دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض – جبر

عنوان:

گراف مقسوم علیه صفر وابسته به کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر

نگارش:

ریحانه محمدی

استاد راهنما:

دکتر شعبان قلندرزاده

استاد مشاور:

دکتر محمد جواد نیک مهر

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم و همسر فداکارم

که هرچه دارم از آن هاست.

اظهارنامه‌ی دانشجو

عنوان پایان نامه: گراف مقسوم علیه صفر وابسته به کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر

استاد راهنما: دکترشعبان قلندرزاده

نام دانشجو: ریحانه محمدی

شماره‌ی دانشجویی: ۸۸۰۳۹۷۴

اینجانب **ریحانه محمدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر دانشکده‌ی علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه‌شده در پایان‌نامه با عنوان «**گراف مقسوم علیه صفر وابسته به کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر**»، با راهنمایی استاد محترم **جناب آقای دکترشعبان قلندرزاده**، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش‌شده‌مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده‌است. به علاوه، گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه، تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ‌جا ارایه نشده‌است و در تدوین متن پایان‌نامه، چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

... و چنانک به نادر افتد که مردمی که نجارت ناآموخته تختی نیک تواند تراشید، به نادر افتد که مردمی منطق ناآموخته علمی مکتسب بر وجهی کامل حاصل تواند کرد. بل، همچنانک بیشتر مردم که نجارت ندانند قادر باشند بر آنک چوبی بتراشند اما واثق نباشند به آنک آن چوب به آن تراشیدن به اصلاح آید یا نیاید، بلک تباه شود، بیشتر مردم که منطق ندانند در معانی تصرفی توانند کرد، اما واثق نباشند به آنک از آن تصرف علمی حاصل شود یا نشود، بلک در حیرت بیفزاید، یا در ضلالت افکند. و نه هرکه کاری کند داند که چه میکند، یا چه میباید کرد، بلک بسیار کسان باشند که در کارها شروع کنند بر سبیل خبط. و همچنین باشد حکم کسانی که طلب علوم کنند و بر صناعت منطق واقف نباشند.

خواجه نصیرالدین طوسی

اکنون که مرحله‌ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می‌رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره مشوق من بوده‌اند، تشکر و قدردانی کنم.

همچنین، از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکترشعبان قلندرزاده که راهنمای اینجانب در دوره‌ی کارشناسی ارشد بوده‌اند و هدایت این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، و استاد مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد جواد نیک مهر، کمال تشکر و سپاس را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر حمید سید جوادی (داور خارجی) و سر کار خانم دکتر فرشته ملک (داور داخلی) نیز به جهت خواندن این رساله و داوری آن تشکر می کنم.

باشد که گوشه‌ای از زحماتشان را ارج نهاده‌باشم.

فهرست مندرجات

چکیده

در دهه اخیر مقالات زیادی به رشته تحریر در آمده که در آنها به یک حلقه‌ی متناهی یک گراف ساده وابسته شده است و با تجزیه و تحلیل آن گراف ، نتایج عمیقی در نظریه حلقه ها حاصل شده است. در این پایان نامه، ساختار گراف مقسوم علیه صفر تعیین شده توسط کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر حلقه جابجایی، یکدار و نوتری R را مورد بررسی قرار می دهیم. نشان می دهیم که چگونه می توان اطلاعاتی درباره حلقه R را از این ساختار بدست آورد. بویژه ما چگونگی تشخیص اول های وابسته حلقه R از روی این گراف ها را تعیین می کنیم.

کلمات کلیدی :

گراف مقسوم علیه صفر، ایده آل اول وابسته، ایده آل پوچساز.

مقدمه

در سال های اخیر، مقالات زیادی در رابطه با وابسته کردن یک گراف به حلقه، توسط بسیاری از ریاضیدانان ارائه شده است. ایده ی گراف مقسوم علیه از حلقه جابجایی، برای اولین بار توسط بک [۱] مطرح گردید. او در [۵] در مورد گراف حلقه های متناهیا رنگ پذیر تحقیق کرد. بک در [۵]، همه ی عناصر حلقه را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته بود.

