بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (محض)

نظریه کاردینال ها بدون اصل انتخاب

توسط

عقیل قدمیاری

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقری

استاد مشاور

دکتر مسعود پورمهدیان

۱۳۸۸/۳/۳۱

اسفند ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

عضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **عقیل** قدمیاری رشته ریاضی (محض) تحت عنوان:«**نظریه کاردینال‌ها بدون اصل انتخاب**» از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
۲- استاد مشاور	دکتر مسعود پورمهدیان	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر محمد اردشیر	استاد	
٥- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

بسمه‌تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاّع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد /رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی *است که در سال* ۱۳۸۷ *در دانشکدهٔ* علوم پایه *دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر* باقری *، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* پورمحمدیان *و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر* ـــــ *از آن دفاع شده است.»*

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب عقیل قربانی دانشجوی رشته ریاضی مقطع ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضا:

۱۳۸۷/۱۲/۲۵

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت وکرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت‌علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدیدآورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه / رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم‌افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان‌نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت‌رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

تقدیم به

بهترین واژگان حیات

گوهران والای تمامی سالهای زندگیم

پدر و مادرم

و ای کاش چیزی با ارزش تر از این داشتم که تقدیمشان کنم ...

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظهٔ زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گذارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی شائبهٔ استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب دکتر سید محمد باقری را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وا می‌داشتند، همچنین از تلاشهای جناب دکتر مسعود پورمهدیان که باپیشنهادهای خوبشان راهگشای من بودند قدردانی می‌نمایم. بر خود لازم می‌دانم از اساتید گرانقدر آقایان دکتر محمد اردشیر و دکتر عباس حیدری به خاطر خواندن پایان‌نامه و حضور در جمع داوران سپاسگزاری نمایم.

درانتها نیز از همه کسانی که در این راه مشوق و همراه من بوده‌اند از جمله دوستان عزیزم حمیدرضا بابایی، مهدی مهرانی، عادل علیپور، نیمامیرزایی، سعید قاسمی و احمد فرمانی‌بقا صمیمانه تشکر می‌نمایم.

عقیل قدمیاری

اسفند ۱۳۸۷

نظریه کاردینال ها بدون اصل انتخاب

چکیده

در این پایان نامه بدون در نظر گرفتن اصل انتخاب روابط بین اعداد کاردینالی که به نوعی به یک مجموعه نامتناهی دلخواه وابسته هستند، را در مدل های جایگشتی متفاوتی بررسی می کنیم و نتایجی قابل توجه بدست می آوریم. در فصل اول به مقدماتی از نظریهٔ مجموعه‌ها و حساب کاردینال ها می پردازیم، در فصل دوم اصل انتخاب و چندین اصل مهم معادل با آن را معرفی می کنیم، در فصل انتهایی که مطالب اصلی پایان نامه را در بر دارد ابتدا **مدل اولیه فرانکل** [۱] را معرفی کرده و به بررسی روابط بین کاردینال ها در این مدل جایگشتی می پردازیم سپس همین کار را در مورد مدل مرتب موستفسکی [۲] انجام می دهیم بعد از معرفی این دو مدل یک مدل جایگشتی دلخواه می سازیم و در آن به مقایسه کاردینال ها می پردازیم و نتایج آن را بیان می کنیم، در آخر هم چند کاردینال که به مجموعه توانی وابسته اند را معرفی کرده و روابط بین آنها را بررسی می کنیم. مرجع اصلی این پایان نامه مقاله شماره [۸] است ولی اشارات زیادی به مقاله شماره [۷] شده است که نشان از اهمیت بالای این مقاله برای انجام این پایان نامه دارد، همچنین در این پایان نامه از مراجع مهم دیگری از جمله [۱۴]، [۲۴]، [۱۳]، [۲۵] بسیار استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی : اصل انتخاب، اوردینال، کاردینال، مدل جایگشتی، مدل فرانکل، مدل موستفسکی

---

[۱] The basic Fraenkel model

[۲] The ordered Mostowski model

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ نظریه مجموعه ها

در این بخش مقدماتی از نظریه مجموعه ها که در سراسر این پایان نامه به آنها نیازمندیم، مانند اصول نظریه مجموعه ها و مدلهایی از آنها را ارائه می دهیم.

۱.۱.۱ اصول ZF

در زبان نظریه مجموعه ها، تئوری حاصل از ۸ اصل زیر ZF [۱] نامیده می شود:

۱) اصل گسترش [۲] : اگر X و Y عضوهای یکسانی داشته باشند آنگاه $X = Y$.

$$\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y$$

[۱] Zermelo-Fraenkel

[۲] Extensionality

۲) اصل جفت سازی [۳] : برای هر a و b مجموعه ای وجود دارد که فقط شامل دو عضو a و b است .

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

۳) قالب اصل جداسازی [۴] : اگر φ یک فرمول باشد (با پارامتر p)آنگاه برای هر X و p مجموعه ای مانند $Y = \{u \in X : \varphi(u,p)\}$ وجود دارد که شامل همه $u \in X$ هایی است که در φ صدق می کنند.

$$\forall X \forall p \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u,p))$$

۴) اصل اجتماع [۵] : برای هر X مجموعه ای مانند $Y = \cup X$ وجود دارد، که اجتماع همه اعضای X است.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z))$$

---

[۳] Pairing

[۴] Axiom schema of Separation

[۵] Union

۵) اصل مجموعه توانی [۶] : برای هر X همه زیر مجموعه های آن یک مجموعه است.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$$

۶) اصل بی نهایت [۷] : مجموعه نامتناهی وجود دارد.

$$\exists S [\varphi \in S \wedge (\forall x \in S)[x \cup \{x\} \in S]]$$

۷) قالب اصل جایگزینی [۸] : اگر F یک تابع باشد، آنگاه برای هر X، $F[X]$ یک مجموعه است.

برای هر فرمول $\varphi(x, y, p)$ داریم :

$$\forall x \forall y \forall z [\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \rightarrow y = z] \rightarrow$$

$$\forall X \forall Y \forall y [y \in Y \leftrightarrow (\exists x \in X) \varphi(x, y, p)$$

۸) اصل خوش بنیانی [۹] (انتظام [۱۰]) : هر مجموعه ناتهی دارای $\in$—کوچکترین عضو است.

$$\forall S [S \neq \emptyset \rightarrow (\exists x \in S) S \cap x = \emptyset]$$

---

[۶] Power set

[۷] Infinity

[۸] Axiom schema of Replacement

[۹] Foundation

[۱۰] Regularity

۲.۱.۱ مدل های متعدی

تعریف ۱.۱.۱ : مجموعه S را متعدی گوییم اگر

$$\forall x \quad (x \in S \rightarrow x \subseteq S)$$

تعریف ۲.۱.۱ : جهان[۱۱] V، اینگونه تعریف می شود:

$$V = \bigcup_{\alpha \in O_n} V_\alpha$$

که در آن O_n کلاس همه اردینال هاست و هر V_α مجوعه همه مجموعه های با رتبه کمتر از α است :

$$V_\circ = \emptyset, \qquad V_{\alpha+\backslash} = P(V_\alpha), \qquad V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \quad (\alpha \textit{ is an limit ordinal})$$

مجموعه های متعدی دارای این خاصیت مهم هستند که‌هیچ دو مجموعه متعدی، یکریخت نیستند یعنی هیچ نگاشت یک به یکی چون π وجود ندارد که $x \in y \leftrightarrow \pi x \in \pi y$. تنها خود ریختی یک مجموعه متعدی، همانی می باشد.

یکی از روشهای طبیعی برای تعبیر ZF درنظریه مجموعه ها استفاده از مدلهاست. کلاس $\mathcal{M}$ و رابطه دوتایی E را روی آن درنظر می گیریم، فرمولهای نظریه مجموعه ها را چنین تعبیر می کنیم: با استقرا روی پیچیدگی ϕ، $\mathcal{M} \models \phi$ را تعریف می کنیم:

---

[۱۱] Universe

$$\mathcal{M} \models x \in y \leftrightarrow xEy$$

$$\mathcal{M} \models \forall x in \phi \leftrightarrow for\ all\ x \in M,\ M \models \phi(x)$$

$etc.$

تعریف ۳.۱.۱ : کلاس متعدی $\mathcal{M}$ را تقریباجهانی [12] می نامیم، هرگاه هر زیرمجموعه $\mathcal{M}$ مشمول در عضوی از $\mathcal{M}$ باشد:

$$(\forall S \subset \mathcal{M})(\exists Y \in \mathcal{M})[S \subseteq Y]$$

قضیه ۱.۱.۱ : اگر $\mathcal{M} \models Extensionality$ آنگاه $\mathcal{M}$ با یک کلاس متعدی یکریخت است.

