دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

ابرگروه های رابطه ای خارج قسمتی و بررسی همولوژی روی دو تایی های (G,ω_G) در رسته $RHGrpp$

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

سجاد بیژن

مهرماه ۸۹

تقدیر و تشکر:

خداوند مهربان را به شکرانه‌ی الطاف بی‌کرانش و به واسطه‌ی نعمت آگاهی که بر آدم بخشید، می‌ستایم. او که از روحش در کالبد بی‌جان طبیعت دمید و علم را ابزاری برای شناختش قرار داد. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته‌ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه بکارگیرم.

از پدر و مادرم، این دو نعمت الهی که در تمام مراحل زندگی قرین لطف و محبتشان بوده‌ام، از آقای دکتر رضایی که با متانت و خلق و خوی نیکو در مقام استادی شایسته هدایت و راهنمائی این پایان‌نامه بر عهده ایشان بود، و نیز از آقایان دکتر لشکری پور ودکتر گرامی که داوری پایان نامه مرا به عهده داشتند، سپاسگزارم.

سجاد بیژن

چکیده

همولوژی بر گروه های رابطه ای اولین بار توسط آقای دکتر ناصر حسینی معرفی شده است. در این پایان نامه ابتدا رسته زوج ابر گروه های رابطه ای را تعریف می کنیم و با استفاده از آن همولوژی ابر گروه های رابطه ای را به شکل کامل تر و وسیع تر بیان می کنیم. در ادامه به بررسی وجود معادل‌سازی برای ابر گروه های رابطه ای دراین رسته می بردازیم و شرایطی را که تحت آن معادل‌ساز وجود دارد به دست می آوریم. سپس شرایطی را به دست می آوریم که معادل‌ساز یک ریخت صفر وجود داشته و برابر با هسته ریخت اول شود. این برابری باعث می شود تا دو تابعگون همولوژی که با استفاده از هسته با معادل‌ساز در تعریف آن ها به دست می آ ید با هم معادل شوند. در خاتمه تابعگون همولوژی را به دسته زنجیره های زوج ابر گروه های رابطه ای تعمیم می دهیم.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

در سال ۱۹۳۴ مارتی در هشتمین کنفرانس رایاضیدانان اسکاندیناوی با ارائه یک مقاله تعمیمی بر مفهوم گروه‌ها مطرح و نظریه **ساختارهای ابرترکیبی** را بنا نمود.

چهار شاخه عمده از ریاضیات به نام های جبر کلاسیک، نظریه اعداد، هندسه و آنالیز موجودند که نظریه گروه‌ها به کمک آنها رشد و گسترش یافته است. جبر کلاسیک در سال ۱۷۷۰ باکار جی. ال. لاگرانژ[۱] بر روی معادلات چند جمله ایها پایه ریزی شد. کار وی در کتابی تحت عنوان حل جبری معادلات انعکاسی امده است. گاوس با کارهای خود پایه گذار نظریه اعداد شناخته شده است و کتاب وی تحت عنوان نظریه جبری اعداد در سال ۱۸۰۱ انتشار یافت.

در سال ۱۸۷۲ سخنرانی اف. کلاین [۲] تحت عنوان نقدی قیاسی از تحقیقات اخیر در هندسه سخنرانی را به عنوان مبحثی از ناورداها تحت گروه‌های تبدیلات مورد بحث قرار داد. فشرده سخنرانی وی، چنان پر محتوا بود که به کلاین اجازه دادبه عنوان بنیانگذار این شاخه از نظریه گروه‌ها شناخته شود.