با الهام از ایده های مولی [۲]در [۱۱]، گراف کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر حلقه R را بررسی می کنیم که رئوس گراف مذکور از کلاس های هم ارزی مقسوم علیه های صفر تعیین شده بوسیله ایده آل های پوچساز مشخص می شود و این گراف را با $\Gamma_E(R)$ نمایش می دهند.

این گراف چند مزیت نسبت به گراف $\Gamma(R)$ معرفی شده در [۵]، [۲]، [۳] و [۴] دارد.

در بسیاری موارد $\Gamma_E(R)$ یک گراف متناهی است در حالیکه $\Gamma(R)$ نامتناهی است. به عنوان مثال اگر $S = \mathbb{Z}[X,Y]/(X^۳, XY)$ باشد، آنگاه $\Gamma(S)$ یک گراف نامتناهی است در حالیکه $\Gamma_E(S)$ با دارا بودن تنها چهار راس یک گراف متناهی است. در حلقه S، اگرچه $x^۲, ۲x^۲, ...$ مقسوم علیه های صفر متمایزی هستند که x تصویر X در S است، اما همه آنها دارای پوچساز یکسان هستند و در نمایش گراف $\Gamma_E(S)$ تنها با یک تک راس نشان داده می شوند.

بعلاوه گراف کامل $\Gamma_E(R)$ با سه راس یا بیشتر وجود ندارد. صورت مهم دیگری از گرافهای کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه صفر ارتباط این گرافها با اول های وابسته حلقه است. برای مثال در حلقه مثال فوق پوچساز $x^۲$ اول وابسته است. بعلاوه هر راس در گراف یا اول وابسته است یا به یک اول وابسته وصل است. مطالعه اول های وابسته گراف $\Gamma_E(R)$ یکی از مهمترین اهداف ماست.

در فصل اول، تعاریف و مقدماتی را در جهت یادآوری حلقه نوتری و گراف ها ارائه می دهیم.

در فصل دوم به معرفی گراف کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه های صفر حلقه نوتری، جابجایی و یکدار و ویژگی های آن می پردازیم.

در فصل سوم به برخی خواص گراف کلاسهای هم ارزی مقسوم علیه صفر بعنوان گراف ستاره می پردازیم و به این سوال که آیا شرط نوتری حلقه R برای اینکه گراف $\Gamma_E(R)$ متناهی باشد، پاسخ می دهیم.

در فصل چهارم به ارتباط بین اول های وابسته حلقه R و رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ می پردازیم.

---

[۱] Beck

[۲] Mulay

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل به برخی از مفاهیم و تعاریفی که در طول پایان نامه به کار رفته اند، اشاره خواهیم کرد. اکثر قضایای بیان شده در این فصل در کتاب های مربوط به این موضوعات، اثبات گردیده اند، و اغلب آنها قضایای اساسی از جبر می باشند.

ضمنا در این فصل حلقه R را یک حلقه جابجایی و یکدار در نظر می گیریم.

۲.۱ حلقه ها و ایده آل ها

از خواص مهم جبر ایجاد ارتباط بین ریاضیات محض و کاربرد آن در علوم مختلف است. یکی از ابزار هایی که برای ایجاد این ارتباط مورد استفاده قرار می گیرد حلقه ها هستند. بیشتر اصطلاحات و قواعد جبری بر پایه حلقه ها بنا نهاده شده است، در این بخش به معرفی برخی از مفاهیم ایده آلها، خواص حلقه‌ها و تعریف حلقه نوتری می پردازیم.

۱.۲.۱ تعریف: حلقه R مفروض است. مشخصه [1] حلقه R عبارت است از کوچکترین عدد صحیح و مثبت n، بطوریکه به ازای هر $a \in R$، $na = 0$ باشد.

۲.۲.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد، عنصر $a \in R$، را پوچتوان [2] نامند هر گاه به ازای عدد صحیح و مثبت n ای، $a^n = 0$ باشد.

