وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه دکتری
رشته ریاضی محض

عنوان :

نتایجی درباره نقاط بهترین تقریب

استاد راهنما :

دکتر شهرام رضاپور

استاد مشاور :

دکتر محمد حسین ستاری

پژوهشگر :

مجید درفش پور

شهریور / ۱۳۹۰

تبریز / ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

باز فرصتی شد که ژرفتر بنگریمش. تلاشمان در راه علم چیزی نبود جزء ستایش او و حجتی دیگر در وحدانیتش. بار خدایا تلاشمان را اعتنای رحمتت قرار بده. پاک و منزه شناختیم که ما را از آن پاکی لایتناهیت سیراب گردان. از تو سپاسگزارم که همواره امید و دلگرمی من بودی و در هر حال کمک و یار بودی.

سپاسگزارم از تمام آموزگارانم که گنجینه‌های دانش ریاضی را در اختیارم قرار دادند تا داناتر شوم. همچنین کمال تشکر را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر شهرام رضاپور دارم که در این مدت هم معلم و هم برادری بزرگ بوده و با سعه صدر نقایص بنده را تحمل نمودند.

تقدیم به دو نور زندگی من

پدر و مادر بزرگوارم

فهرست مندرجات

چکیده

وجود روشی جهت یافتن نقاط بهترین تقریب یک خود نگاشت از دو رویکرد قابل تامل است. اول اینکه مفهوم نقطه بهترین تقریب یک خودنگاشت، تعمیم مفهوم نقطه ثابت است و دوم، قضایای نقطه بهترین تقریب، در مقایسه با قضایای بهترین تقریب این برتری ارزشمند را دارند که از شرط پیوستگی نگاشتها کاسته و روشی برای تقریب زدن نقطه تقریب و بهترین تقریب را بدست می‌دهد.

در این رساله وجود نقطه بهترین تقریب برای نگاشتهای دوری از دو رویکرد متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. در رویکرد اول از مفاهیم توپولوژیکی برای یافتن این نقاط استفاده نموده و در رویکرد دوم از ویژگی‌های توپولوژیکی کاسته و روابط ترتیب را جایگزین می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: فضاهای باناخ، نقطه بهترین تقریب، نگاشت دوری، نگاشت $\varphi-$ انقباضی دوری، نقطه ثابت، پیوستگی مداری، فضای متریک مرتب جزئی.

پیشگفتار

در سال ۱۸۸۶ هانری پوانکاره[۱] در بررسی مباحثی نظیر قضیه پوانکاره–بندیکسون[۲] نتیجه‌ای را ثابت کرد که معادل قضیه نقطه ثابت براور[۳] است. حالت اصلی قضیه معروف به نقطه ثابت براور اولین‌بار در سال ۱۹۱۰ توسط آدامار[۴] و در سال ۱۹۱۲ توسط براور ثابت شد. در واقع این اولین تلاقی مباحث معادلات دیفرانسیل و آنالیز ریاضی بود. البته مباحث نقطه ثابت در سایر زمینه‌ها نظیر سیستمهای‌دینامیکی، اقتصاد، نظریه بازی‌ها و بهینه‌سازی پرکاربرد است که در این زمینه می‌توان به [۱۸]، [۳۴] و [۶۲] مراجعه کرد.

بعد از قضیه براور، قضایای نقطه ثابت در رده‌های کلی زیر مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

(۱) نقطه ثابت عطیه–بوت[۵]: این قضیه که در سال ۱۹۶۰ اثبات شد، تعمیم قضیه نقطه ثابت لفشتز[۶] برای منیفلدهای هموار است (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱۳] مراجعه شود).

(۲) قضیه نقطه ثابت بورل[۷]: این قضیه تعمیم قضیه لی–کلچین[۸] در هندسه جبری است (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱۱] مراجعه شود).

