دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مدول‌های تزریقی ضعیف روی دامنه‌های صحیح

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

نفیسه نظری

استاد راهنما

دکتر محمود بهبودی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر) خانم نفیسه نظری

تحت عنوان

مدول‌های تزریقی ضعیف روی دامنه‌های صحیح

در تاریخ ۹۰/۱۰/۲۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محمود بهبودی
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر عاطفه قربانی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر جواد اسدالهی (دانشگاه اصفهان)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر احمد حقانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد دهکردی

فهرست مطالب

چکیده:

مدول M تزریقی ضعیف نامیده می‌شود، هرگاه برای هر R−مدول از بعد ضعیف حداکثر یک، مانند A، $\mathrm{Ext}_R^1(A, M) = 0$. در این پایان‌نامه این مدول‌ها مطالعه شده و چندین مشخصه سازی از آن‌ها ارائه شده است. یکی از نتایج جالب به دست آمده، وجود محکی برای مدول‌های تزریقی ضعیف است. در ادامه پوش−تزریقی ضعیف معرفی شده و نشان داده شده است که روی هر دامنه‌ی صحیح، هر مدولی پوش−تزریقی ضعیف دارد. مطالعه روی این مفهوم، نتیجه‌ای کاربردی را سبب می‌شود که عبارت است از بدست آوردن پوش−تزریقی ضعیف یک مدول از پوشش تختش و برعکس. دامنه‌ی صحیح R تقریباً کامل نامیده می‌شود، هرگاه برای هر ایدال ناصفر و سره I از R حلقه‌ی R/I کامل باشد. این دامنه‌ها به طریق مختلف توصیف شده‌اند، برای مثال روی این دامنه‌ها، مفهوم‌های هم−تاب ایناکس و هم−تاب متلیس بر هم منطبق هستند. یکی از اهداف مهم ما، توصیف دامنه‌های تقریباً کامل با استفاده از مفهوم تزریقی ضعیف است.

رده‌بندی موضوعی: ۱۳C۱۱.

واژه‌های کلیدی: مدول h−بخش پذیر، مدول تزریقی ضعیف، مدول هم−تاب ایناکس و هم−تاب متلیس، بعد تزریقی ضعیف فراگیر، دامنه‌ی تقریباً کامل، پوشش تخت، پوش−تزریقی ضعیف، بعد ضعیف.

فصل ۱

مقدمه

این پایان‌نامه بر اساس مراجع [۱۰] و [۱۱] تنظیم شده و بحث اصلی آن پیرامون مدول‌های تزریقی ضعیف و خواص آن‌ها است. مبحث مدول‌های تزریقی برای نخستین بار توسط بئر در سال ۱۹۴۰ مطرح شد. این مدول‌ها در نظریه‌ی جبر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، تا آن‌جا که در بیشتر کتاب‌ها و مقاله‌های جبری از آن‌ها یاد شده و نتایج جدیدی در مورد آن‌ها بیان گردیده است.

مفهوم زیرمدول محض در سال ۱۹۵۹ برای نخستین بار توسط کوهن [۶] مطرح شد. به دنبال آن، دیگر محققین نیز با جدیت بیشتری به مطالعه و تحقیق در مورد این مفهوم پرداختند. می‌توان گفت بیشترین و به ویژه اساسی‌ترین کارها توسط وارفیلد [۲۹] و اِشتننشترم [۲۶] انجام گرفته است. فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. زیرمدول N از M **محض** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $R-$مدول E دنباله‌ی $0 \longrightarrow N \otimes_R E \longrightarrow M \otimes_R E$ دقیق باشد.

در اواخر دهه‌ی شصتِ قرن بیستم مبحث مدول‌های تزریقی محض مطرح شد. در حقیقت در سال ۱۹۶۷ فُکس این مدول‌ها را روی حلقه‌های نوتری چپ مورد مطالعه قرار داد. در فاصله‌ی کوتاهی از او، وارفیلد [۲۹] و اِشتننشترم [۲۶]، جزئیات بیشتری از این مدول‌ها را مطرح کردند.

فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و Q میدان کسرهای آن باشد. در این صورت R دامنه‌ی متلیس نامیده می‌شود، هرگاه بعد تصویری Q برابر یک باشد. متلیس [۲۲]، در سال ۱۹۶۰ مدول $h-$بخش پذیر را تصویر هم‌ریخت از یک مدول تزریقی معرفی کرد. به وضوح هر مدول $h-$بخش پذیر، بخش پذیر است، ولی عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. در فصل چهارم این پایان‌نامه، دامنه‌هایی که روی آن‌ها

مدول‌های h–بخش پذیر، بخش پذیر هستند معرفی می‌شوند، یکی از این دامنه‌ها، دامنه‌ی متلیس است.

این پایان‌نامه در شش فصل تنظیم شده است. در فصل دوم یک سری پیش‌نیازها ارائه شده است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در فصل سوم دو تابعگر مهم و پر کاربرد Ext و Tor به همراه ویژگی‌هایشان معرفی شده‌اند.

مدول M **تزریقی ضعیف** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر R–مدول از بعد ضعیف حداکثر یک مانند A، $\mathrm{Ext}^1_R(A,M)=0$. لازم به ذکر است که مدول‌های تزریقی ضعیف نخستین بار توسط لی [۱۹] معرفی شدند. این مدول‌ها به طور اکید بین کلاس مدول‌های h–بخش پذیر و کلاس مدول‌های تزریقی قرار می‌گیرند. در فصل چهارم مدول‌های تزریقی محض، h–بخش پذیر و تزریقی ضعیف مورد بحث قرار می‌گیرند و نشان داده می‌شود به ازای هر R–مدول M مدول $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ که **مدول مشخصه** نامیده می‌شود همواره تزریقی محض است. در این فصل محکی برای تزریقی ضعیف بودن یک مدول ارائه شده است. هم‌چنین نشان داده شده است هر R–مدول h–بخش پذیر و تزریقی محض، تزریقی ضعیف است.

در فصل پنجم مفاهیم پیش–پوش و پوش (پیش–پوشش و پوشش) معرفی شده است. پوش تزریقی برای نخستین بار توسط شُپف و اکمن در سال ۱۹۵۳ معرفی شد. در ادامه دوگان این مفهوم یعنی پوشش تصویری مورد بررسی محققین قرار گرفت تا این که باس [۳] در سال ۱۹۶۰ ثابت کرد، روی یک حلقه‌ی R، همه‌ی R–مدول‌های راست، پوشش تصویری دارند اگر و تنها اگر R حلقه‌ی کامل باشد. در سال ۲۰۰۱ ایناکس و به طور موازی با او البشیر و بیکان [۵] موفق شدند نشان دهند که هر مدول پوشش تخت دارد. در فصل پنجم پوش–تزریقی ضعیف معرفی و نشان داده شده است که روی دامنه‌های صحیح هر مدول، پوش–تزریقی ضعیف دارد. در این فصل نشان داده شده است که روی دامنه‌های مرتبط، هم‌هسته‌ی یک مدول هم–تاب ایناکس در پوش–تزریقی ضعیفش همواره تزریقی محض است. هم‌چنین نشان داده شده است که بین پوش–تزریقی ضعیف و پوشش تخت از یک مدول، رابطه‌ای نزدیک وجود دارد.

در فصل ششم مفهوم بُعد تزریقی ضعیف معرفی می‌شود. در ادامه رابطه‌ی بین این بعد با بعد هم–تاب ایناکس بررسی شده است. لازم به ذکر است که بعد هم–تاب ایناکس در سال ۲۰۰۶ توسط ماؤ و دینگ [۲۱] معرفی شد. در ادامه با معرفی بعد تزریقی ضعیف فراگیر، نشان داده می‌شود این بعد برابر سوپریمم بعد تصویری همه‌ی R–مدول‌هایی است که بعد ضعیف آن‌ها حداکثر یک است. در سال ۲۰۰۳ بازونی و سلس [۴] دامنه تقریباً کامل را معرفی کردند. با مطالعه روی این دامنه‌ها نتایج جالبی حاصل شد. به عنوان مثال اگر R دامنه‌ی تقریباً کامل باشد، آن‌گاه هر مدول هم–تاب متلیس، هم–تاب ایناکس است (قضیه‌ی ۱۶.۴.۴ از مرجع [۱۳]). به خصوص در این فصل قضیه‌ای کلیدی که حاوی

مشخصه‌ای جدید برای دامنه‌های تقریباً کامل است مطرح شده است.
قضیه : فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد. در این صورت موارد زیر معادلند.
(۱) R تقریباً کامل است.
(۲) بعد تزریقی ضعیف فراگیر R برابر یک است.

