برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشان دهنده توابعی هستندکه همه مشتقات تا مرتبه k ام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی هستند که برای هر عدد طبیعی k متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. $C^k(\overline{\Omega})$مجموعه توابعی در $C^k(\Omega)$ است که تمام مشتقات نا بیشتر از k آنها به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می یابند. پاره ای از اوقات نیازمند به توابعی هستیم که در آن Ωکراندار باشند ولی به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع نیابند. این گونه توابع را با $C_B(\Omega)$ نشان می دهیم وبه طور مشابه $C_B^k(\Omega)$ نیز قابل تعریف است. $C(\Omega, R^n)$ نشان دهنده توابع برداری n - بعدی روی Ω می باشد.

تعریف ۱ . ۱ .۶ :

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می شود :

$$supp \quad f = \overline{\{x \in R^n \ : \ f(x) \neq 0\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$ اگر xعضو K نباشد آنگاه $f(x) = 0$. همان طور که می دانیم (طبق قضیه هاینه برل)مجموعه های بسته و کراندار در R^n فشرده می باشند بنابراین اگر محمل f کراندار باشد می گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با

$C_0(R^n)$نمایش می دهیم. به طور مشابه $C_0(\Omega)$ نشان دهنده توابع پیوسته روی Ω می باشد که محمل آنها یک زیر مجموعه فشرده از Ωاست. همچنین $C_0^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

تعریف ۱ . ۱ .۷ (تابع آزمون):

تابع f ، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند هرگاه $f \in C^{\infty}(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد به طوری که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با $C_0^{\infty}(\Omega)$ نشان می دهند

تعریف ۱ . ۱ . ۸ (مجموعه های اندازه پذیر و توابع اندازه پذیر):

فرض می کنیم Ω یک دامنه در R^n و μ اندازه لبگ در R^n باشد. مجموعه هایی کـه روی آنهـا μ خـوش تعریـف اسـت را مجموعـه هـای انـدازه پـذیر مـی نـامیم. توابـع f را کـه بـرای آنهـا مجموعـه $\{x \in R^n : f(x) < \alpha\}$ برای هر αحقیقی یک مجموعه اندازه پذیر باشد، توابع اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۱ . ۱ .۹ (فضای $L^p(\Omega)$):

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و p یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین u یـک تـابع انـدازه پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می کنیم:

$$\| u \|_p = \{\int_{\Omega} |u(x)|^{p} dx\}^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ متشکل از همه u هایی می گوییم که برای آنها داشته باشیم:

$$\| u \|_p < \infty$$

$\| u \|_p$ را نرم L^p تابع u می نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می گیریم که به طور تقریباً همه جا با هم

برابر باشند ، یعنی اندازه نقاطی که با هم برابر نیستند برابر با صفر باشد.

می گوییم $u = 0$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x) = 0$ به طور تقریبا همه جا در Ω . به وضوح اگر $u \in L^p(\Omega)$ و

$c \in R$ آنگاه $cu \in L^p(\Omega)$. به علاوه اگر $u, v \in L^p(\Omega)$ آنگاه داریم (رجوع کنید به [16]) :

$$| u(x)+v(x) |^p \le \left(| u(x)+v(x) | \right)^p \le 2^p \left(|u(x)|^p + | v(x) |^p \right)$$

پس $u + v \in L^p(\Omega)$ و بنابراین $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۱ .۱ .۱۰ (انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω):

مجموعه همه توابع تعریف شده روی قلمرو Ω که انتگرالشان تعریف شده و متناهی باشد را توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند روبه رو می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω انتگرال پذیرهستندولزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L^1_{loc}(\Omega)$ نشان می دهیم. چون توابع پیوسته روی مجموعه های

فشرده مقدار بیشینه و کمینه خود را می گیرند بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} C(\Omega) \subset L^1(\Omega) \\ C_0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \end{cases}$$

تعریف ۱ . ۱ .۱۱ (سوپریمم اساسی):

فرض کنید u یک تابع اندازه پذیر روی Ω باشد. می گوییم u به طور اساسی کراندار است هر گاه یک ثابت $\alpha \in R$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $|u(x)| \le \alpha$ به طور تقریبا همه جا در Ω بر قرار باشد به بزرگترین کران پایین(اینفیمم) چنین α هایی سوپریمم اساسی می گوییم و آن را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$ess \sup_{x \in D} |u(x)| = \inf \{ \alpha : \mu(\{ x : |u(x)| > \alpha \}) = 0 \}$$

تعریف ۱ .۱ .۱۲ (فضای $L^\infty(\Omega)$):

$L^\infty(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها متناهی باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\| u \|_\infty = ess \sup_{x \in D} |u(x)|$$

تعریف ۱ .۱ .۱۳ (فضای $L^p_{loc}(\Omega)$):

برای $1 \le p < \infty$ ، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که

برای هر زیر مجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K |u(x)|^p \, dx < \infty$$

۱ .۲ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱ .۲ .۱ (فضای خطی نرمدار وباناخ):

فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار نامیم هر گاه نرم روی X که بانگاشت

$$\begin{cases} P: X \to R \\ x \to \| x \| \end{cases}$$

معرفی می شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\| x \| \geq 0$ برای هر $x \in X$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$