۳.۲.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد. زیر مجموعه ناتهی I از R یک ایده آل [3] نامیده می شود. هر گاه به ازای هر $a, b \in I$ و هر $r \in R$، $a - b \in I$ و $ra \in I$ باشد.

۴.۲.۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت R را نوتری [4] می گوییم اگر در یکی از شرایط زیر که معادل اند، صدق کند:

(i) R در شرط زنجیر صعودی از ایده‌آل ها صدق کند، یعنی هر گاه زنجیره ی

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq ... \subseteq ...$$

زنجیره ی صعودی از ایده آلهای R باشد، آنگاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$

(ii) هر مجموعه ناتهی از ایده آلهای R نسبت به رابطه مشمولیت دارای عضو ماکسیمال باشد

(iii) هر ایده آل R متناهی مولد باشد.

۵.۲.۱ تعریف: ایده آل N از حلقه R را ماکسیمال [5] می گوییم اگر N نسبت به رابطه مشمولیت عضو ماکسیمال مجموعه ایده‌آلهای سره R باشد.

بعبارت دیگر ایده آل N از حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر

---

[1] Character
[2] Nilpotent
[3] Ideal
[4] Noetherian
[5] Maximal ideal

(i) $N \subset R$،

(ii) ایده آلی چون I از R وجود نداشته باشد چنانچه $N \subset I \subset R$.

۶.۲.۱ تعریف: حلقه نوتری R را که تنها یک ایده آل ماکسیمال دارد یک حلقه موضعی می نامند.

۷.۲.۱ تعریف: ایده آل سره P از حلقه R یک ایده آل اول [۶] است. هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in P$ باشد، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

۸.۲.۱ نماد گذاری: مجموعه همه ی ایده آلهای اول حلقه R را با $Spec(R)$ نمایش می دهند.

۹.۲.۱ تعریف: عضو ناصفر a در حلقه R را مقسوم علیه صفر [۷] نامند، هر گاه عضو $0 \neq b \in R$ موجود باشد، بطوریکه $ab = 0$.

۱۰.۲.۱ قضیه: فرض کنید $(I_i)_{i=1}^{n}$ که $n \geq 2$ خانواده ای از ایده آلهای دو به دو متباین حلقه R باشد. در اینصورت:

(i) $I_1 \cap ... \cap I_{n-1}$ و I_n متباین اند

(ii) $I_1 \cap ... \cap I_n = I_1 ... I_n$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۵۹.۳ از [۱۵].

۱۱.۲.۱ قضیه: فرض کنید R، یک حلقه متناهی باشد، در اینصورت حلقه R ضرب تعداد متناهی از حلقه های موضعی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۶.۲ از [۱۰].

---

[۶] Prime ideal

[۷] Zero divisor

۳.۱ مدول

می دانیم که از بررسی مدولها روی حلقه R اطلاعات بسیاری درباره خود R بدست می آید.
در این بخش به بیان قضایایی می پردازیم که در طول پایان نامه به آن احتیاج داریم.

۱.۳.۱ تعریف: پوچساز مدول M از حلقه R را که با نماد $ann(M)$ نشان می دهند، بصورت مجموعه زیر تعریف می شود:

$$ann(M) = \{a \in R \mid aM = \circ\},$$

۲.۳.۱ تعریف: فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. اگر برای ایده آل اول P از حلقه R، $\circ \neq x \in M$ وجود داشته باشد بطوریکه $ann(x) = P$، آنگاه P را یک ایده آل اول وابسته به M می نامند.

