بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه پیام نور
پایان نامه رشته ریاضی محض-گرایش آنالیز
جهت دریافت مدرک کارشناسی ارشد

عنوان:

سیستم‌های دینامیکی بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت

استاد راهنما:

دکتر صدیقه شادکام تربتی

استاد مشاور:

دکتر محمد صال مصلحیان

نگارنده:

مصطفی نامدار بابلی

بهمن ۱۳۸۸

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ۱۳۸۸/۱۱/۷
شماره: ۸۱۰/۲۴۹۶
پیوست: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **سیستم های دینامیکی بر روی C^* - مدول های هیلبرت** که توسط **مصطفی نامدار بابلی** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۵-۱۱/۸۸ نمره ۱۸/۷۵ هجده و هفتاد و پنج صدم درجه ارزشیابی : عالی . . . .

اعضای هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی:	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر صدیقه شادکام تربتی	استاد راهنما	استادیار	
	استاد راهنمای همکار		
دکتر محمد صال مصلحیان	استاد مشاور	استاد	
دکتر ثریا طالبی	استاد داور	استادیار	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	دانشیار	

مشهد: خیابان امام خمینی ۴۰ - صندوق پستی ۹۱۹ تلفن : ۸۵۲۸۵۲۸ (۰۵۱۱)
mashhad@pnu.ac.ir

تاریخ: ۱۳۸۸/۱۱/۷
شماره: ۸۱۰/۲۴۲۳۷
پیوست:

دانشگاه پیام نور

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **سیستم های دینامیکی بر روی C^*- مدول های هیلبرت** که توسط **مصطفی نامدار بابلی** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۸۸/۱۱/۵ نمره ۱۸/۷۵ . هجده و هفتاد و پنج درجه ارزشیابی : عالی . . . . .

اعضای هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی:	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر صدیقه شادکام تربتی	استاد راهنما	استادیار	
	استاد راهنمای همکار		
دکتر محمد صال مصلحیان	استاد مشاور	استاد	
دکتر ثریا طالبی	استاد داور	استادیار	
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	دانشیار	

چکیده

هدف اصلی این پایان‌نامه مطالعه گروه‌های یک پارامتری از یکانی‌ها یا همان سیستم‌های دینامیکی بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت پر و شناسایی مولد بی‌نهایت کوچک آنها می‌باشد. بدین منظور ابتدا به مطالعه روی اشتقاق‌ها و اشتقاق‌های داخلی برروی C^*-جبرها و به دنبال آن به معرفی و بحث در مورد اشتقاق‌های تعمیم‌یافته بر روی مدول‌های باناخ و C^*-مدول‌های هیلبرت پر پرداخته و نشان داده می‌شود که اشتقاق‌های تعمیم‌یافته بر روی C^*-جبرها کراندار و در نتیجه پیوسته می‌باشند. در خاتمه اثبات می‌شود که مولد بی‌نهایت کوچک از یک سیستم دینامیکی، اشتقاقی تعمیم‌یافته با برد چگال که بر روی یک C^*-مدول هیلبرت پر تعریف شده است می‌باشد.

اهداف

(۱) مطالعه C^*-مدول‌های هیلبرت و همریختی‌های بین این نوع فضاها

(۲) معرفی اشتقاق‌ها واشتقاق‌های داخلی و مطالعه آنها بر روی C^*-جبرهای خاص

(۳) معرفی اشتقاق‌های تعمیم‌یافته و بررسی خواص آنها بر روی مدول‌های باناخ و C^*-مدول‌های هیلبرت

(٤) معرفی و آشنایی با خواص سیستم‌های دینامیکی یا همان گروه‌های یک پارامتری از یکانی‌ها و مطالعه آنها بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت پر

(٥) شناسایی مولد بی‌نهایت کوچک یک سیستم دینامیکی به طوری که در حل مسایل معادلات سیستم‌های دینامیکی کاربردی و مفید باشد. همچنین نشان دادن اینکه مولد بی‌نهایت کوچک یک سیستم دینامیکی، یک اشتقاق تعمیم‌یافته بر زوی یک C^*-مدول هیلبرت پر با برد چگال می‌باشد.