در ادامه با استفاده از این قضیه، معادل‌هایی برای دامنه‌های تقریباً کامل حاصل می‌شود. هم‌چنین نتیجه می‌شود که اگر $\mathcal{P}_1$، $\mathcal{D}$، $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{W}$ به ترتیب کلاس‌های مدول‌های از بعد تصویری حداکثر یک، بخش پذیر، از بعد ضعیف حداکثر یک و تزریقی ضعیف باشند، آن‌گاه جفت‌های $(\mathcal{F}_1,\mathcal{W})$ و $(\mathcal{P}_1,\mathcal{D})$ بر هم منطبق هستند. در ادامه نشان داده شده است در حالت کلی یک مدول تزریقی ضعیف لزومی ندارد تزریقی محض باشد، در صورتی که در فصل چهارم در قضیه‌ی ۶۲.۴ نشان داده شده است. هر مدول تزریقی محض و h–بخش پذیر، تزریقی ضعیف است. ولی عکس این موضوع روی دامنه‌های پروفر همواره برقرار است؛ یعنی هر مدول تزریقی ضعیف، تزریقی محض نیز است.

فصل ۲

مفاهیم اولیه

در این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها جابه‌جایی، یکدار و شرکت پذیر هستند، بنابراین تنها از مدول صحبت می‌کنیم، نه مدول چپ یا راست. هم‌چنین R نشان دهنده‌ی یک حلقه است و تمامی مدول‌ها یکانی فرض شده‌اند. البته در سه فصل آخر این پایان‌نامه حلقه‌ها دامنه‌ی صحیح می‌باشند مگر این که خلاف آن ذکر شود.

در این فصل همه‌ی مطالب به صورت خلاصه بیان شده است و فقط به جهت برطرف کردن نیاز خواننده برای مطالعه‌ی این پایان‌نامه می‌باشد. البته اگر می‌خواستیم بیشتر از این به بیان مطالب بپردازیم می‌بایست کتابی قطور را به عنوان مفاهیم اولیه ارائه می‌دادیم. البته سعی شده در متن پایان‌نامه نیز از مطالبی که پیچیدگی زیادی دارند پرهیز کنیم. البته این به سبب وسعت مطالب می‌باشد و اگر بخواهیم به طور تخصصی هر یک از این مطالب را باز کنیم خود، کاری بزرگتر از این پایان‌نامه را طلب می‌کند.

۲—۱ مباحثی در رابطه با رسته‌ها و تابعگرها

تعریف ۱.۲ **رسته**، رده ایست مانند $\mathcal{C}$ از اشیائی که با $A, B, C, D, \ldots$ نمایش داده می‌شود (مجموعه‌ی این اشیاء را با $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ نشان می‌دهند) به طوری که

(۱) برای هر زوج مرتب (A,B) از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک مجموعه‌ی $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ که هر عضو آن یک، ریخت

از A به B نامیده می‌شود وجود دارد به طوری که برای $(A,B) \neq (A',B')$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$$

(۲) به ازای هر سه تایی (A,B,C) از اشیاء در $\mathcal{C}$ یک تابع

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

با ضابطه‌ی $(f,g) \longmapsto gf$ وجود دارد که در دو اصل زیر صدق می‌کند.

(i) شرکت پذیری : برای هر $A,B,C,D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ و $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$، $(hg)f = h(gf)$.

(ii) همانی : برای هر $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$، ریخت $1_A = \mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ که آن را همانی روی A می‌نامند وجود دارد به طوری که برای هر $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ و $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $f\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B f = f$.

مثالی از یک رسته، رسته‌ی R—مدول‌ها است که با $R-\mathrm{Mod}$ نمایش داده می‌شود. اشیاء این رسته، رده همه‌ی R—مدول‌های یکانی است. ریخت‌ها در این رسته، هم‌ریختی‌های R—مدولی و ترکیب ریخت‌ها، ترکیب هم‌ریختی‌ها است. بنابراین مجموعه‌ی ریخت‌های بین دو شی A,B در این رسته همان $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ است.

تعریف ۲.۲ فرض کنیم $\mathcal{C},\mathcal{D}$ دو رسته باشند.

