وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نامساوی‌های عملگری و $m-$تحدب

پایان‌نامهٔ دکتری

اکرم علیخانی

اساتید راهنما:

دکتر جمال رویین
دکتر محمد صال مصلحیان

اسفند ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

همسفر روزهای پر از دلهره

رسول

سپاس گزاری...

به یاری و لطف حق تعالی، این مرحله از تحصیل نیز به پایان رسید. این مهم به دست نمی آمد، مگر با راهنمایی و هدایت اساتید ارجمندم جناب آقایان دکتر روبین و دکتر صال مصلحیان.

شاگردی این بزرگواران، افتخاریست شایسته، از حضور اساتیدی که همواره برایم الگو و سرمشق خواهند بود.

از اساتید محترم آقایان دکتر میرزاپور، دکتر میثمی و دکتر نجفی نیز کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم.

حمایت و دلگرمی‌های همراه مهربان زندگیم، رسول و پدر و مادر عزیز و بزرگوارم، شایسته بی نهایت سپاس و تقدیر است که در بیان نمی‌گنجد.

از همراهی و حضور دوستان عزیز و مهربانم در طی این دوره نیز بسیار ممنون و سپاسگزارم.

چکیده

ابتدا چند خاصیت یکنوایی را برای توابع محدب عملگری به دست می‌آوریم. با استفاده از این نتایج، نامساوی هرمیت-آدامارد عملگری را تظریف نموده و سپس یک توسیع عملگری برای نامساوی‌های آلزِر و بنِت روی فضاهای هیلبرت ارایه می‌دهیم. در ادامه، به مطالعه جامع توابع $m-$محدب عملگری می‌پردازیم. فرض کنیم $m \in [0,1]$ و $J=[0,b]$ که در آن $b \in \mathbb{R}$ یا $J=[0,\infty)$. تابع پیوسته $\varphi: J \to \mathbb{R}$ را $m-$محدب عملگری نامیم اگر به ازای عملگرهای خود الحاق $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ با طیف مشمول در J و هر $t \in [0,1]$ داشته باشیم $\varphi\big(tA+m(1-t)B\big) \leq t\varphi(A)+m(1-t)\varphi(B)$. در روند مطالعه توابع $m-$محدب، ابتدا نامساوی مشهور ینسن را برای توابع $m-$محدب پیوسته برای عملگرهای روی فضای هیلبرت تعمیم داده و سپس با استفاده از تابع وزن مناسب، تظریف‌های وزن‌داری از آن را به دست می‌آوریم. همچنین با معرفی مفهوم $m-$تحدب عملگری، نامساوی چوی-دیویس-ینسن را برای توابع $m-$محدب عملگری توسیع می‌دهیم. به علاوه، صورتی عملگری از نامساوی ینسن-مرسر را برای توابع $m-$محدب ارایه داده و این نامساوی را برای توابع $m-$محدب عملگری، میدان عملگرهای پیوسته و نگاشت‌های خطی مثبت یکانی تعمیم می‌دهیم. در پایان با استفاده از نامساوی عملگری ینسن-مرسر برای توابع $m-$محدب عملگری، تابعک عملگری $m-$ینسن را تعریف کرده و برای آن کران بالای سراسری به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: *نامساوی آلزِر، نامساوی بنِت، نامساوی هرمیت-آدامارد، نامساوی ینسن، $m-$ محدب، $m-$ محدب عملگری، تابع وزن، نامساوی چوی- دیویس- ینسن، نامساوی ینسن- مرسر.*

فهرست

پیش‌گفتار

یکی از مباحث کاربردی در نظریه عملگرها، تعمیم نامساوی‌های عددی به نامساوی‌های عملگری می‌باشد. در سال ۱۹۹۳، آلزِر نامساوی زیر را به صورت

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^r}{n\sum_{i=1}^{n+1} i^r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

