دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان

الگوریتم مبتنی بر فرایند آرنولدی برای معادلات ریکاتی جبری بزرگ

استاد راهنما

دکتر فائزه توتونیان

استاد مشاور

دکتر علیرضا سهیلی

نگارش

زهرا نقدبیشی

تیر ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر

خداوند منان را سپاس فراوان می‌گویم که به این بنده توفیق تحصیل فرمود و توان ادامه دادن را سلب نکرد.

ابتدا از پدر و مادر عزیزم که همیشه و همه جا مشوق و یاور من بودند قدردانی می‌کنم. همچنین از همسر مهربانم که با من در این راه همراه بود سپاسگذارم. همچنین از استاد راهنمای دلسوزم خانم دکتر توتونیان که در این راه به جای اثبات راه اثبات کردن را به بنده آموخت و مانند چراغی راه را برای ادامه روشن ساخت و آقای دکتر سهیلی که مشاورم در تهیه این پایان نامه بودند کمال تشکر را دارم. و در پایان از داوران گرامی که قبول زحمت نموده و عهده دار داوری این پایان نامه شوند سپاس گذارم.

پیشگفتار

معادلات ریکاتی جبری در بسیاری از مسائل نظریه کنترل نقش مهمی بازی می‌کنند. این معادلات در مسائل منظم درجه دوم خطی و H_∞ یا $H_۲$ - کنترل و بسیاری دیگرمطرح می‌شوند [۲ و ۱۰و۱۸ و ۲۵]. که به دو فرم پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی می‌باشند. در حالت پیوسته - زمانی ($CARE$)[۱] دارای شکلی به صورت زیر هستند

$$A^TX + XA - XBB^TX + C^TC = ۰$$

و در حالت گسسته - زمانی ($DARE$)[۲] به شکل زیر می‌باشند

$$X = A^TXA - A^TXB(R + B^TXB)^{-۱}B^TXA + C^TC$$

در اینجا $A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$، $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$، $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ و $R = R^T > ۰$ است. همچنین فرض می‌کنیم که ماتریس A یک ماتریس تنک وبزرگ و B و C دارای رتبه کامل باشند و$s \ll n$ و $p \ll n$.

در دهه‌های اخیر روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات ریکاتی جبری ارائه شده‌اند، مانند روش‌های محاسباتی برمبنای روش شور و روش‌های شور - ساختار [۲۳ و۲۷ و۷ و ۲۰] و روش‌های تابع علامت ماتریسی [۴و۱۶] و روش‌های نیوتن [۱۷ و ۳و ۱۸و ۵ و۱۳] و روش لانزوس [۶].

در این پایان نامه قصد داریم با استفاده از روش‌های تصویری به روی زیرفضاهای کریلف و کریلف بلوکی پایه‌های یکا متعامد بسازیم و از فرآیندهای آرنولدی، آرنولدی بلوکی و آرنولدی بلوکی توسعه یافته

[۱] Continuous - time algebriac Riccati Equations

[۲] Discrete - time algebriac Riccati Equations

استفاده کنیم و جواب‌های تقریبی با بعد پایین برای معادلات ریکاتی جبری پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی استخراج نمائیم.

درفصل اول این پایان نامه ابتدا به معرفی معادلات ریکاتی جبری می‌پردازیم سپس تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم و در پایان روش شور و روش نیوتن را برای حل معادلات ریکاتی جبری ارائه می‌دهیم. در فصل دوم فرآیند آرنولدی جامع و آرنولدی اصلاح شده را معرفی و سپس با استفاده از فرآیند آرنولدی جواب‌های با رتبه پایین برای معادلات ریکاتی جبری پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی به دست می‌آوریم. در فصل سوم ابتدا الگوریتم آرنولدی بلوکی را ارائه می‌دهیم سپس با استفاده از آن جواب‌های تقریبی برای معادلات ریکاتی جبری و معادله لیاپانوف استخراج می‌کنیم. در فصل چهارم با استفاده از فرآیند آرنولدی بلوکی توسعه یافته جواب‌های تقریبی با بعد پایین برای معادلات ریکاتی جبری پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی به دست می‌آوریم. در پایان هر فصل مثال‌های عددی برای نشان دادن کارایی الگوریتم‌ها ارائه شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و قضایای اولیه

۱.۱ مقدمه

همان‌طور که در پیشگفتار اشاره شد معادلات ریکاتی جبری در بسیاری از مسائل کاربردی مطرح می‌شوند و به دو فرم پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی می‌باشند.