(۳) قضیه نقطه ثابت براور: اثبات اولیه این قضیه متکی به مفاهیم توپولوژیکی است. همچنین

[۱] Henri Poincare
[۲] Poincare-Bendixson
[۳] Brouwer
[۴] Hadamard
[۵] Attiyah-Bott
[۶] Lefschetz
[۷] Borel
[۸] Lie-Kolchin

این قضیه توسط همولوژی‌ها در توپولوژی‌جبری، قضیه استوکس [۹] در هندسه دیفرانسیل، توپولوژی ترکیبیاتی که منجر به اثبات لم اسپرنر [۱۰] شد، درونبری‌های دیفرانسیل‌پذیر [۱۱] در توپولوژی دیفرانسیل که معروف به قضیه هرش [۱۲] است، نظریه بازی‌ها بر پایه بازی هکس [۱۳] که معروف به قضیه هکس بوده و بکارگیری دستگاه‌های منطقی در منطق ریاضی—در حالت‌های مختلف برای مفروضات قضیه—مورد بررسی قرار گرفته است (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۷۵]، [۳٦]، [۴۱]، [۴۹]، [۲۳]، [۴۳]، مراجعه شود).

(۴) قضیه نقطه ثابت کریستی [۱۴]: این قضیه که در سال ۱۹۷٦ توسط کریستی ثابت شد، تعمیم قضیه نقطه ثابت باناخ [۱۵] است(برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۲۲] مراجعه شود).

(۵) قضیه نقطه ثابت تیخونوف [۱٦]: این قضیه که قضیه نقطه ثابت را صرفا توسط مفاهیم آنالیز تابعی نظیر فضای دوگان و دوگان مضاعف بررسی می‌کند، توسط تیخونوف در سال ۱۹٦۰ مورد بررسی قرار گرفت (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۳۸] مراجعه شود).

(٦) قضایای نقطه ثابت در فضاهای ابرمحدب [۱۷]: این قضیه در سال ۱۹۵٦ توسط آرانژان [۱۸] و پانیچ پاکدی [۱۹] مورد بررسی قرار گرفت (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱۲] مراجعه شود).

(۷) قضیه نقطه ثابت کاکوتانی [۲۰]: این قضیه که تعمیم قضیه نقطه ثابت براور به نگاشتهای چندگانه است، توسط کاکوتانی در سال ۱۹۴۰ مورد بررسی قرار گرفت(برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۴۸] مراجعه شود).

---

[۹] Stockes
[۱۰] Sperner
[۱۱] Diffrentiable retraction
[۱۲] Hirsch
[۱۳] Hex
[۱۴] Caristi
[۱۵] Banach
[۱٦] Tichonoff
[۱۷] Hyperconvex
[۱۸] Aronszajn
[۱۹] Panitchpakdi
[۲۰] Kakutani

(۸) قضیه نقطه ثابت کلین[۲۱]: این قضیه که در سال ۱۹۳۰ توسط کلین در مباحث منطق ریاضی مورد بررسی قرار گرفت، بعدها در سال ۱۹۵۵ در آنالیز ریاضی توسط آلفرد تارسکی با بکارگیری رابطه ترتیب و جایگزین کردن آن با روابط توپولوژیکی، بعنوان تعمیم قضیه نقطه ثابت براور ثابت شد (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۷۷] و [۵۰] مراجعه شود).

(۹) قضیه نقطه ثابت و نظریه درجه[۲۲]: با بکارگیری نظریه درجه می‌توان تحت مفروضات خاص توپولوژیکی تعداد نقاط ثابت یک نگاشت یا چندنگاشتی را تخمین زد (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۴۰] مراجعه شود).

در فصل دوم این رساله، وجود نقاط بهترین تقریب برخی نگاشتها با دو رویکرد و نیز تعمیم آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم، مفاهیم توپولوژیک فصل دوم جای خود را با روابط ترتیب عوض می‌کنند.

نظریه بهترین تقریب در ریاضیات مربوط به تقریب زدن توابع توسط توابع ساده‌تر، توصیف ویژگی‌ها و خطای حاصل از تقریب است. در واقع برای تابع مفروض f روی فضای متریک مفروض X، بهترین تقریب عبارت است از یافتن تابعی ساده‌تر مانند g که به اندازه کافی در فضای X به f نزدیک باشد.

