دانشگاه تبریز

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

گروه مهندسی برق مخابرات

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق مخابرات گرایش میدان و امواج

عنوان:

تحلیل موجبرهای دی الکتریک لایه ای استوانه ای با استفاده از روش اجزای محدود

استاد راهنما:

دکتر احسان خداپناه

استاد مشاور:

دکتر سعید نیک مهر

پژوهشگر:

سید جعفر موسویان

شهریور ۹۳

سپاسگزاری . . .

استاد فرهیخته جناب آقای دکتر سعید نیک مهر و استاد اندیشمند جناب آقای دکتر احسان خداپناه

از شما که دلسوزانه و صبورانه معلم و راهنمای من بودید، سپاسگزارم.

سید جعفر موسویان

نام خانوادگی دانشجو: موسویان	**نام:** سید جعفر	
عنوان پایان نامه: تحلیل موجبرهای دی‌الکتریک لایه ای استوانه ای با استفاده از روش اجزای محدود		
استاد راهنما: دکتر احسان خداپناه	**استاد مشاور:** دکتر سعید نیک مهر	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** مهندسی برق مخابرات	**گرایش:** میدان و امواج
دانشگاه: دانشگاه تبریز	**دانشکده:** مهندسی برق و کامپیوتر	
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳/۶/۱۹	**تعداد صفحه:** ۵۵	
کلید واژه: روش اجزای محدود، موجبر دی‌الکتریک لایه ای با سطح مقطع دلخواه، امواج نشتی، فیبر نوری		

چکیده:

مشخصه‌های الکترومغناطیسی ساختارهای موجبری دی‌الکتریک برای کاربردهای مایکروویوی و اپتیکی زمینه ای مورد توجه بوده است و انواع مختلف موجبرهای دی‌الکتریک موضوع چندین روش تحلیل بوده‌اند. از آنجا که اکثر این ساختارها را نمی‌توان بصورت تحلیلی حل نمود، روش های عددی متنوعی بهبود یافته‌اند که روش اجزای محدود از قدرتمندترین آن ها است. اما مشکلی که در حل موجبرهای دی الکتریک با روش مذکور - و برخی روش‌های دیگر - پیش می آید، اعمال شرط مرزی بینهایت به مسئله است که یا باعث غیرخطی شدن معادلات می‌شود یا مودهای غیرفیزیکی و نادرستی تولید می‌کند.

در این پایان نامه ابتدا روش‌های تحلیل موجبرهای دی‌الکتریک مطالعه و امکان انتشار امواج الکترومغناطیسی در این موجبرها بررسی شده است. سپس روش اجزای محدود برداری و انواع شرایط مرزی بینهایت بررسی شده است. همچنین در این بخش برای شبیه سازی فضای لایتناهی، شرط مرزی با استفاده از بسط توابع استوانه ای معرفی و روابط مربوطه بدست آمده است. بالاخره با استفاده از روش ارائه شده جواب های انتشاری و نشتی موجبرهای دی الکتریک استوانه ای محاسبه شده است. لازم به ذکر است برای کدنویسی از نرم افزار MATLAB استفاده می شود.

در این تحقیق به سه نتیجه مهم دست یافته ایم. اول کاربرد موفقیت آمیز شرط مرزی به کمک بسط توابع استوانه ای در این نوع مسائل است که ایرادات و یا ملاحظات شرایط مرزی بینهایت مرسوم را ندارد. دوم خطی‌سازی معادله ماتریسی حاصله است که حل آن برخلاف روش های تکرار در حل معادلات غیرخطی، بسیار سریع بوده و موجب کارآمدی این روش شده است. سوم اینکه با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده توانسته‌ایم بدون کار تحلیلی اضافی امواج نشتی را نیز محاسبه کنیم. حل خطی مودهای نشتی از نتایج مهم و نشان‌دهنده کارآمدی روش ارائه شده می‌باشد.

فهرست

فهرست اشکال

مقدمه

مشخصه‌های الکترومغناطیسی ساختارهای موجبری دی‌الکتریک برای کاربردهای مایکروویوی و اپتیکی زمینه ای مورد توجه بوده است و انواع مختلف موجبرهای دی‌الکتریک موضوع چندین روش تحلیل بوده‌اند. از آنجا که اکثر این ساختارها را نمی‌توان بصورت تحلیلی حل نمود، روش‌های عددی متنوعی بهبود یافته‌اند. علاوه بر ساختارهای صفحه ای لایه ای و موجبر دی الکتریک با سطح مقطع دایروی که حل تحلیلی آنها در دسترس است، موجبرهایی با سطح مقطع های دیگر چه از نظر ساخت و چه از نظر کاربرد مورد توجه بوده است، به عنوان مثال موجبرهای دی‌الکتریک با سطح مقطع بیضی توانایی حفظ پلاریزاسیون میدان‌ها برای انتقال داده در فواصل دور را دارد - این امکان مخصوصا برای تداخل‌سنج های فیبری مفید است. همچنین اضافه کردن ناهمگنی‌هایی مانند لایه ای کردن دی‌الکتریک، جواب‌ها و کاربردهای وسیعتری را پیشنهاد می‌کند. بنابراین ضرورت ارائه جواب‌های دقیق برای این دسته موجبرها واضح است.