بنیانگذاران شاخه آنالیز اچ. پوانکاره[۳] واف. کلاین در سال ۱۸۷۶ هستند. دراین پایان نامه ابتدا با دستگاه‌های ریاضی مواجه می شویم که گروه نامیده می شوند. نظریه گروهها یکی از قدیمی ترین شاخه های جبر مجرد است. اولین کاربرد موثر گروه ها در اوایل قرن نوزدهم توسط کوشی [۴] و گالوا[۵] ارایه شد. آنها گروه‌ها را برای توصیف تاثیر جایگشت های ریشه های یک معادله چند جمله ای به کار بردند. استفاده آنها از گروه ها بر پایه یک اصل موضوعه قرار نداشت. در سال ۱۸۵۴ کیلی[۶] اولین اصول موضوعه را برای یک گروه ارایه داد. به هر حال اصول وی به زودی فاقد ارزش شد. در سال ۱۸۷۰ مجدادا کرونکر[۷] اصول موضوعه ای برای یک گروه پایه ریزی کرد. اچ. وبر[۸] در سال ۱۸۸۲ تعریفی را برای گروه‌های متناهی و در سال ۱۸۸۳ تعریفی را برای گروه‌های نامتناهی ارایه نمود.

J. L. Lagrange[۱]

F. Kline[۲]

H. Poincare[۳]

Cauchy[۴]

Galva[۵]

Cayli[۶]

Croncer[۷]

H. Webwe[۸]

ما در اینجا به بررسی همولوژی در رسته $RHGrpp$ می‌پردازیم و با ارائه چند مثال مطلب را واضحتر بیان می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱—۱ مقدمه

یکی از عمده ترین کاربردهای یکریختی رده بندی ساختارهای جبری به ویژه گروه ها می باشد. با کمی اطلاعات از جبر خطی می توان به یاد آورد که مفهوم یکریختی برای تشخیص کاملی از فضاهای برداری به کار میرود که روی میدان اسکالر یکسانی بر حسب عدد صحیح که همان بعد فضاست تعریف می‌شوند. کاربرد مهم دیگری از یکریختی نمایش یک ساختار جبری به وسیله دیگری است. این عمل در جبر خطی انجام می شود، وقتی نشان می دهیم که فضای برداری تمام تبدیلات خطی از یک فضای برداری با بعد متناهی به توی فضای دیگری یا فضای برداری معینی از ماتریس ها یکریخت می باشد.

در نظریه ساختارهای ابرترکیبی، همریختی را تابع هایی تعریف می کنیم به مانند گروه ها که ساختارهای ابرترکیبی حفظ شود.

دراین قسمت تابع هایی بین پلی گروه ها در نظر می گیریم. این تابع به گونه ای تعریف می شود که ساختار جبری پلی گروه ها را حفظ کنند.

۱–۲ پیش نیازهای ساختارهای ابرترکیبی

تعریف ۱.۲.۱: یک **نیم گروه** عبارت است از مجموعه ای ناتهی مانند G همراه با عملی دو تایی بر G با خاصیت های زیر:

(۱) شرکت پذیری: به ازای هر $a, b, c \in G$ ، $a(bc) = (ab)c$ ؛

(۲) یک تکگون: نیمگروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی دو طرفه مانند $e \in G$ است، به طوری که به ازای هر $a \in G$، $ae = ea = a$.

(۳) یک گروه تک گونی است مانند G به طوری که به ازای هر $a \in G$ عنصری معکوس دو طرفه مانند $a^{-1} \in G$ وجود دارد به قسمی که:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

مثال ۲.۲.۱: اعداد صحیح زوج تحت ضرب تشکیل نیم‌گروهی می دهند که تکگون نمی باشند. مجموعه اعداد صحیح مثبت با جمع یا ضرب معمولی یک تکگون است، ولی گروه نیست. مجموعه اعداد صحیح با جمع معمولی یک گروه است.

در سال ۱۹۳۴ مارتی[1] در هشتمین کنفرانس رایاضیدانان اسکاندیناوی با ارائه یک مقاله تعمیمی بر مفهوم گروه‌ها مطرح نموده و نظریه **ساختارهای ابرترکیبی** را بنا نمود.

مطالعه روی مسایل متعددی در جبر غیر جابجایی مانند همدسته ها توسط وی منجر به پیدایش این نظریه شد. اگر چه مارتی در سن جوانی در طول جنگ جهانی دوم در گذشت و نتوانست بیش از دو یا سه مقاله در این زمینه ارایه دهد، اما بسیاری از محققین در شاخه های مختلف ریاضی در این زمینه کار کرده اند، از جمله کراسنر[2] در نظریه ابرحلقه ها و ابرمیدان ها، میتاس[3] در ابر گروه های کانونی، کومر[4] در پلی

[1] Marty
[2] Crossner
[3] Mitass
[4] Koomer

گروه ها، ای. پونروینز[۵] و جان توسیاک[۶] در هندسه، بنادو[۷] و ناکونو[۸] در ابرمشبکه ها و ساروس[۹] در نظریه زبان ها و خودکاری، نتایج مهمی به دست آوردند.