اگر$\mathcal{M}$ متعدی و تقریبا جهانی باشد، در تمامی اصول ZF بجز احتمالا اصل بینهایت و قالب اصل جداسازی صدق می کند. در مورد اصل بینهایت مشکلی نیست، چون $\mathcal{M}$ شامل مجموعه های نامتناهی است. تنها اصل جداسازی باقی می ماند که آن هم به راحتی و با استفاده از عملگرهای گودل که در زیر تعریف می کنیم و قضیه متعاقب آن اثبات می شود.

---

[12] Almost universal

تعریف ۴.۱.۱ : عملگرهای گودل : هشت عملگر زیر عملگرهای گودل نامیده می شوند.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(X,Y) &= \{X,Y\},\\
\mathcal{F}_2(X,Y) &= X-Y,\\
\mathcal{F}_3(X,Y) &= X\times Y,\\
\mathcal{F}_4(X) &= dom(X),\\
\mathcal{F}_5(X) &= \in\cap X^2,\\
\mathcal{F}_6(X) &= \{(a,b,c):(b,c,a)\in X\},\\
\mathcal{F}_7(X) &= \{(a,b,c):(c,b,a)\in X\},\\
\mathcal{F}_6(X) &= \{(a,b,c):(a,c,b)\in X\}.
\end{aligned}
$$

قضیه ۲.۱.۱ : اگر $\mathcal{M}$ متعدی و تقریبا جهانی باشد و همچنین تحت عملگرهای گودل بسته باشد آنگاه $\mathcal{M}$ مدل ZF است.

اثبات : به [۱۴] مراجعه کنید. ◇

مثالی از یک جهان ساختنی :

در این بخش نشان می دهیم کوچکترین مد متعدی برای ZF موجود است که شامل همه اوردینالهاست و اصل انتخاب را ارضا می کند. این امر سازگاری اصل انتخاب با اصول ZF را نتیجه می دهد.

تعریف ۵.۱.۱ : بستار یک مجموعه S را با $cl(S)$ نشان می دهیم و کوچکترین $S' \supseteq S$ است که تحت عملگرهای گودل بسته است. در واقع

$$cl(S) = S_0 \cup S_1 \cup ... \cup S_n \cup ..., \qquad n \in \omega$$

که در آن

$$S_0 = S, \quad S_{n+1} = S_n \cup \{\mathcal{F}_i(x,y) : i = 1, 2, ..., 8, x, y \in S_n\}$$

تعریف ۶.۱.۱ : جهان ساختنی : فرض کنیم :

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset, \\ L_{\alpha+1} &= P(L_\alpha) \cap cl(L_\alpha \cup \{L_\alpha\}), \\ L_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \qquad if\ \alpha\ is\ a\ limit\ ordinal, \end{aligned}$$

حال قرار می دهیم : $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$.

به راحتی دیده می شود که L متعدی و تقریبا جهانیست، همچنین تحت عملگرهای گودل بسته‌است.

از اینرو :

قضیه ۳.۱.۱ : L مدلی از ZF است.

L را جهان ساختنی می نامیم و اعضای L مجموعه های ساخت پذیر [۱۳] نامیده می شوند. کلاس L را بوضوح می توان خوش ترتیب کرد: چون با توجه به شیوه تعریف L، در هر مرحله α، هر مجموعه یا به صورت $\mathcal{F}_i(x,y)$ است یا به صورت L_β برای یک $\beta < \alpha$ است. در نتیجه اگر هر مجموعه ساختنی باشد، آنگاه جهان را می توان خوش ترتیب کرد، و بنابراین اصل انتخاب ارضا می شود.

اصل ساخت پذیری [۱۴] : $V = L$، یعنی هر مجموعه ساختنی است.