فهرست

مقدمه	۱
فصل اول : پیشنیازها	٤
بخش اول : پیشنیازهای جبری	٤
بخش دوم : پیشنیازهای توپولوژی و آنالیز تابعی	۹
بخش سوم : نظریه عمومی C^*-جبرها	۱۸
بخش چهارم : مدول‌های هیلبرت	٢٦
بخش پنجم : همریختی‌های بین C^*-مدول‌های هیلبرت	۳٥
فصل دوم : اشتقاق‌های نزدیک‌پذیر بر روی C^*-جبرهای ساده	٥٤
فصل سوم : اشتقاق‌های تعمیم یافته بر روی مدول‌های باناخ و C^*-مدول‌های هیلبرت	٦١
بخش اول : اشتقاق داخلی و اشتقاق تعمیم‌یافته بر روی مدول‌های باناخ	٦١
بخش دوم : اشتقاق‌های تعمیم‌یافته بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت	٦۹
فصل چهارم : سیستم‌های دینامیکی بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت پر	۷٥
بخش اول : نیم‌گروه‌های به طور یکنواخت پیوسته از عملگرهای خطی کراندار	۷٥
بخش دوم : نیم‌گروهای قویا پیوسته از عملگرهای خطی کراندار	۸۳
بخش سوم : قضیه هیل- یوسیدا	۹۲
بخش‌چهارم : سیستم‌های دینامیکی بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت پر	۹۷
نتایج	۱۰۱
مساله‌های باز	۱۰۲
مراجع	۱۰٤
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۱۰۷
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۱۱٦

مقدمه

C^*-مدول‌های هیلبرت به طور طبیعی تعمیمی از فضاهای هیلبرت می‌باشند که در آنها به جای میدان اعداد مختلط $\mathscr{C}$، یک C^*-جبر جایگزین می‌گردد. این تعمیم برای نخستین بار در حالتی که C^*-جبر جابجایی می‌باشد در مقاله‌ی آی. کاپلانسکی [۲۶] مطرح شد؛ اما با این حال وی در آن مقاله چنین نوشت که هرگاه C^*-جبر غیرجابجایی فرض شود این تعمیم بسیار پیچیده می‌باشد و همین امر سبب گردید تا دو دهه کسی به این نوع فضا توجهی نشان ندهد. اما سرانجام درسال ۱۹۸۳ نظریه عمومی C^*-مدول‌های هیلبرت (یعنی برای یک C^*-جبر دلخواه که همانند اسکالرها عمل می‌کند) در مقاله پیشتاز دبلیو. پاسچک[۳۷] که در رساله دکتری وی نیز آمد مطرح شد. پاسچک نشان داد که نگرانی کاپلانسکی در مورد نظریه C^*-مدول‌های هیلبرت در حالت ناجابجایی بودن یک C^*-جبر باطل است و بسیاری از خواص اساسی C^*-مدول‌های هیلبرت برای مدول‌هایی که بر روی یک C^*-جبر دلخواه تعریف می‌شوند برقرار می‌باشد. هم‌زمان ریفل نیز به طور مستقل همان موضوع را گسترش داد و از C^*-مدول‌های هیلبرت به عنوان ابزاری اساسی برای نظریه‌اش که در مورد نمایش‌های القاشده از C^*-جبر بود به کار گرفت[۳۹]. از آن زمان به بعد نظریه C^*-مدول‌های هیلبرت به سرعت رشد و گسترش یافته است. مقدار زیادی از آن نتیجه کارهای کاسپاروف می‌باشد که از آنها به عنوان قالبی برای معرفی نظریه‌اش یعنی KK-نظریه بهره گرفت. کتاب‌نامه مفصلی در مورد نظریه C^*-مدول‌های هیلبرت را در مراجع [۲۰] و[۳۰] می‌توان یافت.

موضوع مورد بحث این پایان‌نامه اشتقاق‌های تعمیم‌یافته بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت و سیستم‌های دینامیکی بر روی این فضاها می‌باشد. این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل به شرح ذیل می‌باشد:

فصل اول این پایان‌نامه به ارایه مقدماتی درارتباط با فضاهای باناخ، هیلبرت، C^*-جبرها و C^*-مدول‌های هیلبرت و همریختی‌های بین C^*-مدول‌های هیلبرت اختصاص داده شده است که به آشنایی و درک بهتر مطالبی که در طول این پایان‌نامه مطرح می‌شوند خواهد انجامید.

