دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد
ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

روش تقریب چسبندگی برای یک خانواده متناهی از نگاشت های غیر انبساطی فضاهای باناخ

استاد راهنما
دکتر سید منصور واعظ پور

استاد مشاور
دکتر عبدالحمید ریاضی

نگارش

سعیده خانعلی

بهمن ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تـاریخ: ....

شماره مدرک ....

فـرم اطلاعات پایان‌نـامه
کارشنـاسی ارشد و دکتـرا
کتابخـانه مرکـزی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

مشخصات دانشجو	نام خانوادگی : خانعلی	نام : سعیده	شماره دانشجویی: ۸۴۱۱۳۰۴۰
	دانشگاه : صنعتی امیر کبیر	دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر	رشته تحصیلی : ریاضی محض
عنوان	روش تقریب چسبندگی برای یک خانواده متناهی از نگاشت های غیر انبساطی فضاهای باناخ		
Title :	Viscosity approximation methods for a family of finite nonexpansive mappings in Banach spaces		
استاد راهنما	نام خانوادگی : دکتر واعظ پور	نام: سید منصور	
استاد مشاور	نام خانوادگی : دکتر ریاضی	نام : عبدالحمید	
دانشنامه	کارشناسی ○ ارشد ○ دکترا ○		سال تحصیلی: ۸۷-۸۶
نوع پروژه	کاربردی ○ بنیادی ○ توسعه ای ○ نظری ○		
مشخصات ظاهری	تعداد صفحات: ۵۷	تصویر: ○	جدول: ○ نمودار: ○ نقشه: ○ واژه‌نامه: ○ تعداد مراجع:۱۹ تعداد ضمائم: ○
زبان متن	فارسی ○ انگلیسی ○	چکیده	فارسی ○ انگلیسی ○
یاداشت	لوح فشرده ○ دیسکت فلاپی ○		
توصیفگر			
کلید واژه فارسی	روش تقریب چسبندگی– نگاشت غیر انبساطی – نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت –نقطه ثابت مشترک.		
کلید واژه لاتین	Nonexpansive mapping – viscosity approximation method – uniformly Gateaux differentiable norm – common fixed point.		

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا وجود نقطه ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی بررسی و سپس برای تعیین نقطه ثابت از روش تقریب چسبندگی استفاده می‌گردد. در این روش الگوریتم تکرار معرفی و با استفاده از آن نحوه به دست آوردن نقطه ثابت مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس با تعمیم این الگوریتم، نقطه ثابت مشترک برای خانواده متناهی از نگاشت های غیر انبساطی در فضای باناخ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: نگاشت غیر انبساطی، روش تقریب چسبندگی، نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت، نقطه ثابت مشترک.

فهرست مندرجات

۱ پیش نیازها ۱

۱.۱ فضاهای خطی و توپولوژی ۱

۲.۱ فضاهای نرم دار و فضاهای باناخ ۲

۳.۱ مشتق گاتو و فرشه در فضاهای نرم دار ۴

۴.۱ نگاشت غیر انبساطی ۸

۲ قضیه نقطه ثابت ۱۳

۱.۲ نقطه ثابت نگاشت انقباض ۱۳

۲.۲ نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی ۱۹

۳.۲ بررسی خاصیت نقطه ثابت تحت هموتوپی ۲۵

۳ روش تقریب چسبندگی برای نگاشت غیر انبساطی ۳۰

۱.۳ تعیین نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی با استفاده از الگوریتم ۳۰

۲.۳ روش تقریب چسبندگی برای نگاشت غیر انبساطی ۳۴

مراجع ۵۸

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ٦۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ٦۱

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به ارائه برخی تعاریف، مفاهیم مقدماتی و همچنین بیان بعضی از قضیه‌ها، که در فصول بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.
در این پایان نامه همواره E نشان دهندهٔ یک فضای باناخ حقیقی خواهد بود.

۱.۱ فضاهای خطی و توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای خطی روی $\mathbb{R}$ باشند. تابع $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی از X به Y گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

یک عملگر خطی از X به $\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی [۱] می‌نامیم.
عملگر $I : X \longrightarrow X$ که با ضابطه $I(x) = x$ تعریف می‌شود، عملگر همانی و عملگر $0 : X \longrightarrow Y$ با ضابطه $0(x) = 0$ عملگر صفر نامیده می‌شود.

