1

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

مطالعه ایده‌آلهای اول وابسته توانهای ایده‌آلهای یالی در گرافها

استاد راهنما
دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور
دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر
فضه رضائی

شهریور ۱۳۹۱
تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

دو محراب دلم

پدر عزیز و مادر مهربانم

و ستاره ی غروب کرده

خواهر آسمانی ام

نیایش...

ای خدا، ای رازدار بندگان شرمگینت
ای توانایی که بر جان و جهان فرمانروایی
ای خدا، ای همنوای ناله ی پروردگانت
زین جهان تنها تو با سوز دل من آشنایی

بر تن آلوده منگر، روح پاکم را نظر کن
دوست دارم تا کنم در پیشگاهت بندگی ها
من به تو رو کرده ام، بر آستانت سر نهادم
دوست دارم بندگی را با همه شرمندگی ها

مهربانا! با دلی بشکسته رو سوی تو کردم
رو کجا آرم اگر از درگهت گویی جوابم ؟
بی کسم، در سایه ی مهر تو می جویم پناهی
از کجا یابم خدایی گر به کویت ره نیابم ؟

سپاس گزاری...

سپاس خدایی را که جهان را آفرید و آدمیان را به سلاح علم مسلح ساخت و در پس آن، معرفت را وسیله ی شناخت خود قرار داد.

با سپاس بیکران بر همدلی و همراهی خانواده ی عزیزم که سجده ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارشان لحظه های مهربانی را به من آموخت.

بدون شک جایگاه و منزلت استاد، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته و بزرگوارم جناب آقای دکتر جعفر امجدی که علاوه بر علم و دانش، به من درس منش و زندگی آموختند و صبورانه و باسخاوت در این مسیر مرا راهنمایی کردند، تقدیر و تشکر نموده و برای ایشان سلامتی و موفقیت روزافزون آرزومندم. همچنین از استاد فرزانه، جناب آقای دکتر سیّد محمود شیخ الاسلامی به پاس راهنمایی هایشان سپاسگزارم و از سرکار خانم دکتر رعنا خوئیلر که زحمت داوری پایان نامه ام را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فضه رضائی

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

در حلقه نوتری و جابجایی R، ایده‌آل I را به طور نرمال آزاد از تاب گوییم هرگاه به ازای هر $t \geq 1$، $\mathrm{Ass}(R/I^t) = \mathrm{Ass}(R/I)$. در این پایان نامه یک روش بازگشتی برای مطالعه ایده‌آلهای تک جمله‌ای آزاد از مربع به طور نرمال آزاد از تاب، ارائه می‌دهیم و با استفاده از آن نشان می‌دهیم که اگر I یک ایده‌آل تک جمله‌ای آزاد از مربع باشد که به طور مینیمال آزاد از تاب نیست آنگاه کوچکترین توان آن، که دارای ایده‌آل اول محاطی است از $\beta_1(\mathcal{H})$ بزرگتر خواهد بود که در آن $\mathcal{H}$ ابرگراف وابسته به ایده‌آل I و $\beta_1(\mathcal{H})$ عدد جورسازی آن می‌باشد. بعلاوه نشان داده می‌شود اگر I در خاصیت بسته‌بندی صدق نکند آنگاه به ازای $t = \beta_1 + 1$، I^t دارای ایده‌آل اول محاطی است. در نهایت ثابت می‌شود اگر I ایده‌آل یالی یک گراف باشد آنگاه مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به توانهای I، یک زنجیر صعودی می‌باشند.

کلمات کلیدی: اول وابسته، ایده‌آل به طور نرمال آزاد از تاب، ایده‌آل یالی، جورسازی کامل.

پیشگفتار

برادمن[1] در [۳] نشان داده است که مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته توانهای یک ایده‌آل دلخواه، یعنی $\mathrm{Ass}(R/I^t)$ برای مقادیر به قدر کافی بزرگ t ایستا می‌باشند. همچنین چن [2]و موری[3] در [۴] ، کرانهای پایینی برای ایستایی مجموعه‌های فوق ارائه کرده‌اند. علاوه بر این مطالعات زیادی در مورد اینکه کدام ایده‌آلهای اول محاطی در مجموعه‌های ایستا واقع می‌شوند، صورت گرفته است. رجوع کنید به [۴] ، [۹] و [۱۰] .