قضایای نقطه تقریب فقط به بررسی وجود نقطه تقریب پرداخته و روشی برای یافتن یا تقریب زدن آن ارائه نمی‌کند، در حالیکه قضایای نقطه بهترین تقریب یک نگاشت در جهت یافتن روشی برای وجود و تقریب زدن نقطه بهترین تقریب آن نگاشت هستند. همچنین نقطه بهترین تقریب حالت تعمیم یافته نقطه ثابت است. در سال ۲۰۰۳، ائلدرد[۲۳]، کرک[۲۴] و ویرامانی[۲۵] طیف جدیدی از نگاشت‌ها را بنام نگاشت‌های غیرانبساطی توسیعی نسبی[۲۶] را برای بررسی نقطه بهترین تقریب اینگونه نگاشت‌ها معرفی کردند. در ادامه، ائلدرد و ویرامانی وجود نقطه بهترین تقریب را برای نگاشتهای انقباضی دوری در فضاهای بطور یکنواخت محدب مورد بررسی قرار دادند. در ادامه کار آنها و در راستای

[۲۱] Kleene
[۲۲] Degree Theory
[۲۳] Eldered
[۲۴] Kirk
[۲۵] Veeramani
[۲۶] Reletivly nonexpansiv

پاسخ به پرسش مطرح شده در [۳۰] مبنی بر وجود نقطه بهترین تقریب در فضاهای باناخ بازتابی برای نگاشتهای انقباضی دوری، شهزاد[۲۷] و الثقفی [۲۸] [٦] وجود نقطه تقریب را برای نگاشتهای $\varphi-$ انقباضی دوری که کلی‌تر از نگاشتهای دوری انقباضی هستند را مورد بررسی قرار دادند و بررسی وجود نقطه بهترین تقریب را در فضاهای باناخ برای نگاشتهای $\varphi-$انقباضی دوری، بعنوان یک پرسش مطرح کردند که فصل دوم رساله به بررسی جواب این پرسش می‌پردازد.

تاکنون بکارگیری روابط ترتیب در فضاهای متریک عموما برای یافتن نقطه ثابت بوده‌است. در مباحث فصل سوم روابط ترتیب روی فضا برای یافتن نقطه بهترین تقریب که تعمیمی از نقطه ثابت است مورد بررسی قرار گرفته و سعی شده در مورد پیوستگی نگاشت‌ها، شرطهای معادلی حاصل شود.

فصل چهارم رساله به بررسی پایداری تساوی‌های تابعی می‌پردازد و نقطه ثابت هیبریدی را برای دو تابع که در شرایط یکریختی صدق می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهد.

شایان ذکر است که مقالاتی که از این رساله حاصل شده‌اند، عبارتند از [۷۱]، [۷۲]، [۲۴]، [۲۵].

---

[۲۷] Shahzad

[۲۸] Al-Taghafi

فصل ۱

مقدمه

مقدمه

۱.۱ تعریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک خود نگاشت باشد. عضو $x \in X$ را یک **نقطه ثابت**[۱] T نامند هرگاه $Tx = x$.

تعریف ۲.۱.۱ **تابع چند مقداری**[۲] φ از مجموعه X به‌توی مجموعه Y، تناظری است که به هر عضو x، زیرمجموعه ناتهی $\varphi(x)$ از Y را نسبت می‌دهد. این تناظر را با نماد $\varphi : X \to 2^Y$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱ $x \in X$ را نقطه ثابت چندنگاشتی $\varphi : X \to 2^X$ می‌نامند هرگاه $x \in \varphi(x)$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد، $A, B \subseteq X$ و $x \in A$. $y \in B$ را **بهترین تقریب** [۳] x نامند هرگاه $d(x, y) = d(x, B)$، که در آن

$$d(x, B) = \inf\{d(x, z) : \quad z \in B\}.$$

[۱] Fixed point
[۲] Multifunction
[۳] Best Approximation

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $A,B\subseteq X$. نگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ را **دوری**[۴] نامند هرگاه $T(A)\subseteq B$ و $T(B)\subseteq A$.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک، $A,B\subseteq X$ و $T:A\cup B\to A\cup B$ یک نگاشت دوری باشد. عضو $x\in A$ را یک **بهترین نقطه تقریب**[۵] نگاشت T نامند هرگاه

$$d(x,Tx)=d(A,B),$$

که در آن

$$d(A,B)=\inf\{d(y,z):\quad y\in A,\quad z\in B\}.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $A,B\subseteq X$. در این‌صورت نگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ را $\varphi-$ **انقباضی دوری**[۶] نامند هرگاه $T(A)\subseteq B$، $T(B)\subseteq A$ و نگاشت اکیدا صعودی $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ چنان موجود باشد که برای هر $x\in A$ و $y\in B$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty)\leq d(x,y)-\varphi(d(x,y))+\varphi(d(A,B)).$$