[۱] linear functional

۲.۱ فضاهای نرم دار و فضاهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱. اگر فضای خطی X دارای یک نرم باشد، آنگاه گوییم X یک فضای خطی نرم دار است.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه $B_r = \{x \in X \ : \ \|x\| < r\}$ را گوی باز به مرکز صفر و شعاع r و مجموعهٔ $\overline{B}_r = \{x \in X \ : \ \|x\| \leq r\}$ را گوی بسته به مرکز صفر و شعاع r گوییم.
به ازای $r = ۱$، $B_۱$ و $\overline{B}_۱$ را به ترتیب گوی یکه باز و گوی یکه بسته می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک خطی با توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. گوییم $\mathcal{T}$ نرم پذیر است، هرگاه یک نرم روی X وجود داشته باشد به قسمی که توپولوژی تولید شده توسط آن مساوی $\mathcal{T}$ باشد.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۹] مجموعه $B(X,Y)$ متشکل از تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y با جمع و ضرب اسکالر نقطه وار و نرم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq ۱\}$$

یک فضای نرم دار است و اگر Y فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ هم فضای باناخ است.

فضای دوگان [۲]

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک خطی باشد. مجموعه متشکل از تابعک های خطی پیوسته روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X می‌نامیم. به عبارت دیگر

$$X^* = B(X, \mathbb{R}).$$

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $\Lambda \in X^*$ قرار دهیم

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x| \ : \ \|x\| \leq ۱\},$$

آنگاه X^* بنابر قضیه ۴.۲.۱ یک فضای باناخ است.
همچنین دوگان دوم X را با X^{**} نمایش می‌دهیم.

[۲] dual space

مثال ۱.۲.۶. فرض کنیم (X,Ω,μ) یک فضای اندازه و $1 \leq p < \infty$، آنگاه $L_p^*(X) = L_q(X)$ در حالی که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

قضیه ۱.۲.۷.[۱۹] اگر X یک فضای نرم دار و $x_0 \in X$، آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد به قسمی که $\|\Lambda\| = 1$ و $\|x_0\| = \Lambda x_0$. خصوصاً به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\|x\| = \sup\{|\Lambda x| \ : \ \Lambda \in X^* \ , \ \|\Lambda\| = 1\}.$$

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. در صورتی که نگاشت $\phi : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطهٔ $\phi(x)f = f(x)$، برای هر $f \in X^*$، پوشا باشد، گوییم فضای نرم دار X بازتابی [۳] است.

مثال ۱.۲.۹. فضاهای L^p برای $1 < p < \infty$ بازتابی هستند.

مثال ۱.۲.۱۰. $L^1(X)$ یک فضای باناخ است، ولی بازتابی نیست.

$$L^1(X)^{**} = L^\infty(X)^* \neq L^1(X)$$

[۳] reflexive

تعریف ۱۱.۲.۱ . فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله X^* روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به $\mathcal{T}$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X گویند و با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱ . اگر X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان X باشد، توپولوژی $\sigma(X^*, \phi(X))$ یعنی کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته می‌گردد را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیم.

قرارداد. فرض کنیم E فضای باناخ حقیقی با نرم $\|.\|$ و E^* دوگان E باشد. مقدار $f \in E^*$ در $x \in E$ را به صورت $< x, f >$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱ . نگاشت دوگان نرمال شده [۴] J از E به خانواده زیر مجموعه‌های $E^*(P(E^*))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. با استفاده از نتیجهٔ قضیه هان باناخ (قضیه ۷.۲.۱)، داریم $J(x)$ ناتهی است.

$$J(x) = \{f \in E^* \ : < x, f >= \|x\|^۲ = \|f\|^۲\} \quad \forall \, x \in E.$$

تعریف ۱۴.۲.۱ . فرض کنیم J تک مقداری باشد. آنگاه J پیوسته دنباله‌ای ضعیف [۵] است، اگر هر دنباله $\{x_n\} \subset E$ همگرای ضعیف به x باشد، $J(x_n)$ همگرای ضعیف ستاره به $J(x)$ باشد.