می‌دانیم که برای یک ایده‌آل تک جمله‌ای آزاد از مربع I، $\mathrm{Ass}(R/I) = \mathrm{Min}(I)$. درصورتیکه توانهای یک ایده‌آل تک جمله‌ای آزاد از مربع دارای ایده‌آلهای اول محاطی هستند. دراین پایان نامه به بررسی ایده‌آلهای اول محاطی و توانهای ایده‌آلهای تک جمله‌ای آزاد از مربع می‌پردازیم. همچنین بررسی می‌کنیم که چگونه ایده‌آل همگن ماکسیمال بعنوان ایده‌آل اول وابسته توانهای یک ایده‌آل مطرح می‌شود. چون برای اثبات مسائل مطرح شده پیرامون $\mathrm{Ass}(R/I^t)$ از خواص گرافها استفاده می‌شود، لذا این امر نشان‌دهنده اهمیت بکارگیری تکنیکها و روشهای بکار رفته در دو شاخه جبر جابجایی و جبر ترکیبیاتی می‌باشد.

ویلاریل[4] و همکارانش در [۲۳] نشان داده‌اند که یک گراف دو بخشی است اگر وفقط اگر

[1] Brodmann
[2] Chen
[3] Morey
[4] Villarreal

ایده‌آل یالی مربوط به آن، به طور نرمال آزاد از تاب باشد، به عبارت دیگر، توانهای آن ایده‌آل، دارای ایده‌آل اول محاطی نباشند. همچنین آنها نشان داده‌اند که توانهای ایده‌آل یالی وابسته به گرافهای شامل دور فرد، دارای ایده‌آلهای اول محاطی می‌باشند.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه که در فصلهای بعدی به آنها نیازمندیم، بیان می‌شوند. در فصل دوم ایده‌آلهای اول محاطی توانهای یک ایده‌آل را مورد بررسی قرار داده و ضمن تعریف قطبی‌سازی، با استفاده از مفاهیم مربوط به آن، یک تناظر یک به یک بین ایده‌آلهای اول وابسته توانهای یک ایده‌آل و ایده‌آلهای اول وابسته قطبی شده آن توانها، بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی، ایده‌آل همگن ماکسیمال، یک ایده‌آل اول وابسته است.

این پایان نامه بر اساس مقاله‌های [۱۲] و [۱۶] تنظیم شده است.

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

۱.۱ جبر جابجایی

در این فصل مفاهیم و تعاریف اولیه بکار رفته در فصل‌های آتی را بیان می‌کنیم. در سراسر این پایان نامه تمام حلقه‌ها یکدار و جابجایی هستند.

تعریف ۱.۱. فرض کنید I و J ایده‌آلهایی از حلقه R باشند. حاصل تقسیم یا خارج قسمت $(I :_R J)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(I :_R J) = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\}.$$

تعریف ۲.۱. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از حلقه R را ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل I می‌نامند هرگاه $I \subseteq \mathfrak{p}$ و ایده‌آل اولی مانند $\mathfrak{p}'$ از R موجود نباشد بطوریکه $I \subseteq \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. اگر R ناصفر باشد ایده‌آلهای اول مینیمال ایده‌آل صفر حلقه R را ایده‌آلهای اول مینیمال حلقه R می‌نامند. مجموعه تمام ایده‌آلهای اول مینیمال ایده‌آل I را با نماد $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید R یک حلقه و Q یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. ایده‌آل Q را ایده‌آل اولیه حلقه R می‌نامند هرگاه به ازای عناصر $a, b \in R$ اگر $ab \in Q$ آنگاه $a \in Q$ یا به ازای n ای از $\mathbb{N}$، $b^n \in Q$. اگر Q ایده‌آل اولیه R باشد آنگاه $\mathfrak{p} := \sqrt{Q}$ ایده‌آل اول R است که در این‌صورت Q را ایده‌آل $\mathfrak{p}-$ اولیه R گویند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. ایده‌آل I از حلقه R، دارای تجزیه اولیه است هرگاه بتوان آنرا به‌صورت اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آلهای $\mathfrak{p}_i-$ اولیه مانند $I = Q_۱ \cap \ldots \cap Q_n$ نوشت. این تجزیه را مینیمال گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\sqrt{Q_۱}, \ldots, \sqrt{Q_n}$ ایده‌آلهای اول متمایز در R باشند؛

۲) به ازای $j = ۱, \ldots, n$ ، $\bigcap_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{n} Q_i \nsubseteq Q_j$.