مفهوم یک عمل دو تایی در جبر مجرد بسیار با اهمیت است. در نظریه گروه‌ها، مجموعه ها را به همراه یک یا چند عمل دو تایی در نظر می گیریم. ایده عمل دو تایی از جمع معمولی بر مجموعه اعداد صحیح می آید به این ترتیب که برای هر زوج اعداد صحیح (m, n) عدد صحیح یکتای $m + n$ را نسبت می دهیم.

پس برای ورود به نظریه ابر ساختارها نیازمند تعمیمی از عمل دو تایی هستیم.

تعریف ۱.۲.۳: اگر H مجموعه ای ناتهی باشد، یک ابر عمل بر H تابعی است مانند $*$ که:

$$*: H \times H \to P^*(H) \quad \text{و} \quad P^*(H) = \{A \subseteq H: \ A \neq \emptyset\}.$$

از آنجا که $H \in P^*(H)$ ، پس عمل دو تایی حالت خاصی از ابر عمل می باشد. تفاوت اساسی ابر عمل با دو تایی، این است که اگر $*$ یک ابر عمل باشد، برای هر $x, y \in H$ ، $x * y$ یک مجموعه است.

در بررسی ساختارهای ابر ترکیبی، ابتدا ساختاری را معرفی می کنیم که به ساختار گروهی بسیار نزدیک است، چرا که به درک مطلب کمک زیادی می‌کند. در این پایان نامه این ساختار را فقط معرفی می کنیم، ولی از آن استفاده زیادی نمی کنیم.

تعریف ۱.۲.۴: یک **پلی گروه** عبارت است از مجموعه ای ناتهی مانند H همراه با ابر عمل $*$ به روی H با خاصیت های زیر:

(۱) شرکت پذیری: به ازای هر $x, y, z \in H$،

---

[۵] E. Ponrowins

[۶] John Tosiak

[۷] Benadoo

[۸] Nakono

[۹] Saroos

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

(۲) یک عنصر همانی دو طرفه مانند $e \in H$ به طوری که به ازای هر $x \in H$

$$x * e = e * x = \{x\};$$

(۳) به‌ازای هر $x \in H$ عنصری معکوس دو طرفه مانند $x' \in H$ وجود دارد به قسمی که

$$e \in x' * x \bigcap x * x'.$$

(۴) به ازای هر $x, y, z \in H$ داریم

(قانون حذف از چپ و راست) $\quad z \in x * y \Rightarrow x \in z * y' \Rightarrow y \in x' * z.$

تعریف ۵.۲.۱: فرض کنید $(H, *_H)$ و $(G, *_G)$ دو پلی گروه باشند. نگاشت $f : G \to H$ را همریختی پلی گروهی گوییم، هر گاه

$$\forall x, y \in G, \quad f(x *_G y) = f(x) *_H f(x).$$

و f را همریختی ضعیف پلی گروهی گوییم، هرگاه

$$\forall x, y \in G, \quad f(x *_G y) \subseteq f(x) *_H f(x).$$

مثال ۶.۲.۱: فرض کنید B زیرگروهی از A باشد. روی مجموعه $G_{A,B} = \{BaB : a \in A\}$ ، ابرعمل * رابه‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$BaB * Ba'B = \{Baba'B : b \in B\}.$$

چون $bab' \in H$، پس

$$BaB * Ba'B \in P^*(G_{A,B}).$$

اکنون فرض کنید $(BaB, Ba'B) = (BcB, Bc'B)$ لذا

$$BaB = BcB, \qquad Ba'B = Bc'B.$$

برای اثبات خوش تعریفی * کافیست نشان دهیم

$$\{Baba'B : b \in B\} = \{Bcbc'B : b \in B\}.$$

با عضو گیری، می‌توان نشان داد این دو مجموعه با هم برابرند.