تعریف ۸.۱.۱ $(X,\leq)$ را **مجموعه مرتب جزئی**[۷] نامند هرگاه X ناتهی و $\leq$ یک رابطه بازتابی [۸]، ترایا[۹] و پادمتقارن[۱۰] روی X باشد.

تعریف ۹.۱.۱ $(X,d,\leq)$ را **فضای متریک مرتب جزئی**[۱۱] نامند هرگاه (X,d) فضای متریک و $(X,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

---

[۴] Cyclic map

[۵] Best proximity point

[۶] cyclic φ-contraction map

[۷] Partially ordered set

[۸] Reflexive

[۹] Transitive

[۱۰] Anti-symmetric

[۱۱] Partially ordered metric space

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرتب باشد. گوییم X یک **مشبکه**[۱۲] است هرگاه برای هر دو عنصر دلخواه a و b در X کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران بالا در X باشند. مشبکه X را کامل گویند هرگاه هر زیر مجموعه از X مانند A دارای کوچکترین و بزرگترین کران بالا در A باشد.
فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. همچنین فرض کنید ۲^X مجموعه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی X باشد. مجموعه تمام زیر **مجموعه‌های پایا تحت** T[۱۳] X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(T) = \{Y \in ۲^X : T(Y) \subseteq Y\}.$$

برای دو نگاشت $T : X \to X$ و $S : Y \to Y$، نگاشت $(T \times S) : X \times Y \to X \times Y$ را به‌صورت $T \times S(x, y) = (Tx, Sy)$ تعریف می‌کنیم. همچنین برای مجموعه مرتب $(X, \leq)$ تعریف می‌کنیم

$$X_{\leq} = \{(x, y) \in X \times X : x \leq y \ \text{ یا } \ y \leq x\}.$$

فرض کنید $(X, d, \leq)$ یک فضای متریک مرتب و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. به‌ازای هر زیر مجموعه ناتهی C از X و هر $x^* \in X$ تعریف می‌کنیم

$$E_{T,C}(x^*) = \{x \in C : \lim_{n\to\infty} T^{۲n} x = x^*\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ گوییم فضای متریک مرتب $(X, d, \leq)$ دارای **ویژگی** (C)[۱۴] است هرگاه برای هر دنباله یکنوای $\{x_n\}$ در X که به‌ازای یک $x \in X$، $x_n \to x$، زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{n_k}\}$ موجود باشد که تمام عناصر آن با x قابل مقایسه باشند.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای متریک مرتب $(X, d, \leq)$ را **منظم**[۱۵] نامند هرگاه هر دنباله یکنوای کراندار در X همگرا باشد.

---

[۱۲] Lattice
[۱۳] Invariant
[۱۴] C-property
[۱۵] Regular

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. گوییم T **پیوسته مداری**[۱۶] است هرگاه برای هر $x \in X$ و دنباله $\{n(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$، اگر $a \in X$ چنان موجود باشد که $T^{n(i)}x \to a$، آنگاه داشته باشیم $T^{n(i)+1}x \to Ta$.

فرض کنید X یک فضای نرمدار روی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ باشد. برای هر $x^* \in X^*$، نگاشت $p_{x^*}(x) : X \to \mathbb{C}$ را برای هر $x \in X$، با ضابطه $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که p_{x^*} یک **نیم نرم** است و مجموعه $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : \quad x^* \in X^*\}$ تشکیل یک توپولوژی روی X را می‌دهد که آنرا **توپولوژی ضعیف**[۱۷] روی X می‌نامند. توپولوژی ضعیف روی X، ضعیفترین توپولوژی است که تحت آن تمام تابعکهای خطی روی X پیوسته باقی می‌مانند. همچنین گوییم دنباله $\{x_n\} \subseteq X$ **بطور ضعیف همگرا**[۱۸] به $x \in X$ است، و با نماد $x_n \xrightarrow{w} x$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$. همچنین گوییم نگاشت $T : X \to X$ **بطور ضعیف پیوسته**[۱۹] است هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\} \subseteq X$ که $x_n \xrightarrow{w} x$، داشته باشیم $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