تذکر ۵.۱. *مجموعه $\{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ متشکل از ایده‌آلهای اول بدست آمده از تجزیه مینیمال ایده‌آل I، مستقل از تجزیه I است.*

تعریف ۶.۱. فرض‌کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه R بوده و به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}$ و $I = \bigcap_{i=۱}^{n} Q_i$، تجزیه اولیه مینیمال I باشد. در این‌صورت مجموعه $\{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ را مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به I نامیده و آنرا با نماد $\operatorname{ass} I$ یا $\operatorname{ass}_R I$ نمایش می‌دهند. عضوهای $\operatorname{ass} I$ را ایده‌آلهای اول وابسته به I می‌نامند.

قضیه ۷.۱. *فرض‌کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیری از حلقه R بوده و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. در این‌صورت $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول مینیمال I است اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}$ عضوی مینیمال در مجموعه $\operatorname{ass} I$ باشد. بنابراین*

تمام ایده‌آلهای اول مینیمال I به مجموعه $\mathrm{ass}I$ تعلق دارد. لذا تعداد ایده‌آلهای اول مینیمال I متناهی بوده و $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{ass}I$.

برهان. به مرجع [۲۲] قضیه ۲۴.۴ مراجعه شود. □

اصطلاحات ۸.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل از حلقه R باشد. اگر I ایده‌آلی تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه طبق قضیه ۷.۱ ، مجموعه $\mathrm{ass}I$ دارای دو نوع ایده‌آل اول است. یک نوع از این ایده‌آلها عناصر مینیمال مجموعه $\mathrm{ass}I$ هستند که همان ایده‌آلهای اول مینیمال I می‌باشند و آنها را ایده‌آلهای اول منفرد [۱] ایده‌آل I می‌نامند. سایر ایده‌آلهای مجموعه $\mathrm{ass}I$ را ایده‌آلهای اول محاطی [۲] I می‌نامند.*

قضیه ۹.۱. *در حلقه‌های نوتری همه ایده‌آلهای واقعی تجزیه‌پذیر هستند.*

برهان. به مرجع [۱] گزاره ۱۱.۷ مراجعه شود. □

گزاره ۱۰.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل سره از R باشد. هر ایده‌آل اول وابسته به I مانند $\mathfrak{p}$ را می‌توان به‌صورت $\mathfrak{p} = (I :_R a)$ نوشت که در آن $a \in R - \{0\}$.*

برهان. به مرجع [۱] گزاره ۱۷.۷ مراجعه شود. □

قضیه ۱۱.۱. *فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل سره از R باشد و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. در این‌صورت $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}I$ اگر و فقط اگر $a \in R$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = (I :_R a)$ ؛*

[۱] Isolated prime ideals
[۲] Embedded prime ideals

به عبارت دیگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}I$ اگر و فقط اگر عضوی مانند $b+I \in \dfrac{R}{I}$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = (\circ :_R b+I)$.

برهان. به مرجع [۲۲] قضیه ۲۲.۸ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه نوتری R بوده و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته به M گویند هرگاه عنصر غیر صفری مانند m از M موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = (\circ :_R m)$. مجموعه ایده‌آلهای اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهند.

لم ۱۳.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری ، M یک $R-$ مدول و N زیر مدولی از آن باشد. در این‌صورت* $\mathrm{Ass}_R(N) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$.

برهان. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(N)$ در این‌صورت عضو ناصفری مانند n از N موجود است بطوریکه $\mathfrak{p} = (\circ :_R n)$ و چون $N \subseteq M$ بنابراین $n \in M$ و $\mathfrak{p} = (\circ :_R n)$؛ در نتیجه $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$. $\square$

تذکر ۱۴.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه نوتری R باشد. در این‌صورت طبق قضیه ۱۱.۱ $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}I$ اگر و فقط اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\dfrac{R}{I})$. علاوه براین به ازای عدد صحیح مثبت n، اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\dfrac{R}{I^n})$ آنگاه عضو ناصفری مانند a از R موجود است بطوریکه $\mathfrak{p} = (I^n : a)$ که در آن* $a \notin I^n$.