مرور ساختارهای هدایت کننده موج در کل طیف امواج الکترومغناطیسی نشان می‌دهد که برای فرکانس‌های پایین تر از ۳۰ GHz عموما از ساختارهای فلزی استفاده می شود اما برای فرکانس های بالاتر با افزایش تلفات عمق نفوذ [۱] در فلز نیازمند ساختارهایی با تلفات کمتر بدون استفاده از فلز هستیم. بنابراین اهمیت موجبرهای دی الکتریک خالص برای پوشش پهنای وسیعی از طیف امواج الکترومغناطیسی روشن است. مطابق شکل ۱ طیف مفید برای موجبرهای دی‌الکتریک می‌تواند بیش از چندین دهه (از $۱۰^{۹}$ تا $۱۰^{۱۶}$ هرتز) را پوشش دهد.

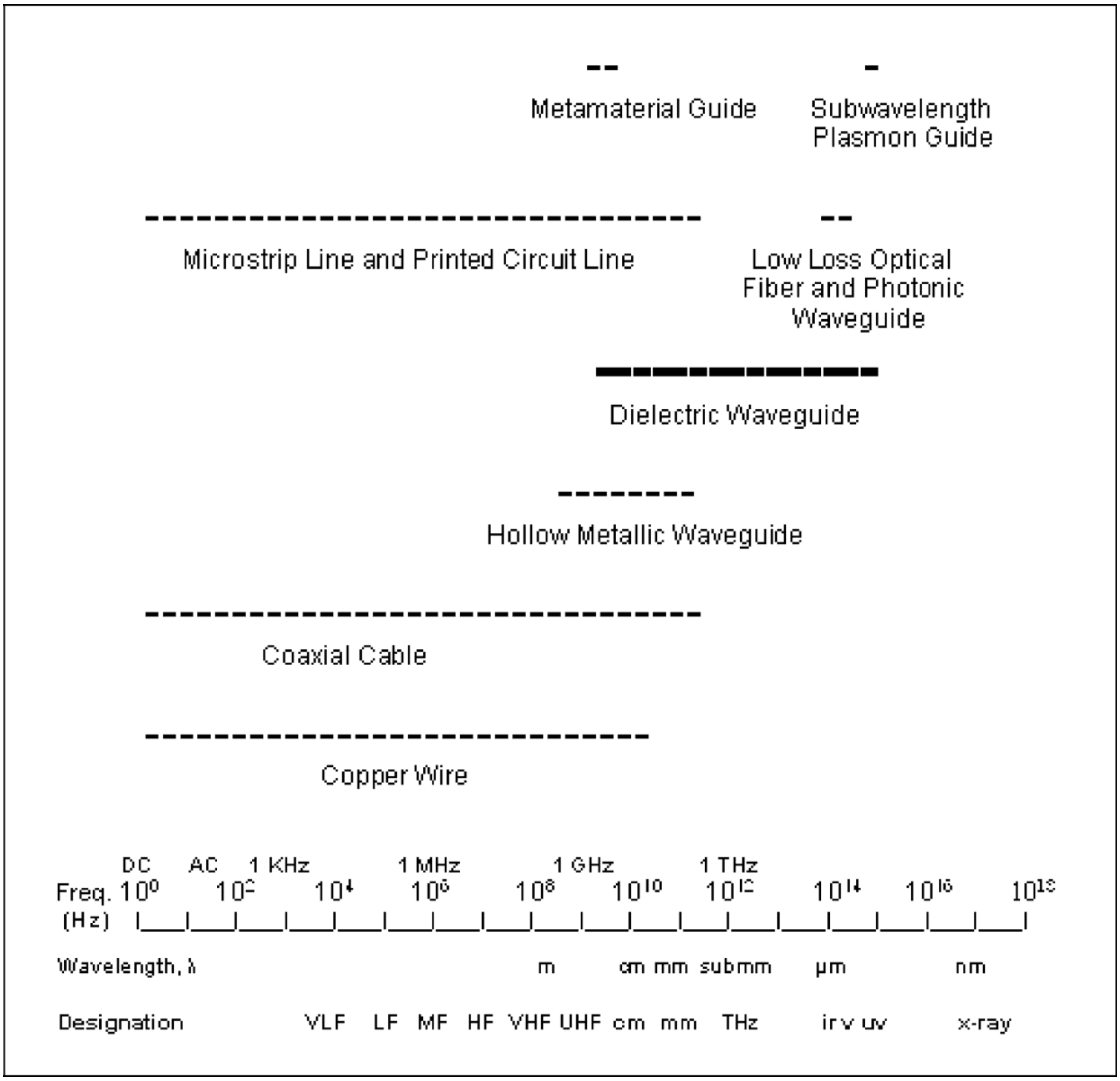
فیبرهای نوری که بطور معمول در ارتباطات با پهنای باند بالا بکار می‌رود، اساسا موجبرهای دی‌الکتریک هستند. مدارهای مجتمع اپتیکی[۲] نیز موجبرهای دی‌الکتریک‌اند که در رایانه های فوق سریع بکار می‌روند. همچنین موجبرهای دی الکتریک در محدوده تراهرتز می تواند یک گزینه عملی باشد. کاربردهای جدید برای موجبرهای دی‌الکتریک شامل موجبرهای کریستال فتونیکی[۳] (اساسا یک هوا یا دی الکتریک احاطه شده توسط ساختارهای دی‌الکتریک پریودیک)، هدایت‌کننده‌های پلاسمون پلاریتون‌ها (نوعی هدایت‌کننده سامرفلد)، موجبر مواد چپگرد – متامتریال‌ها - (یک موجبر دی الکتریک با هسته ساخته شده از دی‌الکتریک های مصنوعی با گذردهی الکتریکی و مغناطیسی منفی در رنج فرکانسی مورد نظر)، موجبر پلاسمون سطحی