تعریف ۱۴.۱.۱ فضای باناخ X را **اکیدا محدب**[۲۰] گویند، اگر برای هر $x, yinX$ که $||x|| = ||y|| = 1$ و $x \neq y$ داشته باشیم، $||x+y|| < 2$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فضای باناخ X را **بطور یکنواخت محدب**[۲۱] گویند، هرگاه نگاشت اکیدا صعودی $\delta : (0,2] \to [0,1]$ موجود باشد که برای $x, y, p \in X$، $R > 0$ و $r \in [0, 2R]$ اگر

$$||x-p|| \leq R, \quad ||y-p|| \leq R, \quad ||x-y|| \geq r$$

[۱۶] Orbitally continuous

[۱۷] Weak topology

[۱۸] Weakly convergence

[۱۹] Weakly continuous

[۲۰] Strictly convex

[۲۱] Uniformly convex

آنگاه

$$||\frac{x+y}{۲}-p|| \leq (۱-\delta(\frac{r}{R}))R;$$

تذکر ۱.۱.۱ هر فضای باناخ بطور یکنواخت محدب X بازتابی است، ولی عکس آن لزوما برقرار نیست.

برهان. به فصل اول از مرجع [۳۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۶.۱.۱ زیر مجموعه K از فضای متریک X را **بطور کراندار فشرده**[۲۲] هرگاه هر دنباله کراندار در K زیردنباله‌ای همگرا به یک نقطه از K داشته باشد. ۱

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار، $A,B \subseteq X$ و $T: A\cup B \to A\cup B$ یک نگاشت دوری باشد. گوییم T دارای **ویژگی همتقریب**[۲۳] است هرگاه

$$x_n \xrightarrow{w} x \in A\cup B, ||x_n - Tx_n|| \to d(A,B),$$

آنگاه داشته باشیم

$$||x-Tx|| = d(A,B).$$

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید X یک فضای متریک، A,B زیر مجموعه‌های ناتهی از X باشند. فرض کنیم

$$A_\circ = \{x \in A : d(x,y) = d(A,B) : \quad y \text{ برای عضوی از } B \text{ مانند } \}$$

[۲۲] Boundedly compact

[۲۳] Proximal property

و

$$B_\circ = \{x \in B : d(x,y) = d(A,B) : \quad \text{برای عضوی از } A \text{ مانند } y\}$$

زوج $(x,y) \in A_\circ \times B_\circ$ را که $d(x,y) = d(A,B)$ **زوج بهترین تقریب**[۲۴] برای A و B گویند.

تعریف ۱۹.۱.۱ زوج محدب $(K_۱, K_۲)$ را در یک فضای باناخ گوییم **ساختار نرمال هم‌تقریب**[۲۵] دارند هرگاه زوج هم‌تقریب محدب و کراندار $(H_۱, H_۲) \subseteq (K_۱, K_۲)$ که $d(H_۱, H_۲) = d(K_۱, K_۲)$ و $\delta(H_۱, H_۲) > d(H_۱, H_۲)$، $(x_۱, x_۲) \in H_۱ \times H_۲$ موجود باشد که

$$\delta(x_۱, H_۲) < d(H_۱, H_۲), \delta(x_۲, H_۱) < d(H_۱, H_۲)$$

که $\delta(H_۱, H_۲) = \sup\{||h_۱ - h_۲|| : h_۱ \in H_۱, h_۲ \in H_۲\}$.

تعریف ۲۰.۱.۱ زوج (A,B) را **زوج هم‌تقریب**[۲۶] گویند هرگاه زوج بهترین تقریب (a,b) در $A_\circ \times B_\circ$ و موجود باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ فضای برداری X را یک **جبر**[۲۷] نامند هرگاه یک عمل ضرب به‌صورت $x \cdot y$ روی آن تعریف شده باشد که برای هر $x, y \in X$ و $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$x \cdot y \in X, x + y \in X, cx \in X.$$

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید X فضای برداری حقیقی باشد. منظور از **شبه نرم**[۲۸] یک تابع حقیقی مقدار روی X است که

---

[۲۴] Best proximity pair
[۲۵] Proximal normal structure
[۲۶] Proximinal pair
[۲۷] Algebra
[۲۸] Quasi-norm

۱) برای هر $x \in X$، $||x|| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها اگر $||x|| = 0$،

۲) برای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in X$، $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$،

۳) $K \geq 1$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq K(||x|| + ||y||)$.

در این حالت زوج $(X, ||\cdot||)$ را فضای **شبه نرمدار**[۲۹] نامند و اگر X کامل باشد، آن را فضای **شبه باناخ**[۳۰] نامند.

تعریف ۲۳.۱.۱ فضای شبه نرمدار $(X, ||\cdot||)$ را **جبر شبه نرمدار**[۳۱] نامند هرگاه X یک جبر بوده و ثابت $K > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in X$، $||x \cdot y|| \leq K||x|| \cdot ||y||$. اگر جبر شبه نرمدار کامل باشد، آن‌را **جبر شبه باناخ**[۳۲] نامند.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم X فضای برداری باشد. برای $\delta > 0$ نگاشت $f : X \to X$ را یک نگاشت δ–**خطی** گویند هرگاه تبدیل خطی $L : X \to X$ موجود باشد که $f(x) = L(x) + \delta$.

تعریف ۲۵.۱.۱ نگاشت $\mathbb{C}$–خطی $H : X \to X$ را یک **همریختی**[۳۳] روی جبرهای شبه نرمدار نامند هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $H(xy) = H(x)H(y)$. علاوه براین، هرگاه H **دوسویی**[۳۴] باشد، آنرا یک **یکریختی**[۳۵] روی جبرهای شبه نرمدار نامند.

[۲۹] Quasi-normed space
[۳۰] Quasi-Banach space
[۳۱] Quasi-normed algebra
[۳۲] Quasi-Banach algebra
[۳۳] Homomorphism
[۳۴] Bijective
[۳۵] Isomorphism

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنید X مجموعه‌ای باشد که یک ضرب روی آن تعریف شده باشد یعنی، برای هر $x,y \in X$، $x \cdot y \in X$. گوییم نگاشتهای $f,g : X \to X$ دارای **نقطه ثابت ترکیبی**[۳۶] هستند هرگاه $x_{\circ} \in X$ چنان موجود باشد که $f(x_{\circ})g(x_{\circ}) = x_{\circ}$.

۲.۱ قضایای مقدماتی

در این بخش، برخی قضایای نقطه ثابت نگاشتها را یادآوری می‌کنیم.
رایج ترین قضیه نقطه ثابت نگاشت‌ها، قضیه **براور**[۳۷] است.

قضیه ۱.۲.۱ اگر $1 \leq n < \infty$، S گوی بسته و محدب یکه در $\mathbb{R}^n$ و $f : S \to S$ پیوسته باشد، آنگاه $x \in S$ چنان وجود دارد که $f(x) = x$.

برهان. به فصل چهارم مرجع [۵] مراجعه شود. ■

با تعمیم S به مجموعه‌های کلی تر، این قضیه به شکل زیر ارایه می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱ اگر K مجموعه فشرده، محدب و ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f : K \to K$ پیوسته باشد، آنگاه $x \in K$ چنان وجود دارد که $f(x) = x$.

برهان. به فصل چهارم از مرجع [۵] مراجعه شود. ■

تعمیم این قضیه به فضاهای نرمدار با بعد نامتناهی به قضیه نقطه ثابت **شاودر**[۳۸] معروف است.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید C زیرمجموعه محدب و کراندار از فضای نرمدار X باشد. اگر $f : C \to X$ فشرده باشد و $f(C) \subseteq C$، آنگاه $x \in C$ چنان وجود دارد که $f(x) = x$.

برهان. به فصل چهارم از مرجع [۵] مراجعه شود. ■

---
[۳۶] Hybrid Fixed Point
[۳۷] Brouwer
[۳۸] Schauder

فصل ۲

بهترین نقاط تقریب برای نگاشت‌های φ—انقباضی دوری در فضاهای باناخ بازتابی