در این پایان نامه به بررسی روش‌های عددی برای معادلات ریکاتی جبری در حالت پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی می‌پردازیم. که در حالت پیوسته - زمانی به صورت زیر هستند

$$A^TX + XA - XBB^TX + C^TC = 0 \qquad (۱.۱)$$

و در حالت گسسته - زمانی به شکل زیر می‌باشند

$$X = A^TXA - A^TXB(R + B^TXB)^{-1}B^TXA + C^TC \qquad (۲.۱)$$

در اینجا $A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$، $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$، $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ و $R = R^T > 0$ است. همچنین فرض می‌کنیم که ماتریس A یک ماتریس تنک وبزرگ و B و C دارای رتبه کامل باشند و$n \gg s$ و $n \gg p$.

معادلهٔ (۱.۱) برای مسألهٔ کنترلی بهینه درجه دوم خطی پیوسته زمانی زیر مطرح می‌شود

$$\text{Minimize} \quad J\,(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\infty}(y(t)^Ty(t) + u(t)^Tu(t))dt \qquad (۳.۱)$$

با قیدهای

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t), \quad x(\circ) = x_\circ$$

که در آن $x(t)$ بردار حالت n بعدی و $u(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار کنترل و $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی می‌باشد.

تحت شرایط: c - پایدار پذیر بودن جفت ماتریس (A, B) (یعنی یک ماتریس مانند K وجود دارد به طوری‌که مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند.) و c - آشکار شدنی بودن (C, A) (یعنی جفت ماتریس (A^T, C^T)، c - پایدار پذیر باشد.) تابعی $J(x, u)$ توسط $u(t) = -B^T X x(t)$ مینیمم می‌شود که در آن $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک جواب نیمه معین مثبت متقارن منحصر به فرد و c - پایدار پذیر (یعنی $\mathrm{Re}(\lambda(A - BB^T X) < \circ)$ از معادلهٔ (۱.۱) است [۲۸].

مسألهٔ درجه دوم (۳.۱) در حالت گسسته - زمانی برای مسأله بهینه درجه دوم خطی گسسته - زمانی به شکل زیر مطرح می‌شود

$$\text{Minimize} \quad J\ (x, u) = \frac{۱}{۲} \sum_{k=\circ}^{\infty} (y_k^T y_k + u_k^T R u_k)$$

با قیدهای

$$x_{k+۱} = Ax_k + Bu_k, \quad x(\circ) = x_\circ$$
$$y_k = Cx_k, \qquad k = \circ, ۱, ...,$$

که در آن $x(.)$ بردار حالت از بعد n و $u(.)$ بردار کنترل از $\mathbb{R}^p$ و $y(.)$ بردار خروجی دارای بعد s است.

تحت شرایط: d - پایدارپذیر بودن جفت ماتریس (A, B) (یعنی یک ماتریس مانند $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به طوری که مقادیر ویژهٔ ماتریس $A - BK$درون دایره واحد قرار داشته باشند.) و d - آشکار شدنی بودن (C, A) (یعنی (A^T, C^T) d - پایدار پذیر باشد.)، u_k توسط رابطهٔ زیر ارائه می‌شود

$$u_k = -(R + B^T X B)^{-۱} B^T X A x_k \quad k = \circ, ۱, ...,$$

که در آن $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک جواب نیمه معین مثبت متقارن منحصر به فرد و d - پایدار پذیر (یعنی مقادیر ویژهٔ $A-B(B^TXB+R)^{-1}B^TXA$ درون دایرهٔ واحد قرار دارند.) از معادلهٔ (۲.۱) است [۱۴ و ۱۸].

در این پایان نامه قصد داریم به بررسی روش‌های عددی مبتنی بر روش‌های تصویری بر روی زیر فضاهای کریلف و کریلف بلوکی برای حل معادلات ریکاتی جبری در حالت پیوسته (۱.۱) و گسسته (۲.۱) بپردازیم. در این فصل ابتدا برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز برای فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم. سپس روش شور را که یک روش مستقیم برای حل معادله ریکاتی جبری با ابعاد کوچک می‌باشد، را ارائه خواهیم داد. از این روش برای حل معادلات ریکاتی جبری حاصل از روش‌های تصویری که دارای ابعاد کوچک می‌باشند، در فصل‌های بعد استفاده خواهیم کرد. در پایان این فصل روش تکراری نیوتن را برای حل معادلات (۱.۱) و (۲.۱) ملاحظه خواهیم کرد.