---

[۱] Skin depth

[۲] Integrated Optical Circuits

[۳] Photonic crystal waveguides



شکل ۱- نواحی طیفی موجبرهای مختلف

(Source: C. Yeh, and F. I. Shimabukuro, *the Essence of Dielectric Waveguides*, 2008, Springer Science & Business Media.)

که در بحث ساختارهای نانو به خاطر ویژگی زیر طول موج[1] موج هدایت‌کننده اش مورد توجه است، می‌باشد. علاوه بر این اضافه کردن ناهمگنی‌هایی مانند لایه ای کردن دی الکتریک، جواب‌ها و کاربردهای وسیعتری را پیشنهاد می‌کند. به عنوان مثال می‌توان با اضافه کردن یک لایه در فیبرهای نوری ساده، آنرا برای کار در دو ناحیه فرکانسی جدا طراحی کرد.

[1] Subwavelength

شرح تحقیق و اهداف

تحقیق حاضر از سه فصل اصلی تشکیل شده است. در فصل اول به مرور مراجع و مطالعه روش‌های تحلیل موجبرهای دی‌الکتریک خواهیم پرداخت و امکان انتشار امواج الکترومغناطیسی را در این موجبرها بررسی خواهیم کرد. در فصل دوم روش اجزای محدود برداری و انواع شرایط مرزی بینهایت بررسی خواهد شد. همچنین در این بخش شرط مرزی به کمک بسط توابع استوانه ای برای شبیه سازی فضای لایتناهی ارائه خواهد شد. سرانجام در فصل سوم با استفاده از روش ارائه شده جواب های انتشاری و نشتی موجبرهای دی الکتریک استوانه ای بدست خواهد آمد. لازم به ذکر است در محاسبه نتایج از نرم افزار MATLAB استفاده می‌شود.

در این تحقیق به سه نتیجه مهم دست یافته‌ایم. اول کاربرد موفقیت‌آمیز شرط مرزی به کمک بسط توابع استوانه ای در این نوع مسائل است که ایرادات و یا ملاحظات شرایط مرزی بینهایت مرسوم را ندارد. دوم خطی سازی معادله ماتریسی حاصله است که حل آن برخلاف روش‌های تکرار در حل معادلات غیرخطی، بسیار سریع بوده و موجب کارآمدی این روش شده است. سوم اینکه با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده توانسته‌ایم بدون کار تحلیلی اضافی امواج نشتی را نیز محاسبه کنیم. حل خطی مودهای نشتی از نتایج مهم و نشان‌دهنده کارآمدی روش ارائه شده می‌باشد.

فصل اول

مفاهیم اساسی و مروری بر مراجع

مقدمه

با دیجیتالی شدن روزافزون محاسبات، روش‌های حل مسائل الکترومغنــاطیس تغییر کرده و دیگر ضرورتی برای حل تحلیلی مسئله وجود ندارد. از سوی دیگر بسیاری از مسائل کاربردی با هندسه‌های پیچیده جواب تحلیلی فرم بسته ای ندارد - و باید بصورت عددی حل شود. با این وجود، درک اساس تحلیلی حل ضروری است.

از لحاظ تاریخی مسئله هدایت موج توسط تنها یک فلز اولین بار توسط سامرفلد[۱] بررسی شد اما در سال ۱۹۳۶ کارسون[۲] و همکارانش یک تحلیل کامل ریاضی برای مسئله میله دی‌الکتریک انجام دادند. آنها در [۱] اشاره کردند که برای ارضای شرایط مرزی در مسئله کلی بایستی یک موج هیبرید فرض شود - وجود میدان های مغناطیسی و الکتریکی طولی. به عبارت دیگر مودهای TE و TM بصورت غیر قابل گریزی در طول میله دی‌الکتریک به همدیگر کوپل شده‌اند. آنها نشان دادند که امواج TE و TM خالص تنها در مثال متقارن دایروی می‌تواند وجود داشته باشد و دیگر اینکه یک و تنها یک مود پایین ترین مرتبه به نام مد هیبرید HE_{11} وجود دارد که فرکانس قطعی ندارد و در تمام فرکانس ها منتشر می‌شود. مطابق معمول نقطه شروع حل مسئله، معادلات ماکسول است.

۱-۱) معادلات ماکسول[۳]

نمایش دیفرانسیلی معادلات ماکسول در نوتاسیون برداری و سیستم SI بصورت زیر است [۲]:

[۱] Sommerfeld

[۲] Carson

[۳] Maxwell equations

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathrm{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathrm{r},t) \tag{۱-۱}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathrm{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathrm{r},t) + \mathbf{J}(\mathrm{r},t) \tag{۱-۲}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathrm{r},t) = 0 \tag{۱-۳}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathrm{r},t) = \rho(\mathrm{r},t) \tag{۱-۴}$$

و معادله پیوستگی بار را بصورت زیر در نظر می‌گیریم [۲]:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathrm{r},t) + \frac{\partial \rho(\mathrm{r},t)}{\partial t} = 0 \tag{۱-۵}$$

در این معادلات $\mathbf{E}$ شدت میدان الکتریکی، $\mathbf{B}$ شدت میدان مغناطیسی، $\mathbf{H}$ چگالی شار مغناطیسی، $\mathbf{D}$ چگالی شار الکتریکی، $\mathbf{J}$ چگالی جریان الکتریکی و ρ چگالی بار الکتریکی می باشد. برای یک میدان الکترومغناطیسی متغیر با زمان، معادلات (۱-۳) و (۱-۴) را می‌توان از معادلات کرل بدست آورد. بدین صورت که با دیورژانس گیری از (۱-۱) می‌توان به (۱-۳) رسید. بطور مشابه به کمک (۱-۲) و معادله پیوستگی، (۱-۴) را خواهیم داشت.

به کمک قضیه استوکس[۱]، فرم انتگرالی معادلات ماکسول را بصورت زیر در نظر می‌گیریم [۲]:

$$\int_c d\mathrm{l} \cdot \mathbf{E}(\mathrm{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A d\mathrm{S} \cdot \mathbf{B}(\mathrm{r},t) \tag{۱-۶}$$

$$\int_c d\mathrm{l} \cdot \mathbf{H}(\mathrm{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_A d\mathrm{S} \cdot \mathbf{D}(\mathrm{r},t) + \int_A d\mathrm{S} \cdot \mathbf{J}(\mathrm{r},t) \tag{۱-۷}$$

همانطور که می‌دانیم در پدیده های خطی، میدان های با تغییر زمانی دلخواه را می توان با روش تبدیل فوریه از جواب‌های هارمونیک ساخت. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض time-harmonic بودن میدان‌ها را در نظر می‌گیریم [۲]:

$$\mathbf{A}(\mathrm{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}(\mathrm{r})e^{j\omega t}\right] \tag{۱-۸}$$

[۱] Stokes’ theorem

۱-۲) روابط ساختاری[۱]

همانطور که گفته شد در الکترودینامیک تنها دو معادله از چهار معادله ماکسول مستقل است، پس تنها لازم است دو معادله اول یعنی (۱-۱) و (۱-۲) را در نظر بگیریم. اما برای یافتن چهار بردار مجهول **E**، **H**، **B** و **D** دو معادله برداری کفایت نمی‌کند و دو معادله دیگر نیز لازم است که از روابط ساختاری معرفی خواهد شد. شارهای الکتریکی و مغناطیسی به کمک روابط ساختاری به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مربوط می شود. این روابط در حوزه فرکانس بصورت زیر هستند [۲]:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)=\bar{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+\bar{\xi}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega) \qquad (۱-۹)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)=\bar{\mu}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)+\bar{\zeta}(\mathbf{r},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن ω فرکانس زاویه ای است و $\bar{\varepsilon}$، $\bar{\mu}$، $\bar{\xi}$ و $\bar{\zeta}$ تانسورهای ۳×۳ هستند. وابستگی فرکانسی پارامترهای ساختاری بنام خاصیت *پاشندگی* محیط معروف است. همچنین وقتی تانسورهای فوق تابعی از میدان‌ها باشند، محیط را *غیرخطی* گوییم.

۱-۳) حل مسئله موجبر دی الکتریک

۱-۳-۱) حل های تحلیلی

برای مثال‌های همگن استانداردی نظیر موجبر دی‌الکتریک ورقه ای، موجبر دی‌الکتریک استوانه ای دایروی و موجبر دی‌الکتریک استوانه ای بیضوی می‌توان با استفاده از ساده‌سازی‌های ممکن در معادلات ماکسول - یا معادله موج - و تعریف توابع موج مناسب در نواحی مختلف و اعمال شرط پیوستگی مولفه‌های مماسی میدان‌ها و نیز شرط تشعشعی سامرفلد، معادله مشخصه ای بر حسب β بدست آورد. با حل عددی معادله بدست آمده در هر فرکانس می توان ثابت انتشار مدهای مختلف و همچنین فرکانس قطع آنها را تعیین نمود. در مثال‌های ناهمگن با دو یا سه لایه به شرط حفظ تقارن صفحه ای یا دایروی نیز ممکن است بتوان با تعمیم روش، جوابی حتی برای مسائل غیرخطی نیز بدست آورد. به عنوان مثال در مرجع [۳] موجبر دی الکتریک دولایه غیرخطی با مقطع دایروی برای انتشار مد TM بررسی شده است و در آن با شروع از معادلات کرل ماکسول و استفاده

[۱] Constitutive relations

از قانون کِر[1] برای اعمال خاصیت غیرخطی، نهایتا یک معادله پاشندگی بدست می‌آید که با حل عددی آن ثابت انتشار برای مدهای مختلف تعیین می‌شود.

در مثال موجبرهای دی‌الکتریک ناهمگن با وجود پیچیدگی‌های معادله موج برداری حاکم، میدان‌های الکترومغناطیسی هنوز خطی‌اند، یعنی هنوز روی‌هم‌گذاری[2] را داریم. بنابراین امکان تولید یک مجموعه کامل از میدان‌های الکترومغناطیسی با استفاده از پتانسیل های دبای[3] دلخواه وجود دارد. مثلا اگر پتانسیل‌های دبای را بصورت زیر معرفی کنیم [۴]:

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\mathbf{a}\psi(\mathbf{r})\right] \tag{۱۱-۱}$$

$$\mathbf{H}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\mathbf{a}\phi(\mathbf{r})\right] \tag{۱۲-۱}$$

که $\mathbf{a}$ یک بردار واحد یا یک بردار مکان $\mathbf{r}$ است و $\phi(\mathrm{r})$ و $\psi(\mathrm{r})$ پتانسیل های دبای هستند. بالانویس های (I) و (II) دو نوع میدان های مستقل خطی را نشان می‌دهد. ترکیب این دو نوع میدان‌ها مجموعه کاملی از میدان های الکترومغناطیسی را خواهد داد. تمام مولفه های میدان های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ می تواند از معادلات ماکسول بدست آید [۴]:

$$\mathbf{H}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times \left[\mathbf{a}\psi(\mathbf{r})\right] \tag{۱۳-۱}$$

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r}) = -\frac{j}{\omega\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times \left[\mathbf{a}\phi(\mathbf{r})\right] \tag{۱۴-۱}$$

با انتخاب صحیح $\mathbf{a}$ می توان معادلات موج برداری را برای محیط های ناهمگن خاص به معادلات موج اسکالر ساده کرد. مثلا ناهمگنی‌هایی نظیر تابعیت x، y یا z گذردهی در مختصات مستطیلی یا تابعیت شعاعی گذردهی در مختصات کروی و استوانه ای.

روش های کلاسیک و تحلیلی به علل زیر ممکن است برای حل مسئله جوابگو نباشد:

- معادله دیفرانسیلی پاره ای خطی نباشد و نتوان آنرا خطی کرد.
- ناحیه حل پیچیده باشد.
- شرایط مرزی ترکیبی داشته باشیم.
- شرایط مرزی وابستگی زمانی داشته باشد.

[1] Kerr law
[2] Superposition
[3] Debye

- محیط ناهمگن و ناهمسانگرد باشد.

۱-۳-۲) حل های عددی

کلی‌ترین مثال در مسئله موجبرهای دی‌الکتریک، موجبر ناهمسانگرد با سطح مقطع ناهمگن است. معادلات حاکم دو معادله کرل ماکسول (۱-۱) و (۱-۲) است که باید بصورت تحلیلی یا عددی تحت شرایط مرزی معین - که پیوستگی مولفه های مماسی میدان‌ها روی مرز بین دو لایه (ناحیه) است - حل شود. تفاوت روش‌های عددی برای حل معادلات (۱-۱) و (۱-۲) از جنبه های زیر است [۵]:

- برخی روش ها مستقیما حل عددی (۱-۱) و (۱-۲) را در نظر می‌گیرند - یا به فرم انتگرالی (۱-۶) و (۱-۷)، یا هر فرم ساده شده مثال خاص آن. اما اکثر روش ها این معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی را به کمک ایده های مدلسازی ریاضی معادل به سیستمی از معادلات خطی قابل حل توسط تکنیک های ماتریسی استاندارد تبدیل می‌کند.
- روش ممکن است میدان در هر لایه موجبر دی الکتریک را تقریب بزند یا اینکه به کمک تفاضل‌های محدود در نقاط گسسته، یا با یک بسط معتبر در تمام لایه میدان را محاسبه کند، مانند روش تطبیق نقطه ای[۱] با یک مجموعه ای از بسط ها که هر کدام روی یک زیرناحیه ای از لایه دی الکتریک معتبر است.
- روش‌ها در طریقه مواجهه با فضای لایتناهی سطح مقطع موجبر متفاوت اند. مثلا تطبیق نقطه ای و برخی روش‌های اجزای محدود از این واقعیت که میدان در جهت شعاعی دور از موجبر تضعیف می شود بهره می برد درحالیکه برخی دیگر از روش های اجزای محدود انواع متنوعی شرایط مرزی را در یک فاصله بهینه از موجبر تحمیل می کند.

همچنین ممکن است در برخی موارد دو یا چند تکنیک ترکیب شود.

۱-۴) دسته بندی های موجبرهای دی‌الکتریک و روش ها

در حالت کلی برای موجبرهای دی‌الکتریک تقسیم‌بندی‌های زیر را در نظر می‌گیریم [۴و۵]:

---

[۱] Point Matching Method

۱-۴-۱) موجبر همسانگرد همگن (ماده ساده)

در این مثال خاص معادله (۱-۱) و (۱-۲) به معادله موج اسکالر ساده می‌شود [۵]:

$$\nabla^2\phi + k_i^2\phi = 0 \tag{۱-۱۵}$$

که در آن تابع ϕ ، E_z یا H_z است و k_i عدد موج لایه i ام تعریف شده بصورت زیر می‌باشد:

$$k_i^2 = \begin{cases} k_0^2 n_i^2 - \beta^2 & k_0 n_i \ge \beta \\ \beta^2 - k_0^2 n_i^2 & k_0 n_i \le \beta \end{cases} \tag{۱-۱۶}$$

n_i ضریب شکست محیط i ام و $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ عدد موج در فضای آزاد است.

روش تطبیق نقطه ای[۱]

این روش یکی از قدیمی‌ترین و ساده‌ترین روش‌های حل موجبر دی‌الکتریک همگن همسانگرد با سطح مقطع دلخواه است. روش ادعا می کند [۶] که یک تقریب خوب برای (۱-۱۵)

در ناحیه داخلی بصورت

$$E_{z1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(n\theta + u_e\right) J_n\left(k_1 r\right) e^{j\beta z} \tag{۱-۱۷}$$

$$H_{z1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(n\theta + u_h\right) J_n\left(k_1 r\right) e^{j\beta z} \tag{۱-۱۸}$$

و در ناحیه بیرونی لایتناهی بصورت

$$E_{z2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(n\theta + u_e\right) K_n\left(k_2 r\right) e^{j\beta z} \tag{۱-۱۹}$$

$$H_{z2} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left(n\theta + u_h\right) K_n\left(k_2 r\right) e^{j\beta z} \tag{۱-۲۰}$$

می باشد.

[۱] The Point-Matching Method

با تطبیق میدان های مماسی در N نقطه بهینه روی مرز و قطع کردن بسط (۱-۱۷) - (۱-۲۰) در n = N ، یک سیستم معادلات خطی با مجهولات A_n ، B_n ، C_n و D_n بدست می آید. نظر به غیر بدیهی بودن جواب، معادله مشخصه ای بر حسب β بدست می آید که می‌توان مقادیر ویژه ممکن را محاسبه کرد. اولین بار که این روش معرفی شد، سوالات زیادی در مورد تایید فیزیکی آن پیش آمد، اعتبار معادلاتی نظیر (۱-۱۷) تا (۱-۲۰)، همگرایی جواب های مقدار ویژه وقتی N افزایش می یابد و ... . بعدا اعتبار و دقت بسط مذکور به این صورت نتیجه شد که این بسط معتبر نیست مگر اینکه مرز C بصورت شعاعی تک مقداره باشد و دارای خاصیت پریودیک ویژه ای - مثلا مثلثی - نباشد.