برای عدد حقیقی r و $n \geq 0$ ارایه نمود. همچنین بِنِت نامساوی زیر را به دست آورد

$$\left(\frac{(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^r}{n\sum_{i=1}^{n+1} i^r}\right)^{\frac{1}{r}} \begin{cases} \leq \frac{n+1}{n+2} & r \geq 1 \\ \geq \frac{n+1}{n+2} & r \leq 1. \end{cases}$$

پس از بیان تعریف‌ها و قضیه‌هایی در فصل اول که مبنای این پایان نامه هستند، در فصل دوم، نامساوی‌های عددی آلزِر و بِنِت را به عملگرهای خود الحاق روی یک فضای هیلبرت توسیع می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا چند خاصیت یکنوایی برای توابع محدب عملگری به دست می‌آوریم. سپس نامساوی عملگری هرمیت-آدامار را تظریف نموده و در نتیجه با استفاده از تقعر و تحدب تابع t^r در بازه $-1 \leq r \leq 2$، توسیع عملگری این نامساوی‌ها را ارایه می‌دهیم.

در فصل‌های سوم و چهارم قصد داریم نامساوی‌های ینسن و ینسن-مرسر را برای توابع $m-$محدب و توابع $m-$محدب عملگری به دست آوریم.

برای این منظور، بازه $J = [0, b]$ را که در آن $b \in \mathbb{R}$ و یا $J = [0, \infty)$ در نظر می‌گیریم. جورج توآدِر در سال ۱۹۸۴، توابع $m-$محدب را به صورت زیر تعریف نمود:

فرض کنیم $m \in [0, 1]$ باشد. تابع $\varphi : J \to \mathbb{R}$ را به ازای هر $x, y \in J$ و هر $t \in [0, 1]$، $m-$محدب

نامیم اگر

$$\varphi(tx+m(۱-t)y) \leq t\varphi(x)+m(۱-t)\varphi(y).$$

در فصل سوم، ابتدا ویژگی‌های توابع $m-$محدب را یادآوری می‌نماییم. سپس نامساوی کلاسیک ینسن و نامساوی انتگرالی ینسن را برای توابع $m-$محدب ارایه کرده و در ادامه با استفاده از قضیه طیفی، صورت عملگری نامساوی ینسن برای توابع $m-$محدب را که تعمیمی از نامساوی عملگری ینسن برای توابع محدب است، به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\varphi\big(m\langle A\xi,\xi\rangle\big) \leq m\langle \varphi(A)\xi,\xi\rangle$$

که در آن φ تابعی $m-$محدب، $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ عملگری خود الحاق با طیف مشمول در J و $\xi \in \mathscr{H}$ بردار یکه می‌باشد. همچنین با استفاده از تابع وزن، تظریفی وزن‌دار از نامساوی ینسن عملگری برای توابع $m-$محدب ارایه می‌دهیم. در بخش بعد، با به کار بستن حسابان تابعی، چند نامساوی عملگری برای توابع $m-$محدب ارایه داده و سپس با فرض مشتق‌پذیری تابع $m-$محدب، برهان دیگری برای نامساوی عملگری ینسن به دست می‌آوریم. در بخش پایانی فصل سوم، نامساوی ینسن-مرسر را در حالت‌های گسسته، انتگرالی و عملگری برای توابع $m-$محدب ارایه می‌دهیم.

در فصل چهارم، ابتدا توابع $m-$محدب عملگری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم $m \in [۰,۱]$، $J=[۰,\infty)$ و یا به ازای $b \in \mathbb{R}$، $J=[۰,b]$. به ازای عملگرهای خود الحاق $A,B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ با طیف مشمول در J و به ازای هر $t \in [۰,۱]$، تابع پیوسته $\varphi: J \to \mathbb{R}$ را $m-$محدب عملگری گوییم اگر

$$\varphi\big(tA+m(۱-t)B\big) \leq t\varphi(A)+m(۱-t)\varphi(B).$$

تابع φ را $m-$مقعر عملگری نامیم اگر تابع $(-\varphi)$، $m-$محدب عملگری باشد.

پس از تعریف تابع $m-$محدب عملگری، نامساوی چوی-دیویس-ینسن را برای این رده از توابع به دست می‌آوریم. در بخش پایانی فصل چهارم، با استفاده از انتگرال بوخنر، نامساوی ینسن و ینسن-

مرسر را برای میدان عملگرها به دست می‌آوریم. همچنین با توجه به صورت انتگرال بوخنر نامساوی ینسن، تابعک $m-$ محدب ینسن را برای توابع $m-$ محدب عملگری تعریف نموده و یک کران بالا برای آن ارایه می‌دهیم.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، به بیان تعاریف و قضایایی که در این پایان نامه به آنها نیازمندیم، می‌پردازیم. بیشتر مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۳]، [۲۳] و [۲۴] می‌باشند.

۱.۱ مقدمات عملگری

در این بخش مقدمات جبر عملگرها را بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۱.۱. [۲۳] یک برگشت[۱] روی جبر $\mathscr{A}$، نگاشت مزدوج خطی $* : a \to a^*$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in \mathscr{A}$ داشته باشیم $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^* a^*$. زوج $(\mathscr{A}, *)$ را $*-$جبر می‌نامیم. $*-$جبر $\mathscr{A}$ همراه خاصیت نرمی $a \in \mathscr{A}$، $\|a^*\| = \|a\|$ را $*-$جبر باناخ می‌نامیم. همچنین اگر $\mathscr{A}$ دارای عضو واحد ۱ باشد به طوری که $\|۱\| = ۱$، آنگاه $\mathscr{A}$ را $*-$جبر باناخ یک‌دار می‌گوییم.

[۱] involution

$*$−جبر باناخ $\mathscr{A}$ را که به ازای هر $a \in \mathscr{A}$ داشته باشیم $\|a^*a\| = \|a\|^2$، یک C^*−جبر می‌نامیم. اگر C^*−جبری دارای واحد ۱ باشد، آنگاه $\|1\| = 1$.

مجموعه همه عملگرهای خطی کران‌دار روی $\mathscr{H}$ را با $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ نشان می‌دهیم. فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ را در نظر می‌گیریم. فضای باناخ تمام عملگرهای خطی کران‌دار از فضای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ به توی فضای هیلبرت $\mathscr{H}_2$ را به همراه نرم عملگری، با $\mathbb{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ نشان می‌دهیم. اگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ آنگاه عضو منحصر به فرد $A^* \in \mathbb{B}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ موجود است به طوری که به ازای $\xi \in \mathscr{H}_1$ و $\eta \in \mathscr{H}_2$ داریم

$$\langle A(\xi), \eta\rangle = \langle \xi, A^*(\eta)\rangle.$$

به علاوه نگاشت $* : A \mapsto A^*$ مزدوج خطی است و $A^{**} = A$.

همچنین $\|A^*A\|^{1/2} = \|A^*\| = \|A\|$. اگر $\mathscr{H}_1 \overset{A}{\to} \mathscr{H}_2 \overset{B}{\to} \mathscr{H}_3$ نگاشت‌های خطی پیوسته بین فضاهای هیلبرت باشند، آنگاه $(AB)^* = B^*A^*$.

بنابراین $\mathbb{B}(\mathscr{H})$، C^*−جبری تحت برگشت $* : A \mapsto A^*$ می‌باشد که در آن A^* الحاق A است.

عملگر همانی بر $\mathscr{H}$ را با I نشان داده و در بعضی شرایط برای تاکید آن را با $I_{\mathscr{H}}$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که بعد فضای هیلبرت $\mathscr{H}$، برابر n باشد، $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را با جبر همه ماتریس‌ها، یعنی $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ که شامل همه ماتریس‌هایی $n \times n$ با درایه‌های مختلط می‌باشد، یکی می‌گیریم.

تعریف ۲.۱.۱. [۱۳] عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ را خود الحاق[1] می‌گوییم اگر $A^* = A$ و یا به طور معادل، به ازای هر $\xi \in \mathscr{H}$، $\langle A\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$. مجموعه همه عملگرهای خود الحاق در $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را با $\mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ نشان می‌دهیم. عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ را نرمال[2] نامیم اگر $AA^* = A^*A$. عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ را

[1] self-adjoint

[2] normal

طولپا[۳] نامیم اگر $A^*A = I_{\mathscr{H}_۱}$ و هم طولپا[۴] نامیم اگر $AA^* = I_{\mathscr{H}_۲}$. همچنین عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H}_۱, \mathscr{H}_۲)$ را یکانی[۵] نامیم اگر طولپا و هم طولپا باشد.

تعریف ۳.۱.۱. [۱۳] عملگر $A \in \mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ مثبت[۶] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $\xi \in \mathscr{H}$، $\langle A\xi, \xi\rangle \geq ۰$ و در این حالت می‌نویسیم $A \geq ۰$. برای عملگرهای خود الحاق $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ گوییم $A \leq B$، اگر $B - A \geq ۰$. عملگر خود الحاق A به طور اکید مثبت[۷] نامیده می‌شود اگر $m > ۰$ موجود باشد که $A \geq mI$ و آن را با نماد $A > ۰$ نمایش می‌دهیم. به طور معادل $A > ۰$، هرگاه $A \geq ۰$ و A معکوس‌پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۱. [۲۳] در هر جبر یک دار $\mathscr{A}$، طیف[۸] هر عضو a به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{sp(a)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{معکوس پذیر نباشد}\ \ \mathrm{a} - \lambda ۱\}.$$

اگر $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ یک‌دار مختلط باشد، آنگاه $\mathrm{sp(a)}$ مجموعه‌ای فشرده و ناتهی است.

۲.۱ حسابان تابعی

در این بخش، ابتدا حسابان تابعی را شرح داده و به بیان نگاشت طیفی و قضیه گلفاند-نیمارک می‌پردازیم. در ادامه، قضایای مهم مرتبط با فصل‌های آتی را بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۲.۱. [۲۳] فرض کنیم $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو جبر دلخواه باشند. نگاشت خطی $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ را

---

۳ isometry

۴ co-isometry

۵ unitary

۶ positive

۷ strictly positive

۸ spectrum

که به ازای هر $a,b \in \mathscr{A}$، داشته باشیم $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$، یک همریختی[۹] می‌نامیم. در حالتی که $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ جبرهای یک‌دار باشند، همریختی φ را یکانی[۱۰] گوییم اگر $\varphi(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$. به علاوه، اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو $*-$جبر دلخواه باشند آنگاه φ را یک $*-$همریختی نامیم، اگر به ازای هر $a \in \mathscr{A}$، φ حافظ الحاق باشد یعنی $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.

قضیه ۱.۲.۲. [۲۳] *فرض کنید a عضو نرمالی از C^*-جبر یک‌دار $\mathscr{A}$ و $z : \mathrm{sp}(a) \to \mathbb{C}$ نگاشت شمول باشد. در این صورت یک $*-$همریختی یکانی و منحصر به فرد $\varphi : C(\mathrm{sp}(a)) \to \mathscr{A}$ وجود دارد به طوری که $\varphi(z) = a$. به علاوه، φ طولپا[۱۱] بوده و برد آن C^*-زیر جبری از $\mathscr{A}$ تولید شده توسط ۱ و a می‌باشد.*

تعریف ۱.۲.۳. [۲۳] فرض کنیم a عضو نرمالی از C^*-جبر یک‌دار $\mathscr{A}$ و $z : \mathrm{sp}(a) \to \mathbb{C}$ نگاشت شمول باشد. $*-$همریختی یکانی و منحصر به فرد $\varphi : C(\mathrm{sp}(a)) \to \mathscr{A}$ را به طوری که $\varphi(z) = a$، حسابان تابعی[۱] در نقطه a می‌نامیم و به ازای هر $f \in C(\mathrm{sp}(a))$، $\varphi(f)$ را با $f(a)$ نمایش می‌دهیم. لازم به ذکر است که $f(a)$ نرمال است.

قضیه ۱.۲.۴. [۲۳] *(نگاشت طیفی[۲]) فرض کنید a عضو نرمالی از C^*- جبر یک‌دار $\mathscr{A}$ و $f \in C(\mathrm{sp}(a))$ باشد. در این صورت*

$$\mathrm{sp}(f(a)) = f(\mathrm{sp}(a)).$$

به علاوه، اگر $g \in C(\mathrm{sp}(f(a)))$، آنگاه

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

---

۹ homomorphism

۱۰ unital

۱۱ isometric

۱ functional calculus

۲ spectral mapping

تعریف ۵.۲.۱. [۲۳] (نمایش[۳]) یک نمایش از C^*−جبر $\mathscr{A}$ زوجی مانند $(\mathscr{H},\varphi)$ است که در آن $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت و $\varphi:\mathscr{A}\to\mathbb{B}(\mathscr{H})$ یک $*$−همریختی است.

قضیه ۶.۲.۱. [۲۳] (قضیه گلفاند-نیمارک[۴]) *اگر $\mathscr{A}$ یک C^*−جبر باشد آنگاه $\mathscr{A}$ دارای نمایشی یک به یک می‌باشد.*

تعریف ۷.۲.۱. [۱۳] فرض کنیم J بازه ای در $\mathbb{R}$ و $f:J\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته باشد.

(۱) تابع f را صعودی عملگری[۵] گوییم هرگاه به ازای هر فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ و هر $A,B\in\mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ با طیف مشمول در J، اگر $A\leq B$ آنگاه $f(A)\leq f(B)$. به طور مثال، توابع $f(t)=-\frac{1}{t}$ بر بازه $(\circ,\infty)$ و $g(t)=\sqrt{t}$ بر بازه $[\circ,\infty)$ صعودی عملگری هستند.

(۲) تابع f را محدب عملگری[۶] (مقعر عملگری[۷]) گوییم هرگاه به ازای هر فضای هیلبرت $\mathscr{H}$، هر $A,B\in\mathbb{B}_h(\mathscr{H})$ با طیف مشمول در J و هر $\lambda\in[\circ,1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leq(\geq)\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B). \tag{۱.۱}$$

به عنوان نمونه، تابع $f(t)=\frac{1}{t}$ یک تابع محدب عملگری و تابع $f(t)=\log t$ یک تابع مقعر عملگری بر بازه $(\circ,\infty)$ می‌باشند. به علاوه به ازای اعداد حقیقی $x,y\in J$، با قرار دادن عملگرهای $A=xI$ و $B=yI$ در (۱.۱) و به کار بستن حسابان تابعی به سادگی می‌توان دید که توابع محدب عملگری (مقعر عملگری)، محدب (مقعر) می‌باشند و نه بر عکس. به طور مثال تابع $f(t)=t^3$ روی بازه $[\circ,\infty)$ تابع محدبی است که محدب عملگری نمی‌باشد.

لم ۸.۲.۱. [۱۳] (۱) *اگر $A\in\mathbb{B}(\mathscr{H})$ و $A\geq\circ$، آنگاه به ازای هر $X\in\mathbb{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$، $X^*AX\geq\circ$.*

---

۳ representation

۴ Gelfanf-Naimark

۵ operator monotone

۶ operator convex

۷ operator concave

(۲) فرض کنید $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ عملگری خود الحاق و $U \in \mathbb{B}(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ عملگری یکانی باشد. در این صورت به ازای هر $f \in C(\mathrm{sp(A)})$،

$$f(U^*AU) = U^*f(A)U.$$

(۳) اگر $A \in \mathbb{B}(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ و $f \in C([0, \|A\|^2])$، آنگاه

$$Af(A^*A) = f(AA^*)A.$$

قضیه ۱.۲.۹. [۱۳] (قضیه لونر-هاینز[۱]) تابع $f(t) = t^r$ برای مقادیر $0 \leq r \leq 1$ روی بازه $[0, \infty)$، صعودی عملگری است.

قضیه ۱.۲.۱۰. [۱۳] فرض کنید f تابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه $J = [\alpha, \infty)$ و از پایین کران‌دار باشد؛ یعنی $m \in \mathbb{R}$ ای موجود باشد که به ازای هر $t \in J$، $f(t) \geq m$. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) f تابع مقعر عملگری روی J است.

(۲) f تابع صعودی عملگری روی J است.

نتیجه ۱.۲.۱۱. [۱۳] تابع $f(t) = t^r$ روی بازه $[0, \infty)$ صعودی عملگری است اگر و تنها اگر $0 \leq r \leq 1$. هم چنین اگر $1 \leq r \leq 2$ یا $-1 \leq r \leq 0$، آنگاه تابع $f(t) = t^r$ روی بازه $(0, \infty)$ محدب عملگری و اگر $0 \leq r \leq 1$ آنگاه مقعر عملگری است.

۱.۳ قضیه طیفی

عملگرهای نرمال یکی از خوش رفتارترین دسته از عملگرها را تشکیل می‌دهند. دلیل این امر، قضیه طیفی است که بسیاری از (ولی نه همه) سوالات در مورد عملگرهای نرمال را پاسخ می‌دهد. در این

[۱] Löwner–Heinz

بخش، به بیان قضیه طیفی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. [۲۳] فرض کنیم Ω یک فضای هاسدورف و فشرده و $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. نگاشت E از $\sigma-$جبر کلیه مجموعه‌های بورل Ω به توی مجموعه کلیه تصاویر متعلق به $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را یک اندازه طیفی[۲] نسبت به $(\Omega, \mathscr{H})$ گوییم هرگاه

(i): $E(\emptyset) = ۰$ و $E(\Omega) = I$.

(ii): به ازای هر دو زیر مجموعه بورل $S_۱$ و $S_۲$ از Ω، داشته باشیم $E(S_۱ \cap S_۲) = E(S_۱)E(S_۲)$.

(iii): به ازای هر $\xi, \eta \in \mathscr{H}$، تابع

$$E_{\xi,\eta}(S) = \langle E(S)\xi, \eta\rangle$$

یک اندازه مختلط بورل و منظم بر Ω است.

تعریف ۲.۳.۱. [۲۳] فرض کنیم Ω یک فضای هاسدورف و فشرده باشد. $\mathbb{B}_\infty(\Omega)$ را C^*-جبر تمام توابع مختلط بورل و محدود بر Ω می‌نامیم.

قضیه ۳.۳.۱. [۲۳] *فرض کنیم Ω یک فضای هاسدورف و فشرده، $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت و E اندازه طیفی نسبت به $(\Omega, \mathscr{H})$ باشد. به ازای هر $f \in \mathbb{B}_\infty(\Omega)$ عملگر منحصر به فرد کران‌دار A روی $\mathscr{H}$ موجود است به طوری که به ازای هر $\xi, \eta \in \mathscr{H}$*

$$\langle A(\xi), \eta\rangle = \int_\Omega f dE_{\xi,\eta}.$$

A را به $\int f dE$ نمایش داده و آن را انتگرال f نسبت به E می‌گوییم. شایان ذکر است که به ازای هر مجموعه بورل S، $\int \chi_S dE = E(S)$.