در فصل دوم به معرفی اشتقاق بر روی یک C^*-جبر و نزدیک‌پذیر بودن آن پرداخته و نشان داده خواهد شد یک اشتقاق برروی C^*-جبری ساده که دارای بردی چگال درآن C^*- جبر نیست، نزدیک‌پذیر است. اشتقاق‌ها در همان اوایل پیدایش C^*-جبرها مطرح گردیدند و مطالعه بر روی آنها تا آنجا ادامه یافت که

شاخه‌ای مهم در نظریه عملگرها به شمار آمدند. در طول پنج دهه قبل گام‌های بلندی در باب مطالعه آنها برداشته شده است. اشتقاق‌ها به دو دسته مهم: اشتقاق‌های کراندار و اشتقاق‌های غیرکراندار تقسیم می‌شوند. این فصل بر اساس مرجع [۳۵] نوشته شده است.

فصل سوم در مورد اشتقاق‌های تعمیم‌یافته و معرفی آنها می‌باشد. در ادامه رفتار آنها بر روی مدول‌های باناخ، C^*-جبرها و C^*-مدول‌های هیلبرت بررسی خواهد شد. همچنین در بخش دوم این فصل بحثی مشابه با آنچه در فصل دوم بیان شد در باب اشتقاق‌های تعمیم‌یافته بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت پر مطرح و اثبات می‌شود. در نگارش این فصل از مراجع [۹]، [۱۰] و [۴۳] کمک گرفته شده است.

سرانجام در فصل چهارم بحث اصلی با معرفی گروه‌های یک پارامتری از یکانی‌ها یا همان سیستم‌های دینامیکی از منظر نظریه عملگرها آغاز می‌شود که به آنها در نظریه عملگرها، یک خانواده از نیم‌گروه‌های یک پارامتری از عملگرهای خطی کراندار قویا پیوسته می‌نامند. سیستم‌های دینامیکی در ریاضیات در مورد حل معادلات دیفرانسیلی که در مکانیک ظاهر می‌شوند از منظر هندسی و آنالیزی بحث می‌کنند [۳۸]. در سال‌های گذشته کاپلانسکی در زمینه مکانیک کوانتم تحقیقاتی را در باب اشتقاق‌های پیوسته آغاز نموده است [۲۷]. توجه کنید که اشتقاق‌ها عملگرهای خطی می‌باشند بنابراین پیوسته بودن معادل با کراندار بودن می‌باشد[۱۸]. در سال ۱۹۶۷ شیلو ثابت نمود که هرگاه یک جبر باناخ A از توابع پیوسته بر روی بازه‌های واحد که شامل توابع از مرتبه متناهی مشتق‌پذیر می‌باشند را در نظر بگیریم آنگاه A شامل توابع n مرتبه مشتق‌پذیر (برای یک nمورد نظر) است [۴۴]. کار بر روی اشتقاق‌های کراندار بیشتر از حالت غیر کراندار آن به خاطر راحتی بحث و بدست دادن برخی نتایج مهم که در حالت غیرکراندار بودن نیز کاربردی‌اند، صورت گرفته است. اما با این همه مطالعه اشتقاق‌های غیرکراندار با حل مساله تشکیل دینامیکی (تحلیل نیروها) در مکانیک استاتیک به طور جدی آغاز شد. در فصل چهارم نشان داده می‌شود که هر اشتقاق تعمیم‌یافته بر روی C^*-مدول هیلبرت پر به عنوان یک مولد بی‌نهایت کوچک از یک سیستم دینامیکی یا همان گروه یک پارامتری از عملگرهای یکانی می‌تواند در نظر گرفته شود. بنابراین می‌توان برای یک سیستم دینامیکی دلخواه یک مولد بی‌نهایت کوچک آن را به آسانی می‌توان شناسایی کرد.

در خاتمه بر حسب وظیفه بر خود لازم می‌دانیم از تمامی کسانی که در نگارش این پایان‌نامه به نحوی یاری رسانیده‌اند کمال قدردانی و تشکر را داشته باشیم.

فصل اول

پیشنیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی که در سرتاسر بحث این پایان‌نامه مطرح خواهند شد آورده می‌شوند. هدف از آوردن این مطالب مرور و تسلط بیشتر مطالبی که خواننده با آنها در طی دوره‌های تحصیلی خود مواجه بوده است می‌باشد. همچنین خواننده در این فصل با مفاهیمی از قبیل C^*-مدول هیلبرت و همریختی‌ها بر روی این فضا آشنا می‌شود.