۳.۳.۱ نماد گذاری: مجموعه ایده آلهای اول وابسته به مدول M را با $Ass(M)$ نشان می دهند. پس داریم:

$$Ass(M) = \{P \in Spec(R) \mid \exists\ \circ \neq x \in M\ ;\ P = ann(x)\},$$

۴.۳.۱ لم: فرض کنید M مدولی ناصفر روی حلقه نوتری R باشد. دراینصورت هر عضو ماکسیمال مجموعه ناتهی $\Im = \{ann(x)\ ;\ \circ \neq x \in M\}$، یک ایده آل اول است و لذا متعلق به $Ass(M)$ می باشد.
اثبات: می دانیم در حلقه نوتری هر مجموعه ناتهی از ایده آل ها عضو ماکسیمال دارد. پس عضو ماکسیمال مجموعه ناتهی $\Im$ از ایده آلهای R را $ann(y)$ در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که:

$$ann(y) \in Spec(R),$$

فرض کنیم $a, b \in R$ بطوریکه $ab \in ann(y)$ و $a \notin ann(y)$. در اینصورت ثابت می کنیم که $b \in ann(y)$ است. چون $ay \neq \circ$ و $ab(y) = \circ$ است نتیجه می دهد که $b \in ann(ay)$. داریم $(ay) \subseteq (y)$ بنابراین $ann(y) \subseteq ann(ay)$ و چون $ann(y)$ عضو ماکسیمال است پس خواهیم داشت $ann(y) = ann(ay)$. از

طرفی $b \in ann(ay)$. پس $b \in ann(y)$ است، لذا به نتیجه مطلوب رسیده ایم و $ann(y)$ ایده آل اول است.

۵.۳.۱ لم: فرض کنید M مدولی روی حلقه R است، اگر $x \in M$، آنگاه $Rx \cong R/ann(x)$ که Rx زیر مدول M می باشد.

اثبات: روشن است که نگاشت $f \ : \ R \longrightarrow Rx$ به ازای هر $a \in R$، با تعریف $f(a) = ax$، R ـ بروریختی از R به روی زیر مدول Rx از M است و چون

$$ker f = \{a \in R \ : \ ax = 0\} = ann(x)$$

حکم قضیه بلاواسطه از اولین قضیه یکریختی مدولها نتیجه می شود.

$$R/ker f \cong Rx \Rightarrow R/ann(x) \cong Rx$$

از لم فوق نتیجه زیر حاصل می شود.

۶.۳.۱ نتیجه: برای هر $P \in Spec(R)$، داریم

$$P \in Ass(M) \Leftrightarrow \exists \ M' \leq M \ : \ M' \cong R/P$$

M' زیر مدول M است.

۷.۳.۱ لم: فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R باشد. در اینصورت $Ass(M) = \varnothing$ اگر و تنها اگر $M = 0$ باشد.

اثبات: $(\Rightarrow)$ اگر $M = 0$ باشد، آنگاه به ازای هر $x \in M$، $ann(x) = R$ است. از اینرو $Ass(M) = \varnothing$ است. $(\Leftarrow)$ (برهان خلف) فرض می کنیم $M \neq 0$ باشد. می دانیم مجموعه خانواده ایده آلهای $\Im$ معرفی شده در لم ۴.۳.۱، عضو ماکسیمال دارد که این عضو ایده آل اول حلقه است پس می توان عضو $x \in M$ را طوری در نظر گرفت که $ann(x)$ عضو ماکسیمال مجموعه $\Im$ باشد، پس این عضو ایده ال اول حلقه است از اینرو

$ann(x) \in Ass(M)$ و بنابراین $Ass(M) \neq \varnothing$ است. در اینجا با رسیدن به تناقض فرض خلف باطل است، بنابراین $M = \circ$ است.

۸.۳.۱ لم: فرض کنید M مدولی متناهی مولد و ناصفر روی حلقه نوتری R باشد. در اینصورت زنجیری صعودی چون

$$M_\circ \subset ... \subset M_{n-۱} \subset M_n,$$

از زیر مدولهای M وجود دارد که $M_\circ = \circ$ و $M_n = M$ و به ازای هر $i = ۱, ..., n$ ایده آلی چون $P_i \in Spec(R)$ وجود دارد که $M_i/M_{i-۱} \cong R/P_i$.