۳.۱ مشتق گاتو و فرشه در فضاهای نرم دار

تعریف ۱.۳.۱ . فرض کنید T یک عملگر روی فضای برداری X به توی فضای نرم دار Y باشد. T را مشتق پذیر گاتو [۶] در x، در جهت η گوییم هرگاه برای هر $x, \eta \in X$ و اسکالر α

$$\mathrm{D}T(x)(\eta) = \lim_{\alpha \to ۰} \frac{T(x + \alpha\eta) - T(x)}{\alpha}$$

[۴] normalized duality mapping
[۵] weakly sequentially continuous
[۶] Gâteaux differentiable

موجود باشد. در این صورت $\mathrm{D}T(x)(\eta) \in Y$ را مشتق گاتوی T در x در جهت η می‌نامیم.
گوییم T مشتق پذیر گاتو در x است هرگاه T در تمامی جهت ها در x مشتق پذیر گاتو باشد. همچنین عملگر

$$\mathrm{D}T(x) : X \longrightarrow Y$$

که به هر $\eta \in X$ بردار $\mathrm{D}T(x)(\eta) \in Y$ را نسبت می‌دهد، مشتق گاتو T در x نامیم.

مثال ۲.۳.۱.

الف) اگر $X = \mathbb{R}^n$ و $Y = \mathbb{R}$ و

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)\ ,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\ , \ldots , e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

پایه های استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه $\mathrm{D}T(x)(e_i)$، مشتق گاتو T در جهت e_i، همان i–امین مشتق جزئی T در x است.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}T(x)(e_i) &= \lim_{t\to 0} \frac{T(x_1, x_2, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - T(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{t} \\ &= \frac{\partial T(x)}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

در نتیجه مشتق گاتو T در x در جهت e_i همان مشتق جزئی T در x است.

ب) اگر T یک عملگر خطی باشد، با استفاده از تعریف به وضوح نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{D}T(x)(\eta) = T(\eta).$$

مثال ۳.۳.۱.

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & x = (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

برای $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ که $\eta \neq 0$، داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{D}T(0)(\eta) &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{T(0+\alpha\eta) - T(x)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{T(\alpha\eta)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{(\alpha\eta_1)(\alpha\eta_2)^2}{\alpha[(\alpha\eta_1)^2 + (\alpha\eta_2)^2]} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\eta_1\eta_2^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} = \frac{\eta_1\eta_2^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} \,. \end{aligned}$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید T یک عملگر از فضای نرم دار X به توی فضای نرم دار Y و $x \in X$ باشد، اگر عملگر خطی $dT(x) \in B(X,Y)$ موجود باشد به طوری که

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - dT(x)h\|}{\|h\|} = 0,$$

آن گاه $dT(x)$، مشتق فرشه T در x و T مشتق پذیر فرشه [۷] در x نامیده می‌شود. عملگر

$$dT : X \longrightarrow B(X,Y)$$

که مقدار $dT(x)$ را به x نسبت می‌دهد، مشتق فرشه T نامیده می‌شود.

تذکر ۵.۳.۱. از تعریف مشتق گاتو و فرشه نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\alpha \to 0} \left\| \frac{T(x+\alpha h) - T(x)}{\alpha} - dT(x)h \right\| = 0.$$

بنابراین مشتق گاتو $\mathrm{D}T(x)$ موجود است، زمانی که مشتق فرشه $dT(x)$ موجود باشد و در این حالت $DT(x) = dT(x)$.

مثال ٦.۳.۱.

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) = x_1x_2 + x_1^2$$

آنگاه برای $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$، داریم

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{\|h\|} &= \frac{(x_1+h_1)(x_2+h_2) + (x_1+h_1)^2 - x_1x_2 - x_1^2}{\|h\|} \\ &= \frac{h_1x_2 + h_2x_1 + 2h_1x_1}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} + \frac{h_1^2 + 2h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

[۷] Frechet differentiable

بنابراین

$$dF(x)h = h_1x_2 + h_2x_1 + 2h_1x_1$$

و $dF(x) \in (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2$. از طرفی $\mathbb{R}^2$ یک فضای هیلبرت است، لذا

$$dF(x) = (x_2 + 2x_1, x_1).$$

تعریف ۷.۳.۱. نرم E، مشتق پذیر گاتو است، هرگاه حد زیر برای هر $x,y \in B$، $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ موجود باشد:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}. \tag{1}$$

در این صورت E هموار نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. نرم E، مشتق پذیر فرشه نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in B_1$، حد (۱) موجود و به y بستگی نداشته باشد.

تعریف ۹.۳.۱. نرم E، مشتق پذیر گاتو یکنواخت [8] نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in B_1$ حد (۱) موجود و به x بستگی نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱ . فضای E را دارای نرم مشتق پذیر فرشه[9] یکنواخت (و E را هموار یکنواخت) گوییم اگر حد (۱) موجود و به x و y بستگی نداشته باشد.