بخش اول

پیشنیازهای جبری

تعاریف و قضایایی که در این بخش آورده می‌شوند بیشتر جنبه یادآوری خواهند داشت. از آنجایی که هدف این فصل ارائه تعریفی در مورد فضای مدول هیلبرت و بررسی برخی از خواص آن می‌باشد بنابراین ذکر مفهوم جبری مدول و آوردن مطالبی پیرامون آن لازم به نظر می‌رسد.

۱-۱-۱ تعریف

هرگاه R یک حلقه فرض شود آنگاه R-مدول چپ M یا مدول چپ روی R یک گروه جمعی آبلی است که عمل جمع را با علامت + نشان داده و مجهز به ضرب اسکالر اعضای حلقه R در اعضای M می‌باشد، یعنی مجهز به نگاشتی چون $.: R\times M \to M$ همراه با خواص زیراست

$$r.(m+m')=r.m+r.m' \qquad (r\in R;\ m,m'\in M) \tag{۱}$$

$$(rr').m=r.(r'.m) \qquad (r,r'\in R;\ m\in M) \tag{۲}$$

$$(r+r').m=r.m+r'.m \qquad (r,r'\in R;\ m\in M) \tag{۳}$$

که در بالا نقطه "." نشان دهنده ضرب اسکالر عضو حلقه در عضو مدول است و معمولا حذف می‌شود.

۱-۱-۲ تذکر

در تعریف قبل M را یک R-مدول چپ گویند و به طریق مشابه می‌توان یک R- مدول راست M را نیز

تعریف کرد که نگاشت $\begin{aligned} .: M\times R &\to M \\ (m,r) &\mapsto m.r \end{aligned}$ عمل ضرب اسکالرآن می‌باشد.

۱-۱-۳ تذکر

در حالتی که R یک حلقه جابجایی است تعاریف R-مدول چپ و R-مدول راست بر هم منطبق‌اند.

۱-۱-٤ تعریف

هر گاه حلقه R دارای یکه ضربی 1_R باشد و نیز $(a\in A)$ $1_R a=a$ آنگاه R- مدول M را یک R- مدول یکانی می‌نامند.

۱-۱-۵ مثال

(۱) هر گروه آبلی جمعی G یک Z- مدول یکانی است که در آن تابع حاصل‌ضرب اسکالر اعضای Z در اعضای مدول G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} .: Z\times G &\to G \\ (n,a) &\mapsto na \end{aligned}$$

(۲) هرگاه S یک حلقه و R یک زیرحلقه باشد آنگاه S یک R-مدول است.

۱-۱-٦ تعریف

هر نگاشت مانند $f: M\to N$ که در آن R یک حلقه و M و Nدو R- مدول (هر دو R- مدول چپ یا هر دو R-مدول راست) می‌باشند را یک نگاشت R-مدولی نامند.

۱-۱-۷ تعریف

نگاشت R- مدولی f در تعریف ۱-۱-٦ را یک همریختی R-مدول‌ها یا R-همریختی گویند هرگاه

$$f(rm+r'm')=rf(m)+r'f(m') \qquad (r,r'\in R\ ;\ m,m'\in M)$$

اگر f ۱-۱ باشد آن را یک R-تکریختی نامند و در صورتی که f پوشا باشد آن را یک R- برووریختی گویند. یکریختی R-مدولی یک همریختی دوسویی R-مدولی است.

هر گاه R یک حلقه جابجایی یکدار $0\neq 1_R$ باشد که در آن هر عنصر ناصفر یکه می‌باشد یعنی دارای وارون ضربی (معکوس) باشد آنگاه هر همریختی R- مدول‌ها یک تبدیل خطی نام دارد.

۱-۱-۸ مثال

به ازای هر دو R- مدول A و B نگاشت صفر $\begin{array}{c} 0:A\to B \\ a\mapsto 0 \end{array}$ یک R-همریختی بین آن دو تعریف می‌کند.

۱-۱-۹ تعریف

فرض کنید که $f:A\to B$ یک R-همریختی بین دو R-مدول A و B است. در این صورت هسته f یا $Kerf$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Kerf=\{a\in A\,|\,f(a)=0_B\}$$

که در آن 0_B عنصر همانی B نسبت به عمل جمع است. همچنین نقش(نگاره) A، به صورت

$$f(A)=\operatorname{Im} f=\{b\in B/\exists a\in A \;\; s.t \;\; b=f(a)\}$$

می‌باشد. هرگاه H زیرمجموعه‌ای از B باشد آنگاه $f^{-1}(H)=\{a\in A\,|\,f(a)\in H\}$ نقش معکوس H می‌باشد.

۱-۱-۱۰ تعریف

هرگاه R یک حلقه، A یک R-مدول و B زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد آنگاه B یک زیرمدول A است مشروط بر اینکه B یک زیرگروه جمعی A بوده و به ازای هر $b\in B$ و $r\in R$، $rb\in B$ باشد.

۱-۱-۱۱ مثال

(۱) هرگاه R یک حلقه و $f:A\to B$ یک همریختی R-مدول‌ها باشد آنگاه $Kerf$ یک زیرمدول A و $\operatorname{Im} f$ یک زیرمدول B می‌باشد. بعلاوه $f^{-1}(c)=\{a\in A\,|\,f(a)=c\}$ یک زیرمدول A است [٤].

(۲) اگر I یک ایده‌آل حلقه R(به ازای هر $a\in I$ و $ar\in I:r\in R$ و ra)، A یک R-مدول و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از A باشد در این صورت $IS=\{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \,|\, r_i\in I; a_i\in S; n\in N\}$ زیرمدولی از A است [۳] و به همین نحو هرگاه $a\in A$ باشد آنگاه $Ia=\{ra\,|\,r\in I\}$ یک زیرمدول A است.

(۳) هرگاه $\{B_i\}_{i\in I}$، یک خانواده از زیرمدول‌های R- مدول A باشد که در آن I یک مجموعه اندیسگذار است، آنگاه به آسانی ثابت می‌شود که $\bigcap_{i\in I} B_i$ زیرمدولی از A است [۳].

۱-۱-۱۲ قضیه (معیار زیرمدول بودن)

فرض کنید که M یک R- مدول و N یک زیرمجموعه ناتهی از Mباشد. در این صورت N یک زیرمدول از M است هرگاه به ازای هر دو عنصراز N مثل y و x و هر عنصر از R مانند r بتوان نتیجه گرفت که $x+y\in N$ و $rx\in N$.

اثبات: [۳]

۱-۱-۱۳ تعریف

هرگاه Xزیرمجموعه‌ای از مدول A روی حلقه R باشد، آنگاه اشتراک تمام زیرمدول‌های Aشامل X، زیرمدول تولید شده بوسیله Xنامیده می‌شود که به آن زیرمدول پیموده شده بوسیله Xنیز گویند و با نماد $<X>$ نشان دهند. اگر Xمتناهی باشد و X مدول B را تولید کند، گوییم B با مولد متناهی است. هرگاه $X=\varnothing$ باشد، آنگاه $<X>$ به وضوح مدول صفر $\{0\}$ است. وقتی که X فقط از یک عنصر تشکیل شده باشد یعنی $X=\{a\}$، آنگاه زیرمدول تولید شده بوسیله X (زیر)مدول دوری تولید شده بوسیله a نامیده می‌شود. بالاخره هرگاه $\{B_i \mid i\in I\}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های Aباشد، آنگاه زیرمدول‌های تولید شده به وسیله $X=\bigcup_{i\in I} B_i$ مجموع را مدول‌های B_i می‌گویند. اگر Iمجموعه اندیسگذار متناهی باشد، مجموع $B_1,\dots,B_n$ با $B_1+B_2+\dots+B_n$ نموده می‌شود.

۱-۱-۱۴ قضیه

فرض کنید که Rیک حلقه، A یک R-مدول، X زیرمجموعه‌ای از A، $\{B_i\}_{i\in I}$خانواده‌ای اززیرمدول‌های A و نیز $a\in A$باشد. همچنین مجموعه $Ra=\{ra \mid r\in R\}$را در نظر بگیرید، در این صورت

(آ) Raزیرمدولی از A است و نگاشت $R\to Ra$ داده شده به صورت $r\mapsto ra$ بروریختی R-مدول‌هاست.