(۱) یک زوج از تابع‌های $F=(F',F'')$، یک **تابعگر هموَرد** از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ نامیده می‌شود که در آن F' یک نگاشت از $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ به $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ و F'' یک نگاشت از $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ به $\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ است به طوری که برای هر $A,B,C \in Obj(\mathcal{C})$ و برای هر $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$ در $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$

(i) $F''(f) : F'(A) \longrightarrow F'(B)$.

(ii) $F''(gf) = F''(g)F''(f)$.

(iii) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

(۲) یک **تابعگر پادوَرد**، یک زوج $F=(F',F'')$ است که در آن F' و F'' همان نگاشت‌های تعریف شده در بالاست به طوری که

(i) $F''(f) : F'(B) \longrightarrow F'(A)$.

(ii) $F''(gf) = F''(f)F''(g)$.

(iii) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

(۳) **تابعگر همانی** از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{C}$، یک زوج $1_{\mathcal{C}} = (1'_{\mathcal{C}}, 1''_{\mathcal{C}})$ است به طوری که برای هر $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ و $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$، $1'_{\mathcal{C}}(A) = A$ و $1''_{\mathcal{C}}(f) = f$.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم $M_{۰}$،...،M_n $(n \geq ۲)$ R−مدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت دنباله‌ی

$$M_{۰} \xrightarrow{\phi_{۱}} M_{۱} \xrightarrow{\phi_{۲}} \cdots \longrightarrow M_{n-۱} \xrightarrow{\phi_n} M_n$$

که در آن $\phi_{۱}$،...،ϕ_n هم‌ریختی‌های R−مدولی می‌باشند، **دنباله‌ی دقیق** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $۲ \leq i \leq n$، $\mathrm{Img}(\phi_{i-۱}) = \mathrm{Ker}(\phi_i)$.

تعریف ۴.۲ فرض کنیم M، N و K، R−مدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت اگر دنباله‌ی

$$۰ \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\Phi} K \longrightarrow ۰$$

دقیق باشد، آن‌گاه دنباله‌ی فوق **دنباله‌ی دقیق کوتاه** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲ تابعگر هموردِ F از رسته‌ی $R - Mod$ به رسته‌ی Ab (رسته‌ی گروه‌های آبلی) **دقیق چپ (راست)** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow ۰$$

دنباله‌ی $۰ \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$ $(F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow ۰)$ دقیق باشد.
حال اگر F پادورد باشد، آن‌گاه گوییم F دقیق چپ (راست) است، هرگاه دنباله‌ی
$۰ \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$ $(F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow ۰)$ دقیق باشد.

قضیه ۶.۲ فرض کنیم A یک R−مدول باشد. در این صورت تابعگرهای $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ و $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ دقیق چپ هستند.

اثبات. به گزاره‌ی ۲.۵ از مرجع [۲۷] رجوع شود. ■

۲–۲ مباحث مقدماتی از نظریه‌ی حلقه و مدول

مهم‌ترین زیرساختارهای یک حلقه، زیرمجموعه‌های خاصی است که ایدال نامیده می‌شوند. بر این اساس تعریف ایدال را برای حلقه‌ی R یادآوری می‌کنیم.
زیرمجموعه‌ی ناتهی I از حلقه‌ی R یک **ایدال** R نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $a, b \in I$ و هر $r \in R$، $a - b \in I$ و $ra \in I$ ($a - b \in I,\ ar \in I$).

تعریف ۷.۲ ایدال سره‌ی P در حلقه‌ی R یک **ایدال اول** نامیده می‌شود، اگر برای هر دو ایدال $A, B \subseteq R$، $AB \subseteq P$ نتیجه دهد $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۸.۲ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت
(۱) **مدول** M **نوتری** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زنجیر صعودی $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq M_۳ \subseteq \dots$ از زیرمدول‌های M، عددی طبیعی چون k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$.
در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر صعودی بر زیرمدول‌ها صدق می‌کند.
(۲) **مدول** M **آرتینی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زنجیر نزولی $M_۱ \supseteq M_۲ \supseteq M_۳ \supseteq \dots$ از زیرمدول‌های M، عددی طبیعی چون k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq k$، $M_n = M_k$.
در چنین حالتی گوییم M در شرط زنجیر نزولی بر زیرمدول‌ها صدق می‌کند.

تعریف ۹.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت
(۱) **حلقه‌ی** R **نوتری** است، هرگاه R به عنوان یک R–مدول نوتری باشد.
(۲) **حلقه‌ی** R **آرتینی** است، هرگاه R به عنوان یک R–مدول آرتینی باشد.

گزاره ۱۰.۲ حلقه‌ی R نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول از یک R–مدول متناهی تولید، متناهی تولید باشد.

اثبات. به نتیجه ۱۱.۳.۲ از مرجع [۸] رجوع شود. ■

فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک زنجیر از ایدال‌های اول عبارت است از دنباله‌ای از ایدال‌های اول P_i از R، به طوری که به ازای هر i و j، $P_i \subseteq P_j$ یا $P_j \subseteq P_i$. برای زنجیر

$$P_۰ \supsetneqq P_۱ \supsetneqq P_۲ \supsetneqq \cdots \supsetneqq P_n$$

طول زنجیر، n تعریف می‌شود. ایدال اول P **از طول** n نامیده و با $\operatorname{rank}(P) = n$ نشان داده می‌شود، هرگاه زنجیری مانند

$$P = P_0 \supsetneqq P_1 \supsetneqq P_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq P_n$$

از ایدال‌های اول وجود داشته باشد، ولی زنجیری با طول بزرگتر از n، از ایدال‌های اول برای P وجود نداشته باشد. حال اگر برای ایدال اول P، به ازای هر عدد طبیعی n، رنجیری نزولی با ابتدای P و طول n وجود داشته باشد گوییم $\operatorname{rank}(P) = \infty$.

تعریف ۱۱.۲ فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت سوپریمم طول رنجیر مربوط به ایدال‌های اول، **بعد کرول حلقه‌ی** R نامیده و با $\dim(R)$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱۲.۲ بعد کرول هر حلقه‌ی آرتینی برابر صفر است.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۸ از مرجع [۲] رجوع شود. ■

قضیه ۱۳.۲ برای حلقه‌ی R شرایط زیر معادلند.

(۱) R نوتری است و $\dim(R) = 0$.

(۲) R آرتینی است.

اثبات. به قضیه‌ی ۵.۸ از مرجع [۲] رجوع شود. ■

تعریف ۱۴.۲ عنصر $a \in R$ **مقسوم علیه صفر** نامیده می‌شود، هرگاه $0 \neq b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = 0$. مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر R با $\mathrm{Z}(R)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۵.۲ زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R **بسته ضربی** نامیده می‌شود، هرگاه $S \not\ni 0$، $1 \in S$ و به ازای هر $a, b \in S$، $ab \in S$. برای مثال اگر P ایدالی اول باشد، آن‌گاه $S = R - P$ یک مجموعه‌ی بسته ضربی در R است.

فرض کنیم R یک حلقه و S یک مجموعه بسته ضربی در R باشد. رابطه $\sim$ را روی مجموعه‌ی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$(a, b) \sim (c, d)$ هرگاه $u \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $uad = ucb$.

این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و کلاس هم‌ارزی (a,b) با $\frac{a}{b}$ نشان داده می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی را با R_S یا $S^{-۱}R$ نشان می‌دهیم. جمع و ضرب بین عناصر R_S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{db} \quad , \quad \frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

می‌توان نشان داد که این جمع و ضرب بین عناصر R خوش تعریف هستند و R_S با این جمع و ضرب یک حلقه یکدار است که $۱_{R_S}=\frac{۱_R}{۱_R}$ (یا $\frac{c}{c}$ به ازای هر $c\in S$، چون همه این‌ها در یک کلاس هم‌ارزی هستند) و $\frac{۰}{۱_R}=۰$.

تعریف ۱۶.۲ به ازای مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S که $۱\in S$، حلقه‌ی R_S **حلقه‌ی کسرهای** R نسبت به S نامیده می‌شود. اگر $S=R\setminus \mathrm{Z}(R)$، آن‌گاه R_S **حلقه‌ی کسرهای کلی** R نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۲ فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد. اگر $S=R\setminus\{۰\}$، آن‌گاه R_S **میدان کسرهای** R نامیده می‌شود.

تذکر ۱۸.۲ فرض کