دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی — آنالیز عددی

عنوان

روش عددی حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری

نگارش

عاطفه غلام بلوک

استاد راهنما

دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

بهمن ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

عمیق ترین سپاس هایم، از آن خداوندی است که حضورش، بزرگی‌اش و مهربانی‌اش هرگز رنگ نمی‌بازد. شاگردی استادان عالیقدر، آقایان دکتر باقرکرامتی و دکتر رضامعمارباشی اتفاقی افتخارآمیز و درس آموز در زندگی علمی‌ام بود که امیدوارم قدردان زحمتشان بوده باشم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمدرضاصافی و آقای دکتر معدنشکاف به خاطر کمک موثرشان در ویرایش پایان نامه قدردانی می‌کنم. قدردان مهربانی‌ها و همراهی‌های دوستانم هستم و برایشان روزگاری سعادتمند را آرزو می‌کنم.

در پایان از خواهر عزیز و برادر بزرگوارم که اسطوره صبر و مظهر رحمانیت می باشند، برای همدلی‌ها و دلگرمی‌های بسیارشان صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم.

تقدیم می‌کنم :

به مهربان مادرم

و

به نازنین پدرم

چکیده

در این پایان نامه به ارائه یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل همراه با مشتقات کسری بوسیله تغییر شکل دادن دستگاه اصلی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم. این روش بر اساس فرمول اصلاح شده توسط آتاناکوویک [۱] و استاناکوویک [۲] درسال ۲۰۰۴ می‌باشد. و متفاوت از روش بکار رفته آگراوال [۳] و یوان [۴] برای دستگاه‌های دینامیکی شامل مشتقات کسری ارائه شده در سال ۲۰۰۲ می‌باشد. همچنین از روش عددی که برای میرا کردن دستگاه‌های دینامیکی توسط گاول [۵] و اسمیت [۶] در سال ۲۰۰۶ ارائه شد، متفاوت است. کارآیی روش با بکارگیری مثال‌هایی آشکار می‌شود و نتایج نشان می‌دهند که توافق و سازگاری خوبی بین نتیجه‌های مشاهده شده از روش مذکور و روش‌های دیگر وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری – انتگرال گیری کسری – مشتق کسری ریمان –لیبوویل [۷] – مشتق کسری کپوتو [۸] – درون یابی چبیشف – تکین جبری

---

[۱] T.M. Atanackovic
[۲] B. Stankovic
[۳] Agrawal .O. P
[۴] Yuan. L
[۵] Gaul. L
[۶] Schmidt. L
[۷] Rieman-Lioville
[۸] Caputo

مقدمه

پایان نامه حاضر درچهار فصل تهیه و تنظیم شده است که شرح مختصری از هر فصل را در زیر بیان می‌کنیم:

فصل اول در فصل اول به معرفی مفاهیم مورد نیاز پرداخته‌ایم. مراجع اصلی استفاده شده در فصل مفاهیم اولیه، [۱] و [۱۴] و [۱۶] و [۲۷] و [۲۸] و [۲۹] و [۳۰] می‌باشند.

فصل دوم در فصل دوم تخمین یکریخت مشتقات کسری با استفاده از توابع تکین جبری را مطرح می‌کنیم، این فصل شامل ۴ بخش است. در بخش اول، مقدار خطای تابع تکین جبری $f(s)$ یعنی $D^q(s^\alpha g(s))$ را تخمین می‌زنیم. در بخش دوم دو تابع $F_{n-2}(t)$ از درجه $n-2$ و $G_{n-1}(s)$ از درجه $n-1$ را ارزیابی می‌کنیم. در بخش سوم خطای روش را برآورد می‌کنیم و در بخش چهارم مثال‌های عددی ارائه می شوند. در این فصل مرجع اصلی [۲۳] است.

فصل سوم در فصل سوم تقریب‌هایی از انتگرال‌های کسری و مشتقات کسری $Caputo$ مطرح می‌شود. این فصل شامل ۳ بخش است. در بخش اول قاعده ذوزنقه‌ای ، خطای روش ذوزنقه‌ای ، انتگرال کسری ، مشتق کسری $Caputo$ و روابط بین آن‌ها بیان می‌شود. در بخش دوم به قاعده ذوزنقه اصلاح شده اشاره می‌نمائیم و در بخش سوم قاعده مشتق کسری $Caputo$ را مطرح می‌کنیم. مرجع اصلی در این فصل [۱۸] است.

فصل چهارم در فصل چهارم طرح و روش عددی حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری بیان می شود، این فصل شامل ۵ بخش است. در بخش اول مشتقات کسری چپ و راست تعریف می شود. در بخش دوم بسط فرمول‌ها برای مشتقات کسری چپ و راست مطرح می‌شود. در بخش سوم روش حل این نوع معادلات مطرح می شود. بخش چهارم ارتباط بین نتایج $Agrawal$ و $Yuan$ را مطرح می‌کند. در بخش پنجم کاربرد روش مطرح شده روی چند مثال مختلف بحث و بررسی می‌گردد و نتیجه نشان داده می‌شود. مرجع اصلی استفاده شده در این فصل [۲] می‌باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ تابع $f(x)$ را در $x_\circ$ تحلیلی[1] گویند، هرگاه در این نقطه تعریف شده و مشتقات آن در این نقطه از هر مرتبه‌ای موجود باشند. یعنی بتوان $f(x)$ را به صورت

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n (x - x_\circ)^n$$

نوشت که در آن

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}$$

تعریف ۲.۱.۱ تابع f را در (a, b) هموار(زوج) گویند، هرگاه در هر نقطه درون این بازه بتوان حداکثر یک خط مماس بر منحنی نمودار f رسم کرد که موازی محور y ها می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ تابع $f(x) = x^\alpha g(x)$ ، $(\alpha > -۱)$ ، را تابع تکین جبری گویند، که در آن $g(x)$ یک تابع خوش رفتار می‌باشد.

---

[1] analytic

تعریف ۴.۱.۱ تابع f را روی مجموعه باز M مرمورفیک[۲] گویند، هرگاه f صرف نظر از نقاط منفرد یا قطب‌هایش روی M تحلیلی باشد.

تعریف ۵.۱.۱ معادله‌ای به شکل $xy'' + (1-x)y' + ay = 0$، که در آن a ثابت است، معادله دیفرانسیل لاگر[۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱ تابع گاما[۴]، تابعی است به صورت زیر:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad ; \quad re(z) > 0$$

که برای x های منفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

که با انتگرال گیری جزء به جزء از تابع فوق به دست می آید.

تعریف ۷.۱.۱ تابع بتا[۵] تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(m+1, n+1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x \ \sin^{2n+1} x \ dx \ , \quad m,n \in \mathbb{C} \quad , \quad re(m) > 0 \quad , re(n) > 0$$

یا

$$\beta(m+1, n+1) = \beta(n+1, m+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

تابع بتا بر حسب تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

---

[۲] Mermorphic function
[۳] Laguerre
[۴] Gamma
[۵] beta

تعریف ۸.۱.۱ معادله دیفرانسیل به فرم $x^{2}y'' + xy' + (x^{2} - \alpha^{2})y = 0$ را معادله دیفرانسیل بسل[۶] می‌گوییم، که در آن α یک عدد حقیقی یا مختلط است و مرتبه تابع بسل را مشخص می‌کند. معادله بسل دارای انواع زیر است:

بسل نوع اول:

$$J_\alpha(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\alpha}\Gamma(\alpha+n+1)n!} x^{2n}$$

بسل نوع دوم:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

(برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۳۱] رجوع شود)

و نمایش انتگرالی تابع بسل به صورت زیراست:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

تعریف ۹.۱.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف، جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی زیر، موسوم به معادلات دیفرانسیل چبیشف[۷] هستند:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

یا

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

چندجمله ای چبیشف نوع اول در بازه $[-1, 1]$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

---
[۶] besel
[۷] chebyshev

یا

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi(1-x^2)}}{2^n(n-\frac{1}{2})!}\ \frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}})$$

و سری چبیشف به شکل زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

حالت های خاصی از چندجمله‌ای چبیشف نوع اول در زیر آمده است:

نوع اول: حالت‌های خاص

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 + 48x^4 + 18x^2 - 1$$

با اختیار کردن $2x - 1 = \cos\theta$، به دست می آوریم:

$$T_n^*(x) = \cos(n\theta)$$

و از روی آن می‌توان نشان داد:

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1) \quad , 0 \le x \le 1 \qquad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$T_n^*(x)$ به چندجمله‌ای انتقال یافته چبیشف معروف است.

چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم:

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(n+\frac{1}{2})!\sqrt{1-x^2}} \ \frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^{n+\frac{1}{2}})$$

حالت های خاصی از چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم در زیر آمده است:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

روابط بازگشتی زیر بین چندجمله‌ای های چبیشف نوع اول و نوع دوم برقرار است:

$$T_{n+1} - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

$$U_{n+1} - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$$

تعریف ۱۰.۱.۱ تابع میتیج–لفلر[۸] تابعی مختلط است شامل یک پارامتر α و یا دو پارامتر α و β که به ترتیب با E_α و $E_{\alpha,\beta}$ نشان داده می‌شود، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \qquad \alpha \in \mathbb{C} \ , \qquad R(\alpha) > 0 \ , \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C} \ , \qquad R(\alpha) > 0 \ , \quad z \in \mathbb{C} \tag{2}$$

---

[۸] Mittage-Leffler

و

$$E_{\circ}(z) = \frac{۱}{۱-z} \qquad |z| < ۱ \tag{۳}$$

$$E_{۱}(z) = e^{z} \tag{۴}$$

$$E_{۲}(z) = \cosh(\sqrt{z}) \quad , \quad z \in \mathbb{C} \tag{۵}$$

$$E_{۲}(-z^{۲}) = \cos z \quad , \quad z \in \mathbb{C} \tag{۶}$$

$$\vdots \tag{۷}$$

فصل ۲

تخمین یکریخت مشتقات کسری با استفاده از توابع تکین جبری

در این فصل مشتق کسری $D^q f(x)$، ($1 < q < 1$)، را برای توابع تحلیلی با استفاده از توابع تکین جبری تخمین می‌زنیم. مشتق کسری $D^q f(x)$ ($0 < q < 1 \; , \; 0 \le x \le 1$) از تابع f در جمله‌هایی از انتگرال معین وابسته به $f(x)$، تعریف شده است.
برای توابع تکین جبری $f(x) = x^\alpha g(x)$ ($\alpha > -1$) که در آن $g(x)$ یک تابع خوش‌رفتار است، روش تربیع را برای تخمین زدن یکریختی $D^q\{x^\alpha g(x)\}$، پیشنهاد می‌کنیم. روش حاضر، تابع $f(x)$ را در جمله‌هایی از چندجمله‌ای چبیشف در $[0, 1]$ درونیابی می‌کند. در تقریب زدن مشتق کسری $D^q f(x)$ ، برای $0 \le x \le 1$، خطاهای تقریب مستقل از x می‌باشند.در پایان فصل، مثال‌های عددی ارائه شده، اجرای روش تربیع اتوماتیک پیشنهاد شده را اثبات می‌کنند.

۱.۲ تخمین خطای $D^q(s^\alpha g(s))$

در این بخش مقدار خطای تابع تکین جبری $f(s)$ را که در آن $f(s) = s^q g(s)$، $0 < q < 1$ و $0 \le s \le 1$ محاسبه می‌شود.برای این منظور، تابع f را روی $[0, 1]$ در نظر بگیرید. دو نوع مشتق کسری را تعریف می‌کنیم؛ $D^q f(s)$ ارائه شده توسط ریمان—لیوویل [1] و $D^q_* f(s)$ ارائه شده توسط کپوتو

---
[1] Riemann-Liouville

[۲] ، که با رابطه‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$D^q f(s) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{ds} \int_0^s f(t)(s-t)^{-q} dt \ , \qquad 0 \le s \le 1 \ , \quad 0 < q < 1 \qquad (۲-۱-۱)$$

$$D_*^q f(s) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^s f'(t)(s-t)^{-q} dt = D^q f(s) - \frac{s^{-q} f(0)}{\Gamma(1-q)} \qquad (۲-۱-۲)$$