روش های تغییری و انتگرالی[۱]

در اینجا سه جنبه ممکن است مورد استفاده باشد. اول، یک فرمولاسیون تغییری[۲] که حول جواب صحیح *ایستان* است. دوم، بدست آوردن یک نمایش انتگرالی مقتضی برای میدان که ارضای شرایط مرزی، تضمین شده باشد. سوم، با استفاده از میدان آزمون[۳] ساده یا یک بسط، معادلات انتگرالی به یک مجموعه معادلات خطی ساده می شود که با روش های محاسباتی استاندارد می توان حل نمود.

با بسط میدان برحسب توابع پایه مناسب مانند (۱-۱۷) تا (۱-۲۰) در نمایش انتگرالی، یک معادله ماتریسی با عناصر شامل این توابع پایه داخل انتگرال‌های خط که روی مرز C گرفته می‌شود حاصل خواهد شد.

در مرجع [۷] جواب معادله انتگرالی تمام-برداری برای موجبر با سطح مقطع دلخواه بدست آمده است و نتایج آن برای سطح مقطع های دایروی، بیضوی، مستطیلی و مثلثی بطور دقیق بدست آمده است. در این مقاله هر دوی مودهای انتشاری و نشتی بحث و جواب‌های آن ارائه شده است.

۱-۴-۲) موجبر همسانگرد ناهمگن

در مثال موجبر ایزوتروپیک با ناهمگنی عرضی، جواب باید در فرم ساده شده معادله (۱-۱) و (۱-۲) یعنی معادله موج برداری صدق کند [۵]:

$$\nabla^2\mathbf{A} + k_0^2\varepsilon_r(x,y)\mathbf{A} - \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \qquad (۲۱-۱)$$

[۱] Variational and Integral Approaches

[۲] Variational formulation

[۳] Trial field

روش تفاضل محدود[1]

روش تفاضل محدود قدیمی‌ترین و شاید معمول‌ترین تکنیک استفاده شده برای حل مسائل مقدار مرزی[2] باشد. برای موجبر وقتی که ناحیه حل بسته باشد، پیاده سازی معادله موج اسکالر در این روش ساده خواهد بود. تفاضل محدود در حوزه زمان FDTD که اولین بار در سال ۱۹۶۶ توسط Yee معرفی شد، یک حل مستقیم معادلات وابسته به زمان کرل ماکسول است. یک مشکل اساسی در اعمال روش FDTD به مسائل پراکندگی و ناحیه باز این است که دامنه ای که میدان باید در آن محاسبه شود نامتناهی است و برای محدود کردن داده ها باید یک مرز مصنوعی در نظر بگیریم. این مرز باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا کل هندسه مسئله را در بر گیرد. همچنین باید شرایط مرزی مناسبی روی این مرز مصنوعی اعمال کنیم تا نامتناهی بودن ناحیه حل مسئله شبیه سازی شود.

روش اجزای محدود[3]

این روش قدرتمندترین و کارآمدترین حل عددی کلی‌ترین مسئله های موجبر اپتیکی (ناهمگن و ناهمسانگرد با هندسه سطح مقطع دلخواه) است. مثلا در مرجع [۸] موجبر ناهمگن به کمک FEM و استفاده از شرط مرزی بینهایت بسط توابع استوانه ای حل شده است و نتایج آن برای مودهای نشتی استریپ‌لاینی و حتی آنتن نشتی موجبری ارائه شده است.

همچنین در مرجع [۹] به کمک کوپلینگ FEM در درون موجبر دی الکتریک با معادلات انتگرالی مرزی در بیرون جوابی برای مسئله بدست آمده و نتایج آن برای سطح مقطع مربعی داده شده است.

در مواردی که ناهمگنی بصورت لایه ای باشد، می‌توان از روش تطبیق مودی نیز استفاده کرد. مثلا در مرجع [۱۰] موجبر دی‌الکتریک لایه ای با مقطع دلخواه به کمک روش تطبیق مودی گسسته حل شده است که کاربرد این روش را برای حل چنین مسائلی نشان می‌دهد. همچنین نتایج آن برای مثال خاص موجبر دی الکتریک با مقطع بیضی با نتایج روش های دیگر مقایسه شده است.

جالب است اشاره کنیم روش تغییری است که دو روش اجزای محدود و تفاضل محدود را به هم نزدیک می‌کند، چنانکه این دو روش برای مسائل یک بعدی و مسائل دوبعدی با مرزهای مستطیلی باهم معادل می شود.

---

[1] The Finite-Difference Method

[2] Boundary-value problems

[3] The Finite-Element Method

۱-۴-۳) موجبر ناهمسانگرد

در مثال یک موجبر ناهمسانگرد با استفاده از (۱-۱) و (۱-۲) می‌توان معادله موج برداری زیر را بدست آورد [۵]:

$$\nabla \times \left(\left[\varepsilon_r \right]^{-1} \nabla \times \mathbf{H} \right) - k_0^2 \mathbf{H} = 0 \qquad (۱-۲۲)$$

که $[\varepsilon_r]$ تانسور گذردهی نسبی[۱] است. روش های زیر می‌تواند در این بخش مورد استفاده قرار گیرد:

- روش معادله انتگرالی
- روش اجزای محدود برداری[۲]

لازم به ذکر است مسئله ناهمسانگرد یک فرمولاسیون اجزای محدود برداری نیاز دارد زیرا اپراتور دیگر مثبت قطعی[۳] نمی باشد. در مرجع [۱۱] موجبر دی الکتریک ناهمگن ناهمسانگرد با تلفات به روش اجزای محدود حل شده و در مرجع [۱۲] حالت غیرخطی آن بررسی شده است.

۱-۴-۴) روش انتشار باریکه[۴]

روش تبدیل فوریه سریع یکی از مشهورترین تکنیک‌ها در ریاضی‌فیزیک کاربردی است. این روش اولین بار برای مسئله فیبر نوری در سال ۱۹۷۸ توسط Yeh و همکارانش استفاده شد و پس از آن با نام BPM در مقالات به کار رفت. Yeh و همکارانش تعدادی از مسائل فیبرهای همگن و ناهمگن را به این روش حل کردند و همچنین مسائلی در موجبرهای دی الکتریک شاخه ای، horn ها، taper ها و کوپلرها حل شد. به عنوان نمونه در مرجع [۱۳] موجبر دی الکتریک با مقطع دلخواه همگن با شروع از معادله موج اسکالر با تحلیل فوریه دوبعدی حل شده است و در مرجع [۱۴] معادله موج برداری به همین روش حل شده است.

این روش دگرگونی و حرکت باریکه ای را که داخل ساختار فیبر نوری منتشر می شود، در نظر می‌گیرد. از آنجا که این روش بر اساس یک الگوریتم گام به جلو[۵] است، هر بازتاب یا پراکندگی به عقب نادیده گرفته می شود. حتی با وجود این محدودیت ها، مسائل زیادی از فیبرهای نوری یا موجبرهای مجتمع اپتیکی را می توان با BPM حل نمود.

---

۱ Relative permittivity tensor

۲ Vector FEM

۳ Positive-definite

۴ Beam Propagation Method or Forward Marching Split-Step Fast Fourier Transform Method

۵ Forward marching

بطور فیزیکی در این روش، انتشار در محیط ناهمگن با یک پروسه دو-گامی در هر رشد z تقریب زده می شود. بنابراین این روش را می توان برای هر دو مسئله هم‌شکل و ناهم‌شکل به کار کرد، به این صورت که ابتدا میدان در نقطه z را تا $z + \Delta z$ با فرض اینکه فضای مذکور همگن است، منتشر می کنیم. سپس اثر ناهمگنی‌های بین z و $z + \Delta z$ توسط ضرب این جواب در ضریب فازی $\exp(\Gamma)$ گزارش می شود.

۱-۴-۵) پارامترهای انتخاب یک روش

- توانایی روش برای مواجهه با لایه های دی الکتریک ناهمگن بیش از دو یا سه لایه و امکان تعمیم آن به لایه های بیشتر.
- دقت روش در مدلسازی نواحی و مرزهای دی الکتریک.
- دقت روش در رنج فرکانس های خاص، مثلا فرکانس های نزدیک قطع.
- کارآمدی و دقت جواب ها. مثلا یک روش ممکن است برای محاسبه مشخصه های یک مود تنها خوب باشد اما نتواند اختلاف کوچک بین مودهای همزاد[۱] را محاسبه کند.
- محدودیت ها و ملاحظات هر روش.
- بررسی امکان تولید جواب های غیرصحیح در روش موردنظر و تشخیص آنها.
- کارآمدی محاسباتی روش شامل سرعت انجام و ملزومات مربوط به محدودیت های حافظه محاسباتی[۲].

۱-۵) پاشندگی[۳]

تأخیر گروه در واحد طول، τ، یک موج منتشر شونده در طول یک فیبر با رابطه زیر داده می‌شود [۱۵]:

$$\tau = \frac{1}{c}\frac{d\beta}{dk_0} \qquad (۱-۲۳)$$

که در آن β ثابت انتشار و k_0 ثابت انتشار فضای آزاد است. از آنجا که تأخیر گروه وابسته به طول موج است، پالس دچار اعوجاج خواهد شد چراکه مولفه‌های طیفی پالس موقع انتشار در طول یک فیبر، تأخیرهای مختلفی تجربه خواهند کرد. در صورتیکه عرض طیفی منبع اپتیکی خیلی زیاد نباشد، تفاضل تأخیر در واحد طول موج

---

۱ Degenerate modes

۲ Computer storage

۳ Dispersion