(ب) زیرمدول D تولید شده به وسیله X عبارت است از

$$\{\sum_{i=1}^{S} r_i a_i+\sum_{j=1}^{t} n_j b_j \mid s,t\in N; a_i,b_j\in X; r_i\in R, n_j\in Z\}.$$

هرگاه حلقه R یکدار بوده و A یکانی باشد آنگاه $D=RX=\{\sum_{i=1}^{S} r_i a_i \mid s\in N; a_i\in X; r_i\in R\}$.

(پ) مجموع خانواده $\{B_i\}_{i\in I}$ از تمام مجموع‌های متناهی $b_{i_1}+\dots+b_{i_n}$ که $b_{i_k}\in B_{i_k}$ تشکیل شده است.

اثبات: [۳]

۱-۱-۱۵ قضیه

فرض کنید که M، R-مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M باشد در این صورت شرایط زیر معادلند:

(آ) $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ایی مستقل از R-مدول‌هاست یعنی به ازای هر $n\geq 1$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{i_k} مانند x_{i_k}، از تساوی $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}=0$ نتیجه می‌شود که به ازای هر k، $1\leq k\leq n$، $x_{i_k}=0$.

(ب) به ازای هر عضو $j\in I$، $M_j\cap(\sum_{i\in I-\{j\}} M_i)=0$.

(پ) هر عضو از $\sum_{i\in I} M_i$ نمایشی منحصر به فرد برحسب مجموع متناهی از اعضای M_iها دارد.

اثبات: [۷]

۱-۱-۱۶ تعریف

فرض کنید که M یک R-مدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمدول‌های M است. اگر یکی از شرایط معادل در قضیه قبل برای این خانواده فراهم شود آنگاه مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را مجموع مستقیم نامیده و با $\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ نشان می‌دهند. در حالتی که $I=\{1,\dots,n\}$ است $\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ را به صورت $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ یا $M_1\oplus\dots\oplus M_n$ نمایش می‌دهند.

۱-۱-۱۷ تعریف

به ازای یک مدول مفروض A بر روی یک حلقه R هرگاه B زیرمدول A باشد آنگاه فضای $\frac{A}{B}$ خارج‌قسمتی توسط رابطه هم‌ارزی $a\sim b\Leftrightarrow b-a\in B$، به ازای هر a و b در A تعریف می‌شود. عناصر فضای خارج‌قسمتی $\frac{A}{B}$ رده‌های هم‌ارزی $[a]=\{a+b/b\in B\}$ می‌باشند. عمل جمع بر روی $\frac{A}{B}$ برای هر دو رده هم‌ارزی دلخواه یک رده هم‌ارزی از حاصل‌جمع نماینده‌های آن دو رده می‌باشد، و به همین طریق

حاصل‌ضرب عناصر $\frac{A}{B}$ در عناصر R تعریف می‌شود. در این صورت $\frac{A}{B}$ تبدیل به یک مدول روی حلقه R خواهد شد که آن را یک مدول خارج‌قسمتی می‌نامند. به طور نمادی به ازای هر a و b در A و r در R چنین می‌توان نوشت که

$$(a+B)+(b+B)=[a]+[b]=[a+b]=(a+b)+B$$
$$r.(a+B)=r.[a]=[r.a]=(r.a)+B$$

۱-۱-۱۸ مثال

فرض کنید حلقه R شامل اعداد حقیقی و R-مدول $A=R[X]$ حلقه تمام چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی باشد. همچنین زیرمدول $B=(X^2+1)R[X]$ از A، شامل تمامی چندجمله‌ای‌های بخش‌پذیر توسط X^2+1 را در نظربگیرید. به‌آسانی نتیجه می‌توان تحقیق نمود که که رابطه هم‌ارزی معین‌شده توسط این مدول به صورت زیر خواهد بود.

$P(X)\sim Q(X)\leftrightarrow$ باقی‌مانده تقسیم $P(X)$ و $Q(X)$ بر X^2+1 یکسان باشند

بنابراین در مدول خارج‌قسمتی $\frac{A}{B}$، X^2+1 را همان 0 در نظر گرفته و می‌توان دید که $\frac{A}{B}$ از $R[X]$ با قرار دادن $X^2+1=0$ بدست می‌آید.