۲.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۱. روش تصویری: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ و K و L دو زیر فضای m - بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشند. یک روش تصویری بر روی زیر فضای K و متعامد بر L یک فرآیندی است که یک جواب تقریبی x_1 را برای دستگاه خطی $Ax=b$ پیدا می‌کند به طوری که $x_1 \in K$ و $b - Ax_1 \perp L$.

تعریف ۲.۱. ضرب کرونکر: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشند، آن‌گاه ضرب کرونکر دو ماتریس A و B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \otimes B = [\ a_{i,j}B\ ] = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۱. ماتریس حقیقی $2n \times 2n$ ، $\mathcal{A}$ یک ماتریس هامیلتونی است هرگاه یک ماتریس $\mathcal{J}$ به صورت

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

وجود داشته باشد به طوری که

$$(\mathcal{J}\mathcal{A})^T = \mathcal{J}\mathcal{A}$$

تعریف ۱.۴. ماتریس $n\times n$ بعدی A، c - پایدار[۱] نامیده می‌شود هرگاه مقادیر ویژهٔ A در نیمه باز سمت چپ صفحهٔ مختلط قرار داشته باشند، یعنی اگر λ مقدار ویژهٔ ماتریس A به صورت $\lambda = a + ib$ باشد، آن‌گاه $a \in (-\infty, 0)$ و $b \in (-\infty, \infty)$. وماتریس $n \times n$ بعدی A را d - پایدار[۲] نامیم هرگاه $\rho(A) < 1$ که $\rho(A) = \max_{i=1}^{n} \mid \lambda_i(A)|$.

تعریف ۱.۵. جفت ماتریس (A, B)، c - پایدارپذیر[۳] نامیده می‌شود هرگاه یک ماتریس مانند $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به طوری که ماتریس $A - BK$، c - پایدار باشد.

تعریف ۱.۶. جفت ماتریس (A, B)، c - آشکار شدنی[۴] نامیده می‌شود هرگاه جفت ماتریس (B^T, A^T)، c - پایدارپذیر باشد.

تعریف ۱.۷. جفت ماتریس (A, B)، d - پایدارپذیر[۵] نامیده می‌شود هرگاه یک ماتریس مانند $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به طوری که ماتریس $A - BK$، d - پایدار باشد.

تعریف ۱.۸. جفت ماتریس (A, B)، d - آشکار شدنی[۶] نامیده می‌شود هرگاه جفت ماتریس (B^T, A^T)، d - پایدارپذیر باشد.

---

[۱] c- Stable

[۲] d - Stable

[۳] c - Stablizable

[۴] c - detectable

[۵] d - Stablizable

[۶] d - detectable

در این پایان نامه فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ از ماتریس‌های مستطیلی دارای بعد $n \times s$ را به $M_{n,s}$ نشان می‌دهیم. برای ماتریس‌های X و Y در $M_{n,s}$ ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$< X, Y >_F = \mathrm{tr}(X^T Y)$$

که در آن $\mathrm{tr}(Z)$ اثر ماتریس مربعی Z را نمایش می‌دهد. همچنین جداسازی بین دو ماتریس $A_۱$ و $A_۲$ با بعد $m \times m$ و بعد $p \times p$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{sep}_F(A_۱, A_۲) = \min_{\| X \|_F = ۱} \| A_۱ X - X A_۲ \|_F$$

تعریف ۹.۱. فرض کنید v یک بردار n بعدی باشد چند جمله‌ای مینیمال بردار v، چند جمله‌ای تکین مخالف صفر از پایین ترین درجه است به‌طوری که $P(A)v = ۰$. درجه این چند جمله‌ای درجه v نامیده می‌شود و به $\mathrm{grad}(v)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید v یک بردار n بعدی و A یک ماتریس $n \times n$ باشند. زیر فضای تولید شده به صورت زیر یک زیر فضای کریلف نامیده می‌شود

$$\mathcal{K}_k(A, v) = \mathrm{span}\ \{v, Av, ..., A^{k-۱}v\}.$$

توجه کنید که $Z \in \mathcal{K}_k(A, v)$ به این معنا می‌باشد که

$$Z = \sum_{i=۰}^{k-۱} \alpha_i A^i v, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \qquad i = ۰, ۱, ..., k-۱$$

قضیه ۱.۱. *زیر فضای کریلف $\mathcal{K}_m$ از بعد m است اگر و فقط اگر درجه μ بردار v نسبت به A بزرگتر یا مساوی m باشد، یعنی*

$$\dim(\mathcal{K}_m) = m \Longleftrightarrow \mathrm{grad}(v) \geq m.$$

اثبات. مرجع [۲۳] ملاحظه شود.