با شرکت پذیری عمل در گروه‌ها، روابط بعدی نشان می دهند که* شرکت پذیر است:

$$(BaB * Ba'B) * Ba''B = (Baba'B) * Ba''B = B(aba')ba''B$$
$$= BaB * (Ba'ba''B) = BaB * (Ba'B * Ba''B).$$

عضو همانی $G_{A,B}$ مجموعه B می باشد، زیرا

$$BaB * B = B * BaB = BaB .$$

برای هر $\{BaB : a \in G_{A,B}\}$، داریم

$$B \in BaB * Ba^{-1} \bigcap Ba^{-1}B * BaB ,$$

پس معکوس BaB، $Ba^{-1}B$ می باشد، که طبق تعریف $G_{A,B}$ عضو آن است.

برای اثبات خاصیت آخر، فرض کنید $BaB , Ba'B , Ba''B \in G_{A,B}$. اگر

$$Ba''B \in BaB * Ba'B,$$

آنگاه

$$Ba''B * Ba'^{-1}B \in BaB * Ba'B * Ba'^{-1}B .$$

در نتیجه $Ba''B * Ba'^{-1}B \in BaB$.

به همین ترتیب اگر $Ba''B * Ba'^{-1}B \in BaB$، آن گاه $Ba^{-1}B * Ba''B \in Ba'B$. بنابراین $(G_{A,B}, *)$ یک پلی گروه است.

مثال ۱.۲.۷: فرض کنید زیر گروه B از گروه A و زیر گروه B' از گروه A' و همریختی های گروهی f_A , f_B داده شده باشند، به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "inc"'] & B' \arrow[d, "inc"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

تابع $\quad f : (G_{A,B}\,,*) \to (G_{A',B'}\,*)$

را به صورت $f(BaB) = B'f_A(a)B'$ تعریف می کنیم. با این تعریف، نشان می دهیم که f یک همریختی پلی گروهی ضعیف است.

چون f_A همریختی گروهی است، بنابراین

$$f(BaB * Ba'B) = f(Baba'B) = B'f(aba')B' = B'f_A(a)f_A(b)f_A(a)B' .$$

از طرف دیگر، داریم

$$f(BaB) * f(Ba'B) = B'f_A(a)B' * B'f_A(a')B' = \{B'f_A(a)b'f_A(a')B : b' \in B'\} .$$

چون نمودار بالا جابجایی است، $f_A(b) = f_B(b)$ می باشد. بنابراین

$$B'f_A(a)f_A(b)f_A(a)B' = B'f_A(a)f_B(b)f_A(a)B' ,$$ ،

که $f_B(b') \in B'$. پس

$$B'f_A(a)f_B(b)f_A(a)B' \subseteq \{B'f(a)b'f(a')B : b'B'\} .$$

بنابراین

$$f(BaB * Ba'B) \subseteq f(BaB) * f(Ba'B) .$$

همچنین اگرf_B یک بروریختی باشد، f یک همریختی پلی گروهی است.

طبق انچه در بالا گفته شده کافیست ثابت کنیم که

$$B'f_A(a)f_B(b)f_A(a)B' \supseteq \{B'f(a)b'f(a')B : b' \in B'\}.$$

چون f_Bیک برو ریختی است، پس

$$\forall b' \in B', \exists b \in B' \quad ; \quad f_B(b) = b'.$$

با استفاده از این خاصیت، رابطه مورد نظر به دست می آید.

دراین قسمت ساختار ابر ترکیبی دیگری را معرفی می کنیم که توجه اصلی ما به این ساختار است.

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و* یک ابر عمل روی H باشد(یعنی $*: H \times H \to P^*(H)$).

$(H,*)$ را یک **ابرگروه** گوییم، هرگاه

(۱) * شرکت پذیر باشد: $\forall x,y,z; \quad x*(y*z) = (x*y)*z$؛

(۲) به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم: $x*H = H*x = H$.