۲) $\| a x \| = | a | \| x \|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$

۳) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ برای هر $x, y \in X$

یک فضای نرمدار خطی X، تحت متر تعریف شده در زیر یک فضای متریک می باشد.

$$d(x, y) = \| x - y \| \qquad ; \qquad \forall x, y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\} \subset X$ همگرا به عنصر $x \in X$ است، هر گاه:

$$\| x_n - x \| \to 0$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هر گاه $\| x_n - x_m \| \to 0$ وقتی که $m, n \to \infty$. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد. یعنی هر دنباله کوشی در X با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۱ .۲ .۲ (فضای ضرب داخلی و هیلبرت):

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم هرگاه به هر زوج مرتب ازبردارهای x, y در H یک عدد حقیقی مانند $< x, y >$ به نام حاصلضرب داخلی x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد:

۱) برای هر $x, y \in \Omega$، $< x, y > = < y, x >$،

۲) برای هر $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ و هر $x_1, x_2, y \in H$ داشته باشیم :

$$< \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y > = \lambda_1 < x_1 , y > + \lambda_2 < x_2 , y >$$

۳) برای هر $x \in H$, $< x, x > \geq 0$،

۴) $x = 0$ اگرو تنها اگر $< x, x > = 0$.

بنابر خاصیت (۳) می توان $\| x \|$ یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نا منفی $< x, x >$ تعریف کرد. یعنی :

$$\| x \| = < x, x >^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف ۱. ۲. ۱ برقرارند. برای اثبات نا مساوی مثلثی مطـابق نامساوی کوشی- شوارتز به ازای هر $x, y \in H$ داریم :

$$|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$$

و همچنین با کمک نا مساوی $< x, y > \leq |< x, y >|$ به دست خواهیم آورد :

$$\| x + y \|^2 = < x + y, x + y > = \| x \|^2 + 2 < x, y > + \| y \|^2 \leq \left(\| x \| + \| y \| \right)^2$$

پس :

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای نرمدار خطی برقرار می باشد لذا یک فضای ضـرب داخلـی H، یـک فضای نرمدار خطی نیز است .هرگاه این فضای داخلی تام باشد آن را یک فضای هیلبرت می گویند. هرگـاه $< x, y > = 0$ برای هر زیر فضای M از H، متمم متعامد را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$M^{\perp} = \left\{ x \in H \;\middle|\; < x, y > = 0, \qquad \forall\, y \in M \right\}$$

به وضوح $M^{\perp}$ یک زیر فضای بسته ای از H است. اگر M نیز بسته باشـد آنگـاه H جمـع مـستقیم M و $M^{\perp}$ است می نویسیم (رجوع کنید به[16]) :

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

۱ .۳عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه واگرایی

تعریف ۱ .۳ .۱(بردار گرادیان):

اگر u در R^n تعریف شده باشد گرادیان u در $x=(x_1,...,x_n)$ برداری است در R^n که با

$$\nabla u = grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$ تعریف می شود.

تعریف ۱. ۳. ۲ (واگرایی):

اگر $u=(u_1,...,u_n)$ یک میدان برداری باشد واگرایی u در $x=(x_1,...,x_n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$div\, u = \nabla.u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+...+\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

تعریف ۱ . ۳ .۳ (عملگرهای بیضوی):

فرض کنید Ω یک ناحیه هموار و کراندار در R^n باشد.

مسئله ای را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x\in\Omega, \\ Bu(x) = 0 \quad , & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{۱ .۱}$$

که در آن عملگر دیفرانسیلی L به صورت زیر تعریف می شود :

$$L = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{N} a_i\,\partial_i + c \tag{۲ .۱}$$

۱ .۳عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

عملگر فوق را در نقطه $x=(x_1,\dots,x_N)\in\Omega$ بیضوی گوییم اگر و تنها اگر ضریب مثبت $\mu(x)$ موجود باشد به طوریکه

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \mu(x)\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2$$

برای هر بردار حقیقی $(\xi_1,\dots,\xi_N)$.

عملگر Lرا بر Ω بیضوی گوییم هرگاه بر هر نقطه از Ω بیضوی باشد.

همچنین این عملگر را بیضوی یکنواخت می نامیم اگر در هر نقطه از Ωبیضوی باشد و یک ثابت μ_0موجود باشد به طوری که $\mu(x)\geq\mu_0$ برای هر $x\in\Omega$.

عملگر بیضوی یکنواخت Lرا از نوع دیورژانس گوییم اگر:

$$L(u)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)cu$$

با ضرایب کراندار $a_{ij}=a_{ji}$ باشد.

فرض کنید ضرایب L یعنی a_i، a_{ij} و c همگی در $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ باشند، عملگر مرزی Bبه صورت زیر تعریف می شود:

$B=b_0+b_1\frac{\partial}{\partial n}$ تعریف می شود که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ بیانگر مشتق در جهت بردار یکه نرمال خارجی بر Ωمی باشد. در حالتی که $b_1=0$ و $b_0=1$ عملگر (۱. ۱) را یک معادله بیضوی با شرط مرزی