با جای‌گذاری $f(x) = x^\alpha g(x)$ در رابطه (۱ - ۱ - ۲)، می‌خواهیم رابطه

$$D^q(s^\alpha g(s)) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{ds} \int_0^s g(t) t^\alpha (s-t)^{-q} dt \ , 0 \le s \le 1 \ , \ 0 < q < 1 \ , \ \alpha \ge q-1$$
(۲ - ۱ - ۳)

را با تقریبی برای $g(t)$، محاسبه نمائیم. برای این منظور $g(t)$ را با استفاده از چندجمله‌ای‌های انتقال یافته چبیشف $T_k(2t-1)$ تقریب می‌زنیم، یعنی

$$g(t) \approx p_n(t) = {\sum_{k=0}^{n}}' a_k T_k(2t-1) \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (۲-۱-۴)$$

که در آن a_k ها ضرایب چبیشف هستند، و $p_n(t)$، $f(t)$ را در نقاط گره $t_j = \frac{\{1+\cos(\frac{\pi j}{n})\}}{2}$، $j = 0, \dots, n$ درونیابی می‌کند.

a_k ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_k = \frac{2\delta_k}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(t_j) \cos \frac{\pi j k}{n}$$

که در آن $\delta_k = 1 \ (k = 0, \dots, n-1)$ و $\delta_n = 0/5$

منظوراز $\sum'$ همان جمع‌بندی معمولی است با این تفاوت که فقط ضریب جمله اول نصف می‌شود، و در $\sum''$ ضریب جمله اول و آخر نصف می‌شود.

بنابراین تقریب $D_n^q\{s^\alpha g(s)\}$ برای $D^q\{s^\alpha g(s)\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_n^q\{s^\alpha g(s)\} := D^q\{s^\alpha p_n(s)\} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{ds} \int_0^s p_n(t) t^\alpha (s-t)^{-q} dt \qquad (۲-۱-۵)$$

---

[۲] Caputo

نکته ۱.۱.۲ $p_n(\circ) = g(\circ)$ و $p_n(1) = g(1)$.

برای ادامه محاسبه تقریب $D_n^q\{s^\alpha g(s)\}$ از $D^q\{s^\alpha g(s)\}$، $h_{n-1}(t)$ را چندجمله‌ای از درجه $n-1$ در نظر می‌گیریم که در رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(t) = th_{n-1}(t) + p_n(\circ) = th_{n-1}(t) + g(\circ) \qquad (۲-۱-۶)$$

$$h_{n-1}(t) = \frac{p_n(t) - p_n(\circ)}{t} = \frac{p_n(t) - g(\circ)}{t}$$

بنابراین

$$p_n'(t) = h_{n-1}(t) + th_{n-1}'(t)$$

با استفاده از تعریف $h_{n-1}(t)$ و نکته بالا داریم

$$t^{\alpha+1}h_{n-1}(t) = t^\alpha(p_n(t) - g(\circ))$$

در نتیجه از رابطه اخیر و با کمک رابطه

$$t^{\alpha+1}h_{n-1}(t) = \circ$$

برای $t = \circ$، خواهیم داشت

$$D^q\{s^\alpha p_n(s)\} - g(\circ)D^q s^\alpha = D^q\{s^{\alpha+1}h_{n-1}(s)\} = D_*^q\{s^{\alpha+1}h_{n-1}(s)\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_\circ^s \{(\alpha+1)h_{n-1}(t) + th_{n-1}'(t)\}t^\alpha(s-t)^{-q}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_\circ^s \{\alpha h_{n-1}(t) + th_{n-1}'(t) + h_{n-1}(t)\}t^\alpha(s-t)^{-q}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_\circ^s \{\alpha h_{n-1}(t) + p_n'(t)\}t^\alpha(s-t)^{-q}dt \qquad (۲-۱-۷)$$

برای محاسبه انتگرال سمت راست رابطه (۷ – ۱ – ۲)، لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۲.۱.۲ برای چندجمله‌ای $h_{n-1}(t)$ در رابطه (۶ − ۱ − ۲)، چندجمله‌ای‌های $F_{n-2}(t)$ از درجه $n-2$ و $G_{n-1}(s)$ از درجه $n-1$ موجودند، به طوری که

$$\int_x^s \frac{\{\alpha h_{n-1}(t)+p_n'(t)\}t^\alpha}{(s-t)^q}dt=\frac{x^{\alpha+1}F_{n-2}(x)}{(s-t)^{q-1}}+G_{n-1}(s)\int_x^s \frac{t^\alpha}{(s-t)^q}dt \qquad (2-1-8)$$

برهان: قرار دهید

$$\mu_k=\int_x^s t^{k+\alpha}(s-t)^{-q}dt$$

چون

$$\frac{d}{dt}[t^{k+\alpha}(s-t)^{1-q}]=(k+\alpha)t^{k+\alpha-1}(s-t)^{1-q}+t^{k+\alpha}(-1)(1-q)(s-t)^{-q}$$

$$=t^{k+\alpha-1}(s-t)^{-q}((k+\alpha)(s-t)-t(1-q))$$

$$=\{(k+\alpha)s-(k+\alpha)t+(q-1)t\}t^{k+\alpha-1}(s-t)^{-q}$$

با انتگرال گیری جزء به جزء نتیجه می‌گیریم

$$\mu_k=\frac{[\{x^{\alpha+1}(s-x)^{1-q}\}x^{k-1}+(k+\alpha)s\mu_{k-1}]}{(k+\alpha-q+1)} \qquad (2-1-9)$$

اگر رابطه (۹ − ۱ − ۲) را به صورت بازگشتی بکار ببریم، به دست می آوریم

$$\mu_k=x^{\alpha+1}(s-x)^{1-q}\psi_{k-1}(x)+A_k s^k\mu_0 \qquad (2-1-10)$$

که در آن $\psi_k(x)$ چندجمله‌ای از درجه k و A_k ثابت مستقل از s و x است. همچنین $\psi_{-1}(x)=0$ در نظر گرفته می‌شود.

با انتگرال‌گیری جزٔ به جزٔ از سمت چپ رابطه (۸ − ۱ − ۲) و به کار بردن رابطه (۱۰ − ۱ − ۲)

می‌توان سمت چپ رابطه (۸ − ۱ − ۲) را به صورت $\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\mu_k$ نوشت که در آن β_kها ثابت‌اند، در این صورت داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\mu_k=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(x^{\alpha+1}(s-x)^{1-q}\psi_{k-1}(x)+A_ks^k\mu_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_kx^{\alpha+1}(s-x)^{1-q}\psi_{k-1}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_kA_ks^k\mu_0$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{(s-x)^{q-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\psi_{k-1}(x)+\mu_0\sum_{k=0}^{n-1}\beta_kA_ks^k$$

با اختیار کردن مقادیر

$$F_{n-2}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\psi_{k-1}(x)\qquad,\qquad G_{n-1}(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_kA_ks^k$$

رابطه (۸ − ۱ − ۲) به سادگی نتیجه می‌شود.□

از رابطه (۸ − ۱ − ۲) داریم:

$$\int_0^s\{\alpha h_{n-1}(t)+p'_n(t)\}t^\alpha(s-t)^{-q}dt=G_{n-1}(s)\int_0^s\frac{t^\alpha dt}{(s-t)^q}=G_{n-1}(s)s^{\alpha-q+1}\beta(\alpha+1,1-q)$$
(۲ − ۱ − ۱۱)

که در آن $\beta(\alpha+1,1-q)$، انتگرال بتاست.

با استفاده از روابط

$$\begin{cases} s^{\alpha+1-q}\beta(\alpha+1,1-q)=\int_0^s t^\alpha(s-t)^{-q}dt\\ \beta(\alpha+1,1-q)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-q)}{\Gamma(\alpha+2-q)}\\ D^qs^\alpha=s^{\alpha-q}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-q)}\end{cases}$$

و با کمک روابط (۵ − ۱ − ۲) و (۷ − ۱ − ۲) و (۱۱ − ۱ − ۲) داریم

$$D_n^q\{s^\alpha g(s)\}:=D^q\{s^\alpha p_n(s)\}=\frac{1}{\Gamma(1-q)}\frac{d}{ds}\int_0^s p_n(t)t^\alpha(s-t)^{-q}dt$$