مثال ۱۱.۳.۱ . فضای $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ مشتق پذیر گاتو می‌باشد.

قضیه ۱۲.۳.۱. [۱] E هموار است اگر و فقط اگر هر نگاشت دوگان نرمال شده J تک مقداری باشد.

[8] uniformly Gateaux differentiable

[9] Freachet differentiable norm

۴.۱ نگاشت غیر انبساطی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را غیر انبساطی [۱۰] گوییم اگر برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $d(T(x),T(y)) \leq d(x,y)$.

قرارداد ۲.۴.۱. نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی T را با $Fix(T)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم C زیر مجموعه‌ای از فضای باناخ E باشد. نگاشت T از C به C را نیمه بسته [۱۱] گوییم، هرگاه برای هر دنباله $\{u_n\}$ در C، که همگرای ضعیف به u است و

$$\lim_{n\to\infty} \|Tu_n - w\| = ۰$$

نتیجه دهد $u \in C$ و $Tu = w$.

لم ۴.۴.۱.[۱] فرض کنیم E یک فضای باناخ بازتابی، C یک زیر مجموعه بسته محدب غیر تهی از E و $T : C \longrightarrow E$ یک نگاشت غیر انبساطی باشد. فرض کنیم J، یک نگاشت دوگان پیوسته دنباله‌ای ضعیف باشد. در این صورت نگاشت $I - T$ روی C نیمه بسته است. (I نگاشت همانی است.)

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید C یک زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد، در این صورت به ازای هر $x \in H$ عنصر منحصر به فرد $Px \in C$ وجود دارد به طوری که

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in C\}.$$

نگاشت $P : H \longrightarrow C$ را نگاشت تصویر نزدیکترین نقطه روی H گویند.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم C یک زیر مجموعه بسته غیر تهی از فضای باناخ E باشد. گوئیم C دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت غیر انبساطی است اگر هر نگاشت غیر انبساطی از یک زیرمجموعه بسته محدب کراندار D دارای نقطه ثابت باشد.

---

[۱۰] nonexpansive

[۱۱] demiclosed

تعریف ۷.۴.۱. یک نگاشت Q از C به C، تورفتگی [۱۲] نامیده می‌شود، هرگاه $Q^{۲} = Q$. اگر نگاشت Q از C به C یک تورفتگی باشد، آنگاه به ازای هر z در برد Q، $Qz = z$.

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنیم D زیر مجموعه‌ای از C و Q نگاشتی از C به D باشد. آنگاه Q، خورشیدی [۱۳] است، اگر به ازای هر نقطه روی نیم خط

$$\{Qx + t(x - Qx) \ : \ t > \circ\}$$

داشته باشیم

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx \quad x \in C, t \geq \circ \ .$$

تعریف ۹.۴.۱. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از C باشد، در فضای باناخ هموار E، Q یک تورفتگی غیر انبساطی خورشیدی از C به روی C است اگر و فقط اگر

$$< x - Qx, J(z - Qx) > \leq \circ \qquad x \in C \ , \ z \in D.$$

قضیه ۱۰.۴.۱. [۱] اگر E فضای باناخ بازتابی با نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت باشد، هر زیر مجموعهٔ فشرده ضعیف محدب از E برای نگاشت های غیر انبساطی دارای خاصیت نقطه ثابت است.

لم ۱۱.۴.۱. [۱] فرض کنیم E یک فضای باناخ حقیقی و $J : E \longrightarrow ۲^{E^*}$ نگاشت دوگان نرمال شده[۱۴] باشد. آنگاه برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|x + y\|^{۲} \leq \|x\|^{۲} + ۲ < y, j(x + y) > \quad \forall \ j(x + y) \in J(x + y)$$

[۱۲] retraction
[۱۳] sunny
[۱۴] normalized duality mapping

لم ۱۲.۴.۱. [۲] فرض کنیم E فضای باناخ بازتابی با نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت باشد و C زیر مجموعه بسته محدب غیر تهی از E و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت انقباض باشد و حداقل یک نقطه ثابت داشته باشد. فرض کنیم $u \in C$ و z_t نقطه یکتایی از C باشد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$z_t = tu + (۱ - t)Tz_t \quad ۰ < t < ۱$$

آنگاه $\{z_t\}$ وقتی $t \to ۰$، همگرای قوی به نقطه ثابتی از T است. همچنین اگر Q یک تورفتگی از C و $Qx = \lim_{t \to ۰} z_t$، به ازای هر $x \in C$، آنگاه داریم

$$< x - Qx, J(Qx - z) > \geq ۰ \quad \forall\, z \in Fix(T)$$

در این صورت Q، تورفتگی خورشیدی غیر انبساطی است.