۱-۱-۱۹ قضیه

نگاشت $\pi: A\to \frac{A}{B}$ داده شده با $a\mapsto a+B$ یک برویختی R - مدول‌ها با هسته B است. نگاشت π برویختی کانونی (تصویر) نام دارد [۷].

بخش دوم

پیشنیازهای توپولوژی و آنالیز تابعی

از آنجا که در این پایان‌نامه به فضاهای مدولی باناخ و مدولی هیلبرت به طور مکرر برخورد خواهد شد بنابراین لازم است که مقدماتی آنالیزی در مورد فضاهای باناخ و هیلبرت آورده شود.

۱-۲-۱ تعریف

یک فضای نرمدار کامل $(X,\|.\|)$ را یک فضای باناخ نامند. به عبارت دیگر فضای باناخ فضایی برداری است که همراه با نرم تعریف شده بر روی آن تبدیل به یک فضای نرمدار شده و هر دنباله کوشی از عناصر X به عضوی در X همگراست.

۱-۲-۲ مثال

(۱) $\mathbb{C}$ همراه با نرم $\|z\|=|z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$ ساده‌ترین فضای باناخ روی اعداد مختلط است.

(۲) فضای $B(X)$ متشکل از تمام توابع مختلط مقدار پیوسته و کراندار روی فضای دلخواه X همراه با سوپرمم‌نرم $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$ یک فضای باناخ است.

(۳) فضای l_p، $1\le p<\infty$، متشکل از تمامی دنباله‌هایی چون $\{x_n\}$ به قسمی که سری $(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ همگراست یک فضای برداری نرمدار کامل است[۱].

۱-۲-۳ تذکر

فرض کنید E یک فضای باناخ و E_1 زیر فضایی از E باشد. در این صورت E_1 فضای باناخ است اگر و فقط اگر E_1 بسته باشد.

اثبات: [۱۸]

۱-۲-٤ تعریف

فرض کنید که E یک فضای خطی روی R یا $\mathbb{C}$ باشد. تابعی‌های خطی توابعی مانند $f:E\to R$ اند به قسمی که داشته باشیم:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y) \qquad (x,y\in E;\ \lambda,\mu\in R)$$

توجه کنید که $Kerf=\{x\in E\mid f(x)=0\}$ زیرفضای خطی از E است.

۱-۲-۵ مثال

در فضای خطی c_0، فضای تمام دنباله‌هایی که همگرا به صفر هستند ، تابعی خطی f را به صورت

$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ تعریف می‌کنیم که $\{b_i\}$ در شرط $\sum |b_i| < \infty$ یا به طور معادل $\{b_i\} \in l_1$ صدق می‌کند.

۱-۲-۶ تعریف

فرض کنید که X و Y دو فضای باناخ‌اند و نیز فرض کنید که $T : X \to Y$ نگاشتی خطی است که معمولا به آن عملگر خطی گویند. در این صورت T را کراندار نامند هرگاه

$$\exists C > 0 \quad s.t \quad \forall x \in X \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq C . \|x\|_X$$

حال اگر T کراندار باشد، نرم عملگر T به صورت زیر

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

تعریف می‌شود.

۱-۲-۷ مثال

در $C[0,1]$، فضای تمام توابع پیوسته مختلط مقدار بر بازه $[0,1]$ ، $Af = \int_0^1 K(t,\tau) f(\tau) d\tau$ عملگری خطی است که در آن K یک تابع پیوسته دو متغیره می‌باشد و

$$\| Af \|_{C[0,1]} \leq \max | f | . \max_t \int_0^1 | K(t,\tau) | dt$$

بنابراین $\| A \| \leq \max_t \int_{\infty}^1 | K(t,\tau) | d\tau$.

۱-۲-۸ قضیه(هان-باناخ)

هرگاه M یک زیرفضای از فضای خطی نرمدار X باشد، و نیز f تابعی خطی روی M باشد آنگاه f را می‌توان به تابعی خطی کراندار مانند F روی X توسیع داد به طوری که $\|F\| = \|f\|$.(در این جا نیازی به بسته بودن M نیست.)

اثبات:[۱]

۱-۲-۹ نتیجه

فرض کنید که M زیرفضایی خطی از یک فضای خطی نرمدار X و $x_0 \in X$باشد. در این صورت x_0 در

بستار M ($\overline{M}$) قرارمی‌گیرد وقتی و فقط وقتی که هیچ تابعی خطی کراندار مانند f روی Xنتوان یافت به قسمی که $f(x)=0(x\in M)$ ولی $f(x)\neq 0$ برقرار باشد.