تذکر ۱۵.۱. *فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. چون* $\dfrac{I^{n-1}}{I^n} \subseteq \dfrac{R}{I_n}$ پس

$$\mathrm{Ass}_R(\frac{I^{n-1}}{I^n}) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I_n}).$$

تعریف ۱۶.۱. فرض‌کنید R یک حلقه و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ و $S = R - \mathfrak{p}$ زیرمجموعه بسته ضربی ازحلقه R باشد. حلقه کسرهای $S^{-1}R$، $R_\mathfrak{p}$ ، را حلقه حاصل از موضعی‌سازی R در $\mathfrak{p}$ می‌نامند. $R_\mathfrak{p}$ یک حلقه موضعی است و $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ تنها ایده‌آل ماکسیمال آن است.

لم ۱۷.۱. *فرض‌کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R بوده و $f : R \to S^{-1}R$ نشان دهنده همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. گیرید I ایده‌آلی از R باشد. در این‌صورت*

$$I^e = \{\lambda \in S^{-1}R \ : \ \lambda = \frac{a}{s}, \quad a \in I, s \in S\}$$

که آنرا با نمادهای $IS^{-1}R$ و $S^{-1}I$ نیز نشان می‌دهند. همچنین اگر J ایده‌آلی از $S^{-1}R$ باشد، $f^{-1}(J)$ ایده‌آلی از R است که آن را با نماد J^c نمایش می‌دهند.

برهان. به مرجع [۲۲] لم ۲۵.۵ مراجعه شود. □

لم ۱۸.۱. *فرض‌کنید M مدولی روی حلقه نوتری R بوده و S زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد، در این‌صورت*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathfrak{p}S^{-1}R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)\}.$$

برهان. به مرجع [۲۲] لم ۳۸.۹ مراجعه شود . □

نتیجه ۱۹.۱. *فرض‌کنید M مدولی روی حلقه R بوده و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول از آن باشد. دراین صورت $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ اگر و فقط اگر $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$.*

برهان. به مرجع [۱۷] قضیه ۶.۲ مراجعه شود. $\square$

لم ۲۰.۱. *فرض‌کنید Q ایده‌آل اولیه از حلقه R باشد بطوریکه $Q \cap S = \emptyset$. در این‌صورت $Q^{ec} = Q$.*

برهان. به مرجع [۲۲] لم ۲۹.۵ مراجعه شود. $\square$

لم ۲۱.۱. *فرض‌کنید L زیر مدولی از مدول M از حلقه R باشد. همچنین فرض‌کنید I ایده‌آلی متناهی مولد و S زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. در این‌صورت*

$$S^{-1}(L :_M I) = (S^{-1}L :_{S^{-1}M} S^{-1}I).$$

برهان. به ۱۳.۹ از مرجع [۲۲] مراجعه شود. $\square$

لم ۲۲.۱. *فرض‌کنید R حلقه نوتری و*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

یک دنباله دقیق کوتاه از $R-$ مدولها و $R-$ همریختیها باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}(L) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(L) \cup \mathrm{Ass}(N).$$

برهان. به ۴۲.۹ از مرجع [۲۲] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۲۳.۱. فرض‌کنید I ایده‌آل تجزیه‌پذیر از حلقه R باشد. ایده‌آل I را به طور نرمال آزاد از تاب می‌نامند هرگاه برای هر $n \geq 1$

$$\mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I^n}) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I})$$

یا به عبارت دیگر $\mathrm{Ass}_R(I^n) \subseteq \mathrm{Ass}_R(I)$.

لم ۲۴.۱. *فرض‌کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در این‌صورت به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، داریم:*

$$\mathrm{Min}(I^n) = \mathrm{Min}(I).$$

برهان. بسادگی از تعریف نتیجه می‌شود. □

لم ۲۵.۱. *فرض‌کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد. در این‌صورت برای هر $n \geq ۱$*

$$\mathrm{Min}(\frac{R}{I}) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I^n}).$$

برهان. طبق قضیه ۷.۱ ، $\mathrm{Min}(I^n) \subseteq \mathrm{Ass}(I^n)$. بنابراین $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}(I^n)$، حال با توجه به تذکر ۱۴.۱ نتیجه می‌شود که $\mathrm{Min}(\frac{R}{I}) \subseteq \mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I^n})$. □