گزاره ۱۳.۴.۱.[۲]

۱) اگر E یک فضای باناخ هموار یکنواخت باشد، آنگاه نگاشت دوگان J تک مقداری است و روی هر زیر مجموعه کراندار از E به طور یکنواخت پیوسته است.

۲) اگر E فضای باناخ با نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت باشد، آنگاه نگاشت دوگان $J : E \longrightarrow ۲^{E^*}$ تک مقداری است و روی هر زیرمجموعه کراندار از E، به طور یکنواخت پیوسته است.

لم ۱۴.۴.۱.[۱] فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی حقیقی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند،

$$s_{n+۱} \leq (۱ - \lambda_n)s_n + \lambda_n\beta_n + \gamma_n \quad n \geq ۰$$

که $\{\lambda_n\}$ و $\{\beta_n\}$ و $\{\gamma_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱) $\{\lambda_n\} \subset [۰, ۱]$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} \lambda_n = \infty$.

۲) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq ۰$.

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n\beta_n < \infty$.

۴) $\gamma_n \geq ۰$ $(n \geq ۰)$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} \gamma_n < \infty$.

آنگاه $\lim_{n\to\infty} s_n = \circ$.

تعریف ۱۵.۴.۱ . حد باناخ روی l^∞، تابع پیوسته‌ای مانند $\phi : l_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که برای دنباله های با مقدار حقیقی $\mathrm{x} = \{x_n\}$ و $\mathrm{y} = \{y_n\}$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱) برای هر $c, d \in \mathbb{R}$ داریم $\phi(c\mathrm{x} + d\mathrm{y}) = c\phi(\mathrm{x}) + d\phi(\mathrm{y})$.

۲) اگر $\mathrm{x} \geq \circ$، آنگاه $\phi(\mathrm{x}) \geq \circ$.

۳) $\phi(\mathrm{x}) = \phi(s\mathrm{x})$ که $s(x_n) = x_{n+1}$ ($s : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ یک عملگر انتقال است).

۴) اگر x دنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه $\phi(\mathrm{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

۵) $\|\phi\| = ۱$.

لم ۱۶.۴.۱ .[۱] فرض کنیم C زیرمجموعه بسته محدب غیر تهی از فضای باناخ E با نرم مشتق پذیر گاتو یکنواخت و $\{x_n\}$ دنباله کراندار در E باشد. فرض کنیم LIM حد باناخ روی l^∞، $q \in C$ و J نگاشت دوگان روی E باشد. آنگاه $LIM\|x_n - q\|^۲ = \min\limits_{y\in C} LIM\|x_n - y\|^۲$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in C$، $LIM < x - q, J(x_n - q) > \leq \circ$.

تعریف ۱۷.۴.۱ . فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی روی فضای برداری X باشند، گوییم $f(x) = Og(x)$ وقتی $x \to a$ اگر و فقط اگر عدد حقیقی مثبت M و عدد حقیقی $x_\circ$ موجود باشد به طوری که

$$\exists\, x_\circ, \exists M \quad |f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall\, x > x_\circ, x, x_\circ \in \mathbb{R}.$$

مثال ۱۸.۴.۱ . فرض کنیم $f(x) = ٦x^۴ - ۲x^۳ + ۵$ و $g(x) = x^۴$، آنگاه $f(x) = Og(x)$.

تعریف ۱۹.۴.۱. فرض کنیم f و g دو تابع در فضای برداری X باشند. گوییم $f(x) = o(g(x))$ اگر و فقط اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰$ یا به عبارتی دیگر،

$$\forall\, \varepsilon > ۰\ \exists\, M > ۰\ |x| > M \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon\ .$$

مثال ۲۰.۴.۱.

$$x = o(x^۲)\ :\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^۲} = ۰$$

فصل ۲

قضیه نقطه ثابت

۱.۲ نقطه ثابت نگاشت انقباض

در این بخش نگاشت انقباض [۱] را تعریف و وجود نقطه ثابت در فضای متریک کامل و فضای باناخ را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $F : X \longrightarrow X$ را لیپ شیتز [۲] گوییم هرگاه ثابت $\alpha \geq ۰$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$،