اثبات: ابتدا قرار دهید $M_\circ = \circ$ و $M_n = M$. از اینکه $M \neq \circ$ از عکس نقیض لم ۷.۳.۱ نتیجه می گیریم، $Ass(M) \neq \varnothing$. اگر $P_۱ \in Ass(M)$ را در نظر بگیریم آنگاه از نتیجه ۶.۳.۱ داریم

$$\exists\, M_۱ \leq M \;:\; M_۱ \cong R/P_۱,$$

اگر $M_۱ = M$ حکم تمام است.

اگر $M_۱ \subsetneqq M$ آنگاه $M/M_۱ \neq \circ$ لذا $Ass(M/M_۱) \neq \varnothing$. بنابراین اگر $P_۲ \in Ass(M/M_۱)$ را در نظر بگیریم آنگاه

$$\exists\, M_۲/M_۱ \leq M/M_۱ \;:\; M_۲/M_۱ \cong R/P_۲,$$

لذا $M \subsetneqq M_۲ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq \circ$. اگر $M_۲ = M$ حکم تمام است، در غیر اینصورت روند بالا را برای $M_۲/M_۱$ تکرار می کنیم.

پس از k بار تکرار روند بالا خواهیم داشت:

$$\circ = M_\circ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq ... \subsetneqq M_{k-۱} \subsetneqq M_k, \qquad M_i/M_{i-۱} \cong R/P_i \quad i = ۱, ..., k$$

اما از نوتری بودن حلقه R نتیجه می گیریم که R ـ مدول متناهی مولد M نوتری است لذا این روند نمی تواند تا بینهایت ادامه یابد. زیرا در اینصورت یک زنجیر صعودی و ناایستا در M خواهیم داشت که خلاف نوتری بودن M است. لذا

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; M_n = M,$$

در نتیجه

$$\circ = M_\circ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq ... \subsetneqq M_{n-۱} \subsetneqq M_n = M, \qquad M_i/M_{i-۱} \cong R/P_i \quad i = ۱, ..., n.$$

۹.۳.۱ لم: فرض کنید P ایده آل اول حلقه R باشد.آنگاه

$$P = ann(R/P),$$

۱۰.۳.۱ لم: فرض کنید R حلقه نوتری و دنباله

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

دنباله کامل کوتاهی از R ـ مدولها و R ـ همریختیها باشد. در اینصورت

$$Ass(M) \subseteq Ass(L) \cup Ass(N),$$

اثبات: فرض کنید $P \in Ass(M)$ در اینصورت از نتیجه ۶.۳.۱، خواهیم داشت $\exists\ G \leq M \ :\ G \cong R/P$.
(G زیر مدول M است)

اکنون حالات زیر را در نظر بگیرید:

الف) اگر $G \cap kerg = 0$ آنگاه $g|_G$ یک به یک است، زیرا $ker(g|_G) = kerg \cap G = 0$. لذا $G \cong g(G)$ و با توجه به اینکه $G \cong R/P$، داریم

$$g(G) \cong R/P,$$

و چون $g(G)$ زیر مدول N است از نتیجه ۶.۳.۱ داریم $P \in Ass(N)$.

ب) اگر $G \cap kerg \neq 0$ آنگاه $0 \neq x \in G \cap kerg$ وجود دارد بطوریکه $x \in G$ و $x \in kerg$ است. با توجه به اینکه $G \cong R/P$، داریم $ann(G) = ann(R/P)$ و از لم ۹.۳.۱ نتیجه می شود $ann(R/P) = P$ لذا $ann(G) = P$. همچنین از اینکه $x \in G$ داریم $ann(G) \subseteq ann(x)$ لذا (۱) $\quad P \subseteq ann(x)$.