تعریف ۹.۲.۱: $(G,*_G)$ را **زیر ابرگروه** $(H,*_H)$گوییم، هرگاه $G \subseteq H$ باشد، $(G,*_G)$ خود یک ابر گروه باشد و نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "*G"] \arrow[d, "inc"'] & p^*(G) \arrow[d, "inc"] \\
H \times H \arrow[r, "*H"'] & p^*(H)
\end{tikzcd}$$

مثال ۱۰.۲.۱: فرض کنید B زیرگروه نرمالی از A باشد. ابرعمل * را روی A به این صورت تعریف می کنیم که $a * a' = aa'B$ باشد.

چون B زیرگروهی از A است، پس $aa'B \in P^*(A)$ و اگر $c, c' \in A$ و $(a, a') = (c, c')$، آنگاه $aa'B = cc'B$. بنابراین * خوشتعریف‌است.

* شرکت پذیر است، زیرا $(a * a') * a'' = (a * a')a''B = (aa'B)a''B$. چون B زیرگروه نرمالی از A و عمل گروه شرکت پذیر است، پس

$$(aa'B)a''B = (aa')a''B = aa'a''B.$$

به همین طریق می توان نشان داد که $a * (a' * a'') = aa'a''B$.

برای اثبات ابرگروهی A کافی است نشان دهیم که برای هر $a \in A$،

$$a * A = A * a = A.$$

واضح است که $a * A \subseteq A$. برای هر $a' \in A$ باید نشان دهیم که $a' \in a * A$، یعنی عنصری مانند $a'' \in A$ پیدا کنیم که $a' \in a * a''$. برای این منظور فرض کنید $a'' = a^{-1}a'$، پس طبق تعریف $a * a'' = a'B$، که متعلق به این مجموعه می باشد، بنابراین $a * A = A$.

به همین طریق، می توان نشان داد $A = a * A$. بنابراین $(A, *)$ یک ابرگروه است. اکنون نشان می دهیم $(B, *)$ زیرابرگروهی از $(A, *)$ می باشد.

توجه کنید که برای هر $b, b' \in B$، داریم $b * b' = B$. پس تحت ابرعمل * بسته است. چون B زیرگروهی از A می باشد، پس کافیست نشان دهیم که برای هر $b \in B$ ، $b * B = B * b = B$. واضح است که $b * B \subseteq B$. برای هر $b' \in B$ ، باید نشان دهیم که عنصری مانند $b'' \in B$ وجود دارد به طوری که $b' \in b * b''$. کافیست انتخاب کنیم $b'' = b^{-1} * b'$. لذا $b * B = B$.

به همین طریق می توان نشان داد که $B * b = B$.

تعریف ۱۱.۲.۱: فرض کنید ابرگروه های $(H, *_H)$ و $(G, *_G)$ داده شده باشند. یک تابع $f : G \to H$ را یک همریختی ابرگروهی می گوییم، اگر

$$\forall x, y \in G, \quad f(x *_G y) = f(x) *_H f(y).$$

یک همریختی ضعیف، تابعی است که

$$\forall x,y \in G, \quad f(x *_G y) \subseteq f(x) *_H f(y) \,.$$

مثال ۱۲.۲.۱: فرض کنید زیر گروه نرمال B از گروه A و زیر گروه نرمال B' از گروه A' و همریختی های گروهی f_B و f_A داده شده باشند به طوری که عمل گروه های A و A' همانند مثال ۱—۱—۹ باشد، به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "inc"'] & B' \arrow[d, "inc"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & A'
\end{tikzcd}$$

تابع $f : A \to A'$ ، که $f(a) = f_A(a)$ یک همریختی ضعیف است.

طبق تعاریف f و $*$ داریم

$$f(a * a') = f(aa'B) = f_A(aa'B) \,.$$

چون f_A همریختی گروهی است، لذا $f_A(aa'B) = f_A(a)f_A(a')f_A(B)$. چون نمودار بالا جابجایی است، بنابراین $f_A(B) = f_B(B)$. واضح است که $f_A(b) \subseteq B'$. از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می گیریم، که

$$f(a * a') \subseteq f_A(a)f_A(a')B' = f_A(a)f_A(a') = f(a) * f(a') \,.$$

بنابراین تابع f یک همریختی ضعیف از ابر گروه هاست.