لم ۲۶.۱. *ایده‌آل I از حلقه R به طور نرمال آزاد از تاب است اگر و فقط اگر به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از $\mathrm{Spec}(R)$ ، ایده‌آل $I_\mathfrak{p}$ به طور نرمال آزاد از تاب باشد.*

برهان. فرض‌کنید I به طور نرمال آزاد از تاب باشد. ثابت می‌کنیم $\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\frac{R_\mathfrak{p}}{I_\mathfrak{p}^n}) \subseteq \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\frac{R_\mathfrak{p}}{I_\mathfrak{p}})$. فرض‌کنید $Q \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\frac{R_\mathfrak{p}}{I_\mathfrak{p}^n})$. در نتیجه با توجه به لم ۱۸.۱ و نتیجه ۱۹.۱، یک $\mathfrak{p}$ در $\mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I^n})$ موجود است که $Q = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. از طرفی چون I به طور نرمال آزاد از تاب است بنابراین $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\frac{R}{I})$. لذا با توجه به نتیجه ۱۹.۱ ، $Q \in \mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\frac{R_\mathfrak{p}}{I_\mathfrak{p}})$. پس $I_\mathfrak{p}$ به طور

نرمال آزاد از تاب است. به طور مشابه ثابت می‌شود ایده‌آل I هم به طور نرمال آزاد از تاب است. $\square$

تعریف ۲۷.۱. حلقه R را یک حلقه مدرج می‌نامند هرگاه به ازای خانواده‌ای از زیرگروههای جمعی R مانند $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ داشته باشیم:

۱) $R=\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$؛

۲) به ازای هر دو عدد صحیح m و n ، $R_mR_n\subseteq R_{n+m}$.

تذکر ۲۸.۱. *اگر برای هر $n<\circ$ داشته باشیم $R_n=\circ$ ، آنگاه حلقه R را حلقه مدرج غیر منفی می‌نامیم.*

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید $R=\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ یک حلقه مدرج باشد. عنصر r از حلقه R را یک عنصر همگن از درجه n گویند هرگاه $r\in R_n$. ایده‌آل I را یک ایده‌آل همگن گویند هرگاه توسط مجموعه‌ای از عناصر همگن تولید شود.

تعریف ۳۰.۱. فرض‌کنید R یک حلقه و $x_۱,\ldots,x_n$ متغیرهای مستقل روی حلقه R بوده و $m=(m_۱,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}_\circ^n$ و $x^m=x_۱^{m_۱}\ldots x_n^{m_n}$. در این‌صورت حلقه چندجمله‌ایهای $S=R[x_۱,\ldots,x_n]$ یک حلقه مدرج است و $S_\circ=R$ و برای هر $i\geq ۱$ ، x_i ها از درجه یک می‌باشند.

تذکر ۳۱.۱. *فرض کنید* k *یک میدان و* $R = \mathrm{k}\,[x_1, \ldots, x_n]$ *حلقه چندجمله‌ایها روی میدان* k *با* n *متغیر مستقل باشد. با توجه به اینکه* k *میدان است پس* (0) *تنها ایده‌آل ماکسیمال آن می‌باشد، در نتیجه* $(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \oplus (0)$ *تنها ایده‌آل ماکسیمال همگن حلقه* R *است.*

تعریف ۳۲.۱. فرض‌کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول حلقه R باشد. ارتفاع $\mathfrak{p}$ را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعه طول زنجیرهای $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ از ایده‌آلهای اول R، تعریف می‌کنیم که در آن $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$؛ به شرطی که این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد. در غیر این‌صورت آن را ∞ در نظر می‌گیریم. ارتفاع $\mathfrak{p}$ را با $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۱. فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و I ایده‌آل واقعی از آن باشد. ارتفاع ایده‌آل I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)\} = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(I)\}.$$

تعریف ۳۴.۱. فرض‌کنید M مدولی روی حلقه جابجایی R باشد. $r(\neq 0) \in R$ را یک مقسوم علیه صفر روی M می‌نامند اگر $m \in M$ای موجود باشد که $m \neq 0$ و $rm = 0$. مجموعه همه مقسوم علیه‌های صفر روی M را با نماد $\mathrm{Zd}_R(M)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۵.۱. فرض‌کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول غیر صفر متناهی مولد باشد. عناصر $a_1, \ldots, a_n$ از حلقه R را یک M -رشته (M-رشته منظم) می‌نامند هرگاه