قضیه ۴.۳.۱. [۲۳] *فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف و فشرده، $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت و نگاشت $\varphi : C(\Omega) \to \mathbb{B}(\mathscr{H})$ یک $*-$همریختی یکانی باشد. در این صورت اندازه طیفی منحصر به فرد E*

[۲] spectral measure

نسبت به $(\Omega, \mathscr{H})$ موجود است به طوری که

$$\varphi(f) = \int_\Omega f dE \qquad (f \in C(\Omega)).$$

به علاوه، $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ به ازای هر $f \in C(\Omega)$ با $\varphi(f)$ جابجا می‌شود اگر و فقط اگر A به ازای هر زیر مجموعه بورل S از Ω با $E(S)$ جابجا شود.

قضیه ۱.۳.۵. [۲۳] (قضیه طیفی) *فرض کنید A یک عملگر نرمال بر فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. در این صورت اندازه طیفی منحصر به فرد E نسبت به $(\mathrm{sp(A)}, \mathscr{H})$ وجود دارد به طوری که $A = \int z dE$ که در آن $z : \mathrm{sp}(A) \to \mathbb{C}$ نگاشت شمول می‌باشد.*

اندازه طیفی منحصر به فرد E در قضیه ۱.۳.۵ را تجزیه واحد[۱] برای A می‌نامیم. از آنجا که به ازای هر $f \in C(\mathrm{sp}(A))$ داریم

$$f(A) = \varphi(f) = \int_{\mathrm{sp}(A)} f dE$$

لذا می‌توان $f(A) = \int f dE$ را تعریف نمود که در آن $f \in \mathbb{B}_\infty(\mathrm{sp}(A))$.

۱.۴ نگاشت‌های خطی مثبت و به طور کامل مثبت

در این بخش، ابتدا نگاشت خطی مثبت و به طور کامل مثبت را تعریف می‌نماییم. سپس نامساوی شوارتز و نامساوی چوی-دیویس-ینسن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. [۲۳] C^*-جبر $\mathscr{A}$ را در نظر می گیریم. عضو $a \in \mathscr{A}$ را مثبت می‌نامیم اگر $a^* = a$ و $\mathrm{sp}(a) \subseteq [0, \infty)$ و می‌نویسیم $a \geq 0$.

تعریف ۲.۴.۱. [۳۴] فرض کنیم $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو C^*-جبر و $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ نگاشت خطی باشد. Φ

[۱] resolution of the identity

را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $a \geq 0$ در $\mathscr{A}$، $\Phi(a) \geq 0$ در $\mathscr{B}$. همچنین Φ را یکانی گوییم اگر $\Phi(I_{\mathscr{A}}) = I_{\mathscr{B}}$. نگاشت خطی مثبت، حافظ ترتیب عملگری است و همچنین الحاق را حفظ می‌کند.

از آنجا که جبر همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی مشمول در $\mathscr{A}$، خود یک C^*−جبری است که آن را با $\mathscr{M}_n(\mathscr{A})$ نمایش می‌دهیم، لذا با اعمال نگاشت Φ بر هر درایه از ماتریسی که عضو $\mathscr{M}_n(\mathscr{A})$ می‌باشد، ماتریسی متعلق به $\mathscr{M}_n(\mathscr{B})$ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب نگاشت خطی $\Phi^{(n)}$ از $\mathscr{M}_n(\mathscr{A})$ به $\mathscr{M}_n(\mathscr{B})$ به دست می‌آید. نگاشت Φ را به طور کامل مثبت [۲] نامیم اگر به ازای هر عدد طبیعی n، نگاشت $\Phi^{(n)}$ مثبت باشد. به وضوح هر نگاشت به طور کامل مثبت، مثبت می‌باشد.

قضیه ۱.۴.۳. [۸] (*نامساوی شوارتز*) *فرض کنید f تابع محدب عملگری روی بازه J، $\mathscr{A}$ یک C^*− جبر دلخواه و $\Phi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}(\mathscr{K})$ نگاشت خطی به طور کامل مثبت یکانی باشد. در این صورت به ازای هر عضو خودالحاق $a \in \mathscr{A}$ با طیف مشمول در J،*

$$f(\Phi(a)) \leq \Phi(f(a)).$$

قضیه ۱.۴.۴. [۳۴] *اگر $\mathscr{A}$، C^*−جبر جابجایی و Φ نگاشت خطی مثبت عملگر- مقدار بر $\mathscr{A}$ باشد، آنگاه Φ نگاشت خطی به طور کامل مثبت است.*

قضیه ۱.۴.۵. [۲۶] (*قضیه استین اسپرینگ*[۱]) *فرض کنید $\mathscr{A}$، C^*−جبر یک دار و $\Phi : \mathscr{A} \to \mathbb{B}(\mathscr{H})$ نگاشت خطی به طور کامل مثبت یکانی باشد. در این صورت فضای هیلبرتی مانند $\mathscr{K}$، $*$−همریختی یکانی مانند $\rho : \mathscr{A} \to \mathbb{B}(\mathscr{K})$ و عملگر طولپایی $C : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ موجود است به طوری که به ازای هر $a \in \mathscr{A}$،*

$$\Phi(a) = C^* \rho(a) C.$$

---

[۲] completely positive

[۱] Stinespring's theorem

قضیه ۱.۴.۶. [۱۳] *(نامساوی چوی-دیویس-ینسن[۲]) فرض کنید $\Phi : \mathbb{B}(\mathscr{H}) \to \mathbb{B}(\mathscr{K})$ نگاشت خطی مثبت یکانی و f تابع محدب عملگری بر بازه J باشد. در این صورت به ازای هر عملگر خودالحاق $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ با طیف مشمول در J،*

$$f(\Phi(A)) \leq \Phi(f(A)).$$

در پایان این فصل، انتگرال بوخنر یا انتگرال‌های برداری مقدار را تعریف می‌نماییم.

تعریف ۱.۴.۷. [۱۴] فرض کنیم T فضای موضعی فشرده هاسدورف و $\mathscr{A}$، C^*-جبر دلخواه باشد. میدان عملگرهای $(A_t)_{t\in T}$ در $\mathscr{A}$ را پیوسته گوییم اگر نگاشت $t \to A_t$ در T نرم پیوسته باشد. به علاوه، اگر μ اندازه رادون بر T و نگاشت $t \to \|A_t\|$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه می‌توان انتگرال بوخنر[۳] $\int_T A_t d\mu(t)$ را که در $\mathscr{A}$ منحصر به فرد است، در نظر گرفت؛ طوری که به ازای هر تابعک خطی Φ در دوگان نرمی $\mathscr{A}^*$ از $\mathscr{A}$ داشته باشیم $\Phi\left(\int_T A_t d\mu(t)\right) = \int_T \Phi(A_t) d\mu(t)$.

فرض کنیم $(\Phi_t)_{t\in T}$ میدان نگاشت‌های خطی مثبت $\Phi_t : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ بین C^*-جبرها باشد. این میدان را پیوسته نامیم اگر نگاشت $t \to \Phi_t(A)$ به ازای هر $A \in \mathscr{A}$، پیوسته باشد. اگر C^*-جبرها یک‌دار و میدان $t \to \Phi_t(I_{\mathscr{A}})$ انتگرال‌پذیر با انتگرال $I_{\mathscr{B}}$ باشد، گوییم $(\Phi_t)_{t\in T}$ یکانی است.

۱.۵ معرفی برخی از نامساوی‌ها

در این بخش به معرفی نامساوی‌های ینسن، ینسن-مرسر و هرمیت-آدامار می‌پردازیم.

[۲] Choi-Davis-Jensen

[۳] Bochner integral