اگر همریختی f_B ، برووریختی باشد، آنگاه $f_A(B) = B'$. بنابراین

$$f(a * a') = f(a) * f(a')$$

پس تابع f یک همریختی ابر گروهی است.

مثال ۱.۲.۱۳: $H_v -$ گروه عبارت است از مجموعه ناتهی مانند H ، همراه با ابر عمل $*$ به روی H با دو خاصیت زیر:

(۱) به ازای هر $x, y, z \in H$ ، $x * (y * z) \bigcap (x * y) * z \neq \emptyset$؛

(۲) برای هر $x \in H$ ، $x * H = H * x = H$.

مثال ۱.۲.۱۴: مجموعه H را با ابر عمل $*$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$*$	a	b	c
a	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$
b	$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
c	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$

با این تعریف یک $H_v -$ گروه است. توجه کنید که $(H,*)$ ابرگروه نیست، چون

$(a * a) * b \bigcap a * (a * b) \neq \emptyset$ ،ولی $(a * a) * b \neq a * (a * b)$.

خاصیت های $H_v -$ گروه را در این مثال به آسانی می توان نشان داد.

درفصل بعد می خواهیم ساختارهای ابرترکیبی را که تا کنون معرفی کردیم، تعمیم دهیم. برای این منظور، مفاهیمی مانند شرکت پذیری، جابجایی و غیره را به طریقی، که انچه را که قبلا گفتیم، در

برگیرد، گسترش می دهیم.

۱—۳ پیش نیاز های رسته ای

تعریف ۱.۳.۱: هر رسته رده ای است مانند C از اشیا (که با c, b, a ,... نشان داده می شوند)، به انضمام:

(۱) یک رده از مجموعه های از هم جدا، که با $hom\,(a,b)$ نشان داده می شوند. برای هر جفت از اشیا در C عنصر f از $hom\,(a,b)$ یک ریخت از a به a نامیده و با $f\ : a \to b$ نشان داده می شود.

(۲) به ازای هر سه تایی (a,b,c) از اشیا در C تابعی مانند

$$o\ : \hom(b,c)\ \times\ \hom(a,b) \to\ \hom(a,c)$$

برای ریخت های $g\ : b \to c$ و $f\ : a \to b$ ، این تابع به صورت $(g,f)\ \to g\,o\,f$ نوشته و $g\,o\,f\ : a \to c$ ترکیب f و g خوانده می شود، که در دو اصل موضوع زیر صدق می کند:

(۱) شرکت پذیری: هرگاه $h\ : c \to d$ و $g\ : b \to c$ و $f\ : a \to b$ ریخت هایی از C باشند ، آنگاه:

$.\ h\,o(g\,o\,f)\ =\ (h\,og)\,o\,f$

(۲) همانی: به ازای هر شی b از C، ریختی مانند $۱_b\ : b \to b$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f\ : a \to b$ و $g\ : b \to c$

$$g\,o\,۱_b = g\,, \qquad\qquad ۱_b\,o\,f = f\,.$$

نماد گذاری : اگر a و b دو شی در رسته C باشند، مجموعه همه ریخت های بین a و b در C را با $hom\,(a,b)$ نمایش می دهیم.

مثال ۲.۳.۱: (۱) Set رسته ای است که اشیا آن همه مجموعه ها، و ریخت های آن همه توابع بین مجموعه ها هستند، o ترکیب توابع است و همانی ، تابع همانی می باشد.

(۲) Grp رسته ای است که اشیا آن همه گروه ها، و ریخت های آن همه توابع همریختی بین گروه ها می باشند . o ترکیب توابع است و از آنجا که تابع همانی یکریختی است، بنابراین همانی ، تابع همانی می باشد.

(۳) Top رسته ای است که اشیا آ همه فضا های توپولوژیک، و ریخت های آن همه توابع پیوسته(همریختی ها) بین فضا های توپولوژیک هستند، o ترکیب توابع است و از آنجا که تابع همانی یک همریختی است ، همانی، تابع همانی می باشد.