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x,y). \quad (۱)$$

کوچکترین ثابت α ای که در رابطهٔ (۱) صدق کند را ثابت لیپ شیتز[۳] گوییم و با L نشان می‌دهیم. اگر $L < ۱$، F را یک نگاشت انقباض و در حالتی که $L = ۱$، F را نگاشت غیر انبساطی گوییم. نگاشت F^n با استقراء به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$F^{\circ}(x) = x$$
$$F^{n+۱}(x) = F(F^n(x)) \quad x \in \{۰, ۱, ۲, \ldots\}.$$

[۱] contraction

[۲] Lipschitzian

[۳] Lipschipz constant

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و $F:X\longrightarrow X$ یک نگاشت انقباض با ثابت لیپ شیتز L باشد. در این صورت F دارای نقطه ثابت یکتای $u\in X$ است. به علاوه برای هر $x\in X$ داریم

$$d(F^n(x),u)\leq \frac{L^n}{1-L}d(x,F(x)) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} F^n(x)=u.$$

اثبات. نخست یکتایی نقطه ثابت را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $x,y\in X$ موجود باشند به طوری که $x=F(x)$ و $y=F(y)$، آنگاه داریم

$$d(x,y)=d(F(x),F(y))\leq Ld(x,y).$$

بنابراین $d(x,y)\leq Ld(x,y)$ که $0<L<1$. در نتیجه داریم $d(x,y)=0$. پس نقطه ثابت یکتا است.

ابتدا نشان می‌دهیم $\{F^n(x)\}$ یک دنباله کوشی است. توجه کنید برای $n\in\{0,1,\ldots\}$

$$\begin{aligned} d(F^n(x),F^{n+1}(x)) &= d(F(F^{n-1}(x)),F(F^n(x))) \\ &\leq Ld(F^{n-1}(x),F^n(x))\leq\cdots\leq L^nd(x,F(x)). \end{aligned}$$

بنابراین برای $m>n$ که $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$، داریم

$$\begin{aligned} d(F^n(x),F^m(x)) &\leq d(F^n(x),F^{n+1}(x))+d(F^{n+1}(x),F^{n+2}(x))+\cdots+d(F^{m-1}(x),F^m(x)) \\ &\leq L^nd(x,F(x))+L^{n+1}d(x,F(x))+\cdots+L^{m-1}d(x,F(x)) \\ &\leq L^nd(x,F(x))(1+L+L^2+\cdots). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$d(F^n(x),F^m(x))\leq\frac{L^n}{1-L}d(x,F(x)). \qquad (2)$$

پس $\{F^n(x)\}$ یک دنباله کوشی در X است. از طرفی بنابر فرض X یک فضای کامل است. پس دنباله $\{F^n(x)\}$ همگراست. لذا $u\in X$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}F^n(x)=u.$$

چون F پیوسته است، داریم

$$u = \lim_{n\to\infty} F^{n+۱}(x) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) = F(u).$$

بنابراین u یک نقطه ثابت F است.

حال اگر در (۲)، $m \to \infty$، داریم

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{۱ - L} d(x, F(x)).$$

□

توجه کنید در این قضیه لازم است داشته باشیم $L < ۱$. اگر $L = ۱$ انتخاب شود، لزومی ندارد که نقطه ثابت موجود باشد. به عنوان مثال $F(x) = x + ۱$ روی $\mathbb{R}$ نقطه ثابت ندارد. در باره حالتی که $L = ۱$ باشد، در بخش دوم این فصل بحث می‌کنیم.

برای توسعه دادن قضیه ۲.۱.۲، فرض کنیم به ازای هر $x, y \in X$ و $x \neq y$ داشته باشیم

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y),$$

مانند مثال قبل لزومی ندارد F دارای نقطه ثابت روی $\mathbb{R}$ باشد. به عنوان مثال به ازای $x \in \mathbb{R}$، $F(x) = \ln(۱ + e^x)$ دارای نقطه ثابت نیست.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد. اگر $F : X \longrightarrow X$ در شرط زیر صدق کند،

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y) \quad \text{به ازای هر } x, y \in X \text{ و } x \neq y\text{،}$$

آنگاه F دارای نقطه ثابت یکتا در X است.

اثبات. نخست یکتایی نقطهٔ ثابت را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $x, y \in X$ به طوری که $x \neq y$ و $F(x) = x$ و $F(y) = y$ آنگاه

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) < d(x, y)$$

از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم که F حداکثر یک نقطه ثابت دارد.