اکنون ادعا می کنیم $P = ann(x)$، یعنی ثابت می کنیم $ann(x) \subseteq P$. فرض کنید چنین نباشد، در اینصورت $r \in ann(x)$ وجود دارد که $r \notin P$ لذا

$$P \subsetneqq P + (r) \subseteq ann(x), \qquad (*)$$

اما P بزرگترین ایده آل R است که R/P را پوچ می کند و با توجه به $G \cong R/P$، می توان نتیجه گرفت که P بزرگترین ایده آل R است که G را پوچ می کند و از اینکه $x \in G$ است، پس P بزرگترین ایده آل R است که x را پوچ می کند که تناقض با رابطه $(*)$ دارد، در نتیجه (۲) $\quad ann(x) \subseteq P$ است.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $ann(x) = P$ است. با توجه به تعریف $Ass(M)$ در ۳.۳.۱ از اینکه $x \in kerg$ و $ann(x) = P$ می باشد، می توان نتیجه گرفت $P \in Ass(kerg)$ و با توجه به $L \cong Imf = kerg$ داریم

$$P \in Ass(L)$$

بنابراین از (الف) و (ب) نتیجه می شود $P \in Ass(L) \cup Ass(N)$ و داریم

$$Ass(M) \subseteq Ass(L) \cup Ass(N),$$

۱۱.۳.۱ لم: فرض کنید P ایده آل اولی از حلقه R باشد. در اینصورت $Ass(R/P) = \{P\}$.

اثبات: فرض کنید $P' \in Ass(R/P)$. می خواهیم نشان دهیم $P' = P$ است.

چون $P' \in Ass(R/P)$ است، پس عضوی چون $0 \neq r + P \in R/P$ موجود است، بطوریکه $P' = ann(r+P)$. فرض کنید $x \in P'$ باشد، چون $P' = ann(r+P)$. پس $x \in ann(r+P)$ در نتیجه $x(r+P) = P$ و می توان نوشت $xr \in P$، از آنجائیکه $r \notin P$ و P یک ایده ال اول است، پس $x \in P$ می باشد. لذا (۱) $\quad P' \subseteq P$ است.

حال فرض کنید $x \in P$. چون P یک ایده ال است، پس به ازای هر $r \in R$ می توان نوشت $rx \in P$ و از اینرو $x(r+P) = P$ در نتیجه $x \in ann(r+P)$ و چون $ann(r+P) = P'$ است. لذا $x \in P'$ می باشد. بنابراین (۲) $\quad P \subseteq P'$ است.

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم $P = P'$ می باشد.

۱۲.۳.۱ لم: فرض کنید R یک حلقه نوتری است. اگر M، R ـ مدول متناهی مولد باشد آنگاه $Ass(M)$ متناهی است.

اثبات: با فرض $M = 0$ طبق لم ۷.۳.۱، $Ass(M) = \varnothing$ است. حال فرض کنید $M \neq 0$ باشد، آنگاه طبق لم

۸.۳.۱ زنجیری صعودی از زیر مدولهای M وجود دارد

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_{n-1} \subset M_n = M,$$

بطوریکه به ازای هر $i = 1, ..., n$ ایده آلی چون $P_i \in Spec(R)$ وجود دارد که $M_i/M_{i-1} \cong R/P_i,$ است.
در اینجا ما می توانیم دنباله کامل کوتاهی از R ـ مدولها و R ـ همریختیها را بصورت زیر در نظر بگیریم

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow M_n/M_{n-1} \longrightarrow 0,$$

حال براساس لم ۱۰.۳.۱ داریم

$$Ass(M) = Ass(M_n) \subseteq Ass(M_{n-1}) \cup Ass(M_n/M_{n-1}),$$

مجددا می توان دنباله کامل کوتاهی از R ـ مدولها و R ـ همریختیها را بصورت زیر در نظر گرفت

$$0 \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-1}/M_{n-2} \longrightarrow 0,$$

و می توان نوشت:

$$Ass(M) = Ass(M_{n-1}) \subseteq Ass(M_{n-2}) \cup Ass(M_{n-1}/M_{n-2}),$$

چون حلقه R نوتری است پس R ـ مدول متناهی مولد M نوتری است. لذا این روند نمی تواند تا بینهایت ادامه یابد و با جایگذاری، زنجیر زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} Ass(M) = Ass(M_n) &\subseteq Ass(M_{n-1}) \cup Ass(M_n/M_{n-1}), \\ &\subseteq Ass(M_{n-2}) \cup Ass(M_{n-1}/M_{n-2}) \cup Ass(M_n/M_{n-1}), \\ &\subseteq ..., \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ass(M_i/M_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} Ass(R/P_i). \end{aligned}$$