قضیه ۲.۱. *فرض کنید P جواب معادله غیر خطی $PL_۱ - L_۲P = G - PHP$ باشد که در آن $L_۱$، $L_۲$، G، H و P ماتریس‌های $n \times n$ بعدی هستند. فرض کنید $\| G \| = \gamma$ و $\| H \| = \eta$. در این‌صورت اگر $\sigma(L_۱) \cap \sigma(L_۲) = \emptyset$ (که $\sigma(X)$ نشان دهنده طیف ماتریس X است.) و $\frac{\eta\gamma}{\delta^۲} < \frac{۱}{۴}$ که در آن*

$$\delta = \mathrm{sep}(L_۱, L_۲)$$

آن‌گاه داریم

$$\| P \| \leq \frac{۲\gamma}{\delta + \sqrt{\delta^{۲} - ۴\gamma\eta}} < ۲\frac{\gamma}{\delta}.$$

اثبات. قضیه ۲.۱ از فصل ۵ مرجع [۲۵] ملاحظه شود.

تعریف ۱۱.۱. (شکل شور حقیقی)[۷] فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آن‌گاه یک ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارد به طوری‌که

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_{۱۱} & R_{۱۲} & \dots & R_{۱m} \\ ۰ & R_{۲۲} & \dots & R_{۲m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & R_{mm} \end{bmatrix}$$

که در آن هر R_{ii} یک ماتریس ۱ × ۱ یا ۲ × ۲ شامل مقادیر ویژهٔ مختلط مزدوج است.

در ادامه روش شور[۸] را برای حل معادلات ریکاتی جبری ارائه می‌دهیم.

۳.۱ روش شور

۱.۳.۱ روش شور برای حل $CARE$

برای حل معادلهٔ (۱.۱) قرار می‌دهیم $G = BB^T$ و $H = C^T C$، در این صورت خواهیم داشت

$$A^T X + XA - XGX + H = ۰ \qquad (۴.۱)$$

که در آن همهٔ ماتریس‌ها در $\mathbb{R}^{n\times n}$ هستند. H و G ماتریس‌های نیمه معین مثبت و متقارن هستند.

فرض می‌کنیم که جفت ماتریس (A, B)، c - پایدار پذیر باشد وجفت ماتریس (C, A)، c - آشکار شدنی باشد. تحت این فرض‌ها (۴.۱) یک جواب نیمه معین مثبت منحصر به فرد دارد [۲۶]. البته

[۷] Real Schur Form

[۸] Schur method

جواب‌های زیاد دیگری نیز برای (۴.۱) وجود دارد ولیکن روش زیر جواب نیمه معین مثبت را محاسبه می‌کند.

حال ماتریس هامیلتونی زیر را در نظر می‌گیریم

$$Z = \begin{bmatrix} A & -G \\ -H & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۲n\times ۲n}$$

تحت فرض‌های فوق ماتریس Z مقدار ویژه موهومی محض ندارد [۲۸]. بنابراین می‌توانیم یک ماتریس تبدیل یکا متعامد مانند $U \in \mathbb{R}^{۲n\times ۲n}$ را بیابیم به‌طوری که

$$U^T Z U = S = \begin{bmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ ۰ & S_{۲۲} \end{bmatrix}$$

شکل شور حقیقی (RSF) ماتریس Z باشد و $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. بعلاوه می‌توان ماتریس S را طوری مرتب کرد که قسمت‌های حقیقی طیف $S_{۱۱}$ منفی باشند و قسمت‌های حقیقی طیف $S_{۲۲}$ مثبت باشند. متناسب با آن می توان U رابه صورت چهار بلوک $n \times n$ زیر افراز کرد

$$U = \begin{bmatrix} U_{۱۱} & U_{۱۲} \\ U_{۲۱} & U_{۲۲} \end{bmatrix}$$

و سپس قضیه زیر را داریم

قضیه ۳.۱. *تحت نمادگذاری و فرض‌های فوق داریم*

۱. *$U_{۱۱}$ معکوس پذیر است و $X = U_{۲۱}U_{۱۱}^{-۱}$ جواب معادلهٔ (۴.۱) است.*

۲. $\sigma(S_{۱۱}) = \sigma(A - GX)$.

۳. $X = X^T$.

۴. *X نیمه معین مثبت است.*

اثبات. مرجع [۱۹] ملاحظه شود.

با توجه به قضیه ۱.۳، $X = U_{۲۱}U_{۱۱}^{-۱}$ یک جواب نیمه معین مثبت متقارن از (۱.۱) است. همچنین باتوجه به قضیه ملاحظه می‌کنیم $\sigma(S_{۱۱}) = \sigma(A - GX)$.

۲.۳.۱ روش شور برای حل $DARE$

در حالت گسسته - زمانی با قرار دادن $H = C^TC$ معادله ریکاتی جبری (۲.۱) به صورت زیر در می‌آید

$$X = A^TXA - A^TXB(R + B^TXB)^{-۱}B^TXA + H \tag{۵.۱}$$

فرض می‌کنیم که جفت ماتریس (A, B)، d - پایدارپذیر و جفت ماتریس (C, A)، d - آشکار شدنی باشد همچنین A معکوس پذیر باشد. تحت این فرض‌ها (۵.۱) یک جواب نیمه معین مثبت منحصر به فرد دارد [۹ و ۱۸].

با قراردادن $G = BR^{-۱}B^T$ ماتریس Z را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$Z = \begin{bmatrix} A + GA^{-T}H & -GA^{-T} \\ -A^{-T}H & -A^T \end{bmatrix}$$

در این صورت با فرض‌های فوق مقادیر ویژهٔ ماتریس Z روی دایره واحد قرار نمی گیرند [۱۴ و ۱۸] و می‌توانیم یک ماتریس یکا متعامد مانند $U \in \mathbb{R}^{۲n\times ۲n}$ را بیابیم به‌طوری که

$$U^TZU = S = \begin{bmatrix} S_{۱۱} & S_{۱۲} \\ ۰ & S_{۲۲} \end{bmatrix}$$

شکل شور حقیقی (RSF) ماتریس Z باشد و $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. بعلاوه می‌توان ماتریس S را طوری مرتب کرد که طیف ماتریس $S_{۱۱}$ درون دایره واحد وطیف ماتریس $S_{۲۲}$ بیرون دایره واحد قرار گیرد و مجدداً U را متناسب با آن افراز کرد. قضیه زیر را داریم

قضیه ۴.۱. *تحت شرایط و فرض‌های فوق داریم*

۱ . $U_{۱۱}$ *معکوس پذیر است و* $X = U_{۲۱}U_{۱۱}^{-۱}$ *جواب معادله* (۲.۱) *است.*

۲ . $\sigma(S_{۱۱}) = \sigma(A - B(R + B^T XB)^{-۱} B^T XA)$

۳ . $X = X^T$.

۴ . X *نیمه معین مثبت است.*

اثبات. مرجع [۱۹] ملاحظه شود.

با توجه به قضیه ۴.۱، $X = U_{۲۱}U_{۱۱}^{-۱}$ معادله (۲.۱) را حل می‌کند و یک جواب نیمه معین مثبت متقارن است.

۴.۱ روش نیوتن

در این بخش قصد داریم روش نیوتن را برای حل معادله ریکاتی جبری ارائه دهیم.

۱.۴.۱ روش نیوتن برای $CARE$

معادله (۱.۱) یک معادله ماتریسی درجه دوم برای ماتریس نامعلوم X است که می‌توان روش نیوتن را برای آن به کاربرد. فرض می‌کنیم که جفت ماتریس (A, B)، c - پایدار پذیر باشد و جفت ماتریس (C, A)، c - آشکار شدنی باشد تحت این فرض‌ها (۱.۱) جواب c - پایدارپذیر نیمه معین مثبت متقارن منحصربه فرد دارد [۸]. فرض کنید $X_۰$ یک حدس اولیه متقارن برای X باشد. در این صورت خطای $P = X - X_۰$ نیز یک معادله $CARE$ از همان نوع است.

قضیه ۵.۱. *فرض کنید* X *یک جواب متقارن از* (۱.۱) *باشد و فرض کنید* $X_۰ \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *یک تقریب متقارن از* X (۱.۱) *باشد. آن‌گاه* $P = X - X_۰$ *در معادله* $CARE$ *زیر صدق می‌کند.*

$$R(X_۰) + P\widehat{A} + \widehat{A}^T P - P^T BB^T P = ۰. \qquad (۶.۱)$$

که در آن $\widehat{A} = A - BB^T X_۰$ *و* $R(X_۰) = X_۰A + A^T X_۰ - X_۰BB^T X_۰ + C^T C$.

اثبات. مرجع [۲۱] ملاحظه شود.

فرض کنید X_0 یک تقریب نزدیک به X باشد بنابراین P کوچک است. پس با صرف نظر کردن از عبارت درجه دوم در P به دست می‌آوریم $R(X_0) + P\widehat{A} + \widehat{A}^T P \approx 0$. فرض کنید که جواب متقارن $\widehat{P}$ معادله $R(X_0) + \widehat{P}\widehat{A} + \widehat{A}^T \widehat{P} = 0$ یک تقریب خوب برای P باشد به طوری که تقریب به‌هنگام شده $X_1 = X_0 + \widehat{P}$ به X بیشتر از X_0 نزدیک باشد. در نتیجه برای X_1 خطای $\widehat{P} = X - X_1$ کوچکتر از خطای P خواهد بود و می‌توانیم این فرآیند را با X_1 بجای X_0 تکرار کنیم. این ایده روش نیوتن برای حل معادله ریکاتی جبری پیوسته - زمانی است که در الگوریتم زیر خلاصه شده است.

Algorithm 1.1. Newton Method for the CARE.

---

1. Input: Matrices A, B, C and a symmetric guess $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
2. Approximation to a symmetric solution X of (1.1)

   For $k = 0, 1, 2, ...$ until stopping criterion staisfied

   Set $R_k := R(X_k) = X_k A + A^T X_K - X_k BB^T X_k + C^T C$,

   $A_k := A - BB^T X_k$

   Solve for P_k in the equation:

   $R_k + P_k A_k + A_k^T P = 0.$

   Update $X_{k+1} := X_k + P_k$

   End For.

در [۱۷] نشان داده شده است که اگر X_0 طوری انتخاب شود که $A - BB^T X_0$، c - پایدار پذیر باشد آن‌گاه تکرار به جواب مطلوب c - پایدار پذیر X از (۱.۱) همگرا می‌شود و همگرایی درجه دوم است. در هر گام مقادیر ویژه $A - BB^T X_k$ دارای قسمت حقیقی منفی می‌باشند و بعد از اولین گام همگرایی یکنوا است [۱۷].

در گام دوم الگوریتم فوق معادله $R_k + P_k A_k + A_k^T P = 0$ یک معادله لیاپانوف است. یک روش برای حل این معادله در فصل ۳ ارائه شده است.

۲.۴.۱ روش نیوتن برای $DARE$

در این بخش قصد داریم با استفاده از روش نیوتن جوابی برای معادله (۲.۱) به دست آوریم. فرض کنید که جفت ماتریس (A, B)، d - پایدارپذیر و جفت ماتریس (C, A)، d - آشکار شدنی باشد همچنین

A معکوس پذیر باشد. تحت این فرض‌ها (۲.۱) طبق قضیه ۴.۱ یک جواب نیمه معین مثبت منحصر به فرد متقارن d - پایدار پذیر دارد [۹].

فرض کنید $X_\circ$ یک حدس اولیه متقارن برای X باشد. در این صورت بر طبق قضیه زیر خطای $P = X - X_\circ$ نیز یک جواب یک معادله $DARE$ است.

قضیه ۶.۱. *فرض کنید X یک جواب متقارن از (۲.۱) باشد و فرض کنید $X_\circ \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک تقریب متقارن از X (۲.۱) باشد. اگر $\widehat{R} = B^TPB + R$ و $I + PB\widehat{R}^{-1}B^T$ متعامد نباشند. آن‌گاه $P = X - X_\circ$ در معادله $DARE$ زیر صدق می‌کند.*

$$R(X_\circ) + \widehat{A}P\widehat{A}^T - P + \widehat{A}PB(B^TPB + \widehat{R})^{-1}B^TP\widehat{A} = \circ. \tag{۷.۱}$$

که در آن $\widehat{A} = A(I - B\widehat{R}^{-1}B^TX_\circ)$ و $R(X_\circ) = A^TX_\circ A - A^TX_\circ B(B^TX_\circ B + R)^{-1}B^TX_\circ A + C^TC - X_\circ$.

اثبات. قضیه ۲ از فصل ۷ مرجع [۲۱] ملاحظه شود.

مشابه حالت پیوسته - زمانی فرض کنید $X_\circ$ یک تقریب نزدیک به X باشد بنابراین P کوچک است. پس می‌توان از عبارت درجه دوم در P صرف نظر کرد و به دست آوریم $R(X_\circ) + \widehat{A}P\widehat{A}^T - P \approx \circ$. فرض کنید که جواب متقارن $\widehat{P}$ معادله لیاپانوف گسسته - زمانی $R(X_\circ) + \widehat{A}\widehat{P}\widehat{A}^T - \widehat{P} = \circ$ یک تقریب مناسب برای P باشد به طوری که تقریب به‌هنگام شده $X_۱ = X_\circ + \widehat{P}$ به X بیشتر از $X_\circ$ نزدیک باشد. در نتیجه برای $X_۱$ خطای $\widehat{P} = X - X_۱$ کوچکتر از خطای P خواهد بود و می‌توان فرآیند را با تکرار $X_۱$ به‌جای $X_\circ$ ادامه داد. الگوریتم نیوتن برای حل معادله $DARE$ به صورت زیر توصیف شده است.

Algorithm 1.2. Newton Method for the DARE.

---

1. Input: Matrices A, B, C and a symmetric guess $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
2. Approximation to a symmetric solution X of (2.1)
   For $k = 0, 1, 2, ...$ until stopping criterion staisfied
      Set $R_k := R(X_k) = A^TX_kA - A^TX_kB(B^TX_kB + R)^{-1}B^TX_kA + C^TC - X_k$,
         $A_k := A - B(B^TX_kB + R)^{-1}B^TX_kA$
      Solve for P_k in the equation:
         $A_k^TP_kA_k - P + R_k = 0.$

Update $X_{k+1} := X_k + P_k$
End For.

تذکر ۱.۱. *یک روش حل برای معادله لیاپانوف گسسته - زمانی* $R(X_0) + \widehat{A}P\widehat{A}^T - P = 0$ *در فصل ۳ ارائه شده است.*

اگر X_0 یک حدس اولیه d - پایدار پذیر برای(۲.۱) باشد آن‌گاه تکرارها به جواب مطلوب d - پایدار پذیر X از (۲.۱) همگرا می‌شود و همگرایی درجه دوم است [۱۸].

فصل ۲

الگوریتم آرنولدی

در این فصل ابتدا فرآیند آرنولدی جامع و آرنولدی اصلاح شده را معرفی می‌کنیم، سپس جواب‌های تقریبی با رتبه پایین برای معادلات ریکاتی جبری پیوسته - زمانی و گسسته - زمانی با استفاده از فرآیند آرنولدی اصلاح شده ارائه می‌دهیم.

۱.۲ فرآیند آرنولدی جامع

فرض کنید V یک ماتریس مستطیلی $n \times s$ باشد یادآوری می‌کنیم که چند جمله‌ای مینیمال A برای V، $V \in M_{n,s}$، چند جمله‌ای تکین مخالف صفر از پایین ترین درجه است به‌طوری که $P(A)V = ۰$. درجه این چند جمله‌ای درجه V نامیده می‌شود و به $\mathrm{grad(V)}$ نمایش داده می‌شود.

الگوریتم آرنولدی جامع یک پایه F - یکا متعامد، $V_۱$، $V_۲$، . . . ، V_m (یعنی $\mathrm{tr(V_i^TV_j)} = ۰$ برای $i \neq j$، $i, j = ۱, ۲, ..., m$ و $\mathrm{tr(V_i^TV_i)} = ۱$ برای $i = ۱, ۲, ..., m$) از زیر فضای کریلف $\mathcal{K}_m(A, V) = \mathrm{span}\{V, AV, ..., A^{m-۱}V\}$ را می‌سازد. الگوریتم به صورت زیر است.

Algorithm 2.1. Global Arnoldi Algorithm.

1. Choose an $n \times s$ matrix V_1 such that $\| V_1 \|_F = 1$.
2. For $j = 1, ..., m$