اثبات:[۱]

۱-۲-۱۰ قضیه(گراف بسته)

اگر تبدیلی خطی T از فضای باناخ Xبه توی فضای باناخ Y که دامنه آن، $D(T)$ ،بسته است موجود باشد و نمودارش یعنی مجموعه جفت‌های $(x,T(x))$، به ازای هر xدر $D(T)$، در $X\times Y$ بسته باشد آنگاه T کراندار و در نتیجه پیوسته است.

اثبات:[۱]

۱-۲-۱۱ تذکر

از رابطه ($x\in X$) $\|1-x\|<1$ که در آن Xیک فضای باناخ است نتیجه می‌شود که x وارون‌پذیر می‌باشد .[۱۸]

۱-۲-۱۲ تعریف

اگر A عملگری خطی و نه لزوما کراندار در فضای باناخ X باشد، I عملگر همانی (برای هر $x\in X$: $I(x)=x$) مجموعه جواب $\rho(A)$ از A مجموعه تمام اعداد مختلط λ است که $\lambda I-A$ وارون‌پذیر باشد، یعنی $(\lambda I-A)^{-1}$ عملگری خطی کراندار در X است. خانواده $R(\lambda:A)=\{(\lambda I-A)^{-1}/\lambda\in\rho(A)\}$ از عملگرهای خطی کراندار مجموعه جواب عملگر A نامیده می‌شود.

۱-۲-۱۳ قضیه (اصل کرانداری یکنواخت)

برای خانواده‌ای از توابع حقیقی مقدار پیوسته و نقطه‌ای کراندار بر فضای متریک کامل X هر زیرمجموعه باز از X به طور یکنواخت کراندار است. به بیان دیگر هرگاه X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرمدار باشد، در این صورت یک زیرمجموعه A از $L(X,Y)$ کراندار نقطه‌ای است اگر و فقط اگر کراندار نرمی باشد. (یعنی $M>0$ ای باشد به طوری که به ازای هر $T\in A$, $\|T\|\leq M$).

اثبات:[۱]

۱-۲-۱٤ تعریف

فرض کنید H یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ همراه با تابعی مختلط مقدار دومتغیره $<x,y>: H\times H \mapsto \mathbb{C}$ باشد به قسمی که به ازای هر x و y در H و هر α و β در $\mathbb{C}$دارای خواص زیر است:

(۱) نسبت به مختص اولش خطی است یعنی $<\alpha x_1+\beta x_2, y> = \alpha <x_1,y> + \beta <x_2,y>$

(۲) $\overline{<x,y>} = <y,x>$

(۳) $<x,x> \geq 0$ و نیز $<x,x>=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

در این چنین تابعی را حاصل‌ضرب داخلی یا حاصل‌ضرب اسکالری نامند و H را یک فضای حاصل‌ضرب داخلی می‌گویند.

۱-۲-۱۵ تذکر

با استفاده از خاصیت (۳) در تعریف۱-۲-۱٤ برای هر بردار $x\in H$ نرم بردار x را به صورت $\|x\| = <x,x>^{\frac{1}{2}}$ می‌توان تعریف نمود[۱۸].

۱-۲-۱٦ مثال

(۱) حاصل‌ضرب داخلی در $\mathbb{C}^n$ را به صورت $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b}_i$ می‌توان تعریف نمود که در آن $x=\{a_i\}_{i=1}^n$ و $y=\{b_i\}_{i=1}^n$ می‌باشد.

(۲) در l_2 فرض کنید که $<x,y> = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b}_i$باشد. بنا به نامساوی هولدر

$$|\sum a_i\overline{b}_i| \leq (\sum |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum |b_i|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

نتیجه می‌شود که تابع $<x,y>$ روی $l_2\times l_2$ خوش تعریف است. در واقع

$$|<x,y>| \leq \|x\|.\|y\|.$$

۱-۲-۱۷ قضیه(نامساوی کشی – شوارتز یا کشی-بونیاکوفسکی)

به ازای هر بردار x و y در فضای حاصل‌ضرب داخلی H همراه با حاصل‌ضرب داخلی $<\cdot,\cdot>$ نامساوی زیر همواره برقرار است :