حال بر اساس لم ۱۱.۳.۱، $Ass(R/P_i) = \{P_i\}$ است از اینرو

$$Ass(M) \subseteq \{P_1, P_2, ..., P_n\}.$$

۴.۱ گراف و انواع آن

مفهوم گراف در سال ۱۷۳۶ توسط اویلر و با طرح راه حلی برای مساله پل کانیگسبرگ [۸] ارائه شد و بتدریج توسعه یافت. گرافها امروزه کاربرد زیادی در علوم دارند. از گراف ها در شبکه ها، طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابان ها برای حل مشکل ترافیک و... استفاده می شود.
در این بخش تعاریفی از نظریه گرافها را ارائه می دهیم.

۱.۴.۱ تعریف: گراف G یک زوج مرتب (V,E) است، که $V = V(G)$ مجموعه ای شامل تعداد دلخواهی عضو و مجموعه $E = E(G)$ شامل تعداد دلخواهی از زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه V است.
مجموعه V را رئوس [۹] گراف G و مجموعه E را یال های [۱۰] گراف G می نامند.

۲.۴.۱ تذکر: برای ترسیم یالها، اگر $E \ni \{v,w\}$ که $v,w \in V$، آنگاه کافی است پاره خطی بین دو نقطه مربوط به v,w رسم کنیم.

۳.۴.۱ تعریف: اگر v و w دو راس از یک گراف باشد و زوج نامرتب $\{v,w\}$ یالی باشد که v و w را به هم وصل [۱۱] می کند، در این حالت، این یال را گذرنده [۱۲] از هردو راس v و w گوئیم.

۴.۴.۱ تعریف: درجه یک راس v در یک گراف، تعداد یال های گذرنده از v است و آنرا با $degv$ نمایش می دهند.
اگر $degv = ۱$ باشد v یک انتها [۱۳] است.

[۸] Konigsberg
[۹] Vertex
[۱۰] Edge
[۱۱] Join
[۱۲] Incident to
[۱۳] End

۵.۴.۱ تعریف: دو راس v و w در گراف G را مجاوریا متصل [۱۴] گوئیم، هر گاه یالی بین v و w موجود باشد.

۶.۴.۱ تعریف: در یک گراف، هر گاه دو یال یا بیش تر همگی یک جفت یکسان از دو راس متمایز را بهم وصل کنند، یال های موازی[۱۵] نامیده می شوند.

۷.۴.۱ تعریف: یال نشان داده شده بوسیله یک زوج نا مرتب را، که دو عنصر این زوج نامرتب متمایز نیستند، یک طوقه [۱۶]می نامیم.

۸.۴.۱ تعریف: یک گراف ساده [۱۷] گرافی است که هیچ یال موازی و هیچ طوقه ای نداشته باشد.
(از این نوع گراف در تمام این پایان نامه به طور مختصر از واژه گراف بجای گراف ساده نام برده خواهد شد.)

۹.۴.۱ تعریف: گرافی که هر دو مجموعه رئوس و یالهای آن متناهی باشد، گراف متناهی [۱۸] است.

۱۰.۴.۱ تعریف: اگر برای هر جفت از رئوس v و w در گراف G داشته باشیم که $degv = degw$ آنگاه G یک گراف منظم [۱۹] نامیده می شود.

۱۱.۴.۱ تعریف: یک مسیر[۲۰] به طول n بین رئوس v و w عبارت است از یک دنباله از رئوس متمایز u_i بین دو راس v و w بفرم $v = u_۰ - u_۱ - ... - u_n = w$ بطوریکه $u_{i-۱} - u_i$ یک یال برای هر $i = ۱, ۲, ۳..., n$ باشد.

---

[۱۴] Adjacent
[۱۵] Paralled
[۱۶] Loop
[۱۷] Simple graph
[۱۸] Finite graph
[۱۹] Regular graph
[۲۰] Path