قضیه ۴.۱.۱ :(اصل ساخت پذیری) $\models L$، و بنابراین $L \models ZF + AC$.

۳.۱.۱ مدل های جایگشتی

دراین قسمت می خواهیم مدلهای جایگشتی را معرفی کنیم، ولی پیش از آن باید نظریه مجموعه ها با اتمها ZFA، را تعریف کنیم. ZFA نوع تغییر داده شده‌ای از ZF است که در آن علاوه بر مجموعه ها، اشیأ دیگری را نیز اضافه می کنیم که به آنها اتم می گوییم. اتمها اشیائی هستند که هیچ عضوی ندارند ولی با مجموعه تهی تفاوت دارند. زبان نظریه ZFA شامل $\in$,= و دو نماد ثابت $A, \emptyset$ (مجموعه تهی و مجموعه تمام اتمها) است.

اصول ZFA همان اصول ZF است بجز تغییرات زیر:

$$\emptyset \ : \quad \neg\exists x(x \in \emptyset)$$

$$A \ : \quad \forall z(z \in A \leftrightarrow z \neq \emptyset \wedge \neg\exists x(x \in z))$$

[۱۳] Constructible

[۱۴] Axiom of Constructibility

اتمها اعضای A هستند و مجموعه ها هم اشیائی هستند که اتم نیستند.

$A1$: *Extensionality* $(\forall set\ X)(\forall set\ Y)[\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y]$

$A8$: *Regularity* $(\forall nonempty\ S)(\exists x \in S)[x \cap S = \emptyset]$

حال برای هر مجموعه S تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} p^{\circ}(S) &= S \\ p^{\alpha}(S) &= \cup_{\beta<\alpha} p^{\beta}(S) \qquad (\alpha\ is\ limit) \\ p^{\alpha+1}(S) &= p^{\alpha}(S) \cup P(p^{\alpha}(S)) \\ p^{\infty}(S) &= \cup_{\alpha \in On} p^{\alpha}(S) \end{aligned}$$

پس

$$V = p^{\infty}(A)$$

کلاس $p^{\infty}(\emptyset)$ مدل ZF است و هسته [15] نامیده می شود.

حال مدلهای جایگشتی را تعریف می کنیم، می دانیم که در ZF جهان خودریختی نابدیهی ندارد ولی در ZFA هر جایگشت از اتمها یک خودریختی از V را القا می کند، اگر π یک جایگشت از A باشد آنگاه برای هر x تعریف می کنیم:

$$\pi(x) = \pi[x] = \{\pi(t) \mid t \in x\}$$

[15] Kernel

π دارای خواص زیر است:

a) $x \in y \leftrightarrow \pi x \in \pi y$

b) $\phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi(\pi x_1, ..., \pi x_n)$

c) $rank(x) = rank(\pi x)$

d) $\pi\{x, y\} = \{\pi x, \pi y\}$, $\pi(x, y) = (\pi x, \pi y)$

e) اگر R یک رابطه باشد آنگاه πR نیز یک رابطه است و

$$(x, y) \in R \leftrightarrow (\pi x, \pi y) \in \pi R$$

f) اگر f یک تابع روی X باشد آنگاه πf یک تابع روی πX است و

$$f(\pi x) = \pi f(x)$$

g) برای هر x در هسته داریم: $\pi x = x$

k) $(\pi.\rho)x = \pi(\rho(x))$ (که ρ جایگشتی از A می باشد).

حال فرض کنیم G گروهی از جایگشتهای A باشد، مجموعه $\mathcal{F}$ از زیرگروههای G یک فیلتر نرمال روی G است هرگاه‌برای هر زیرگروه H و K از G داشته باشیم:

$$I \;)\quad G \in \mathcal{F};$$

$$II \;)\quad H \in \mathcal{F} \wedge H \subseteq K \to K \in \mathcal{F};$$

$$III \;)\quad H \in \mathcal{F} \wedge K \in \mathcal{F} \to H \cap K \in \mathcal{F};$$

$$IV \;)\quad \pi \in G \wedge H \in \mathcal{F} \to \pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F};$$

$$V \;)\quad \forall a \in A\, , \{\pi \in G \mid \pi a = a\} \in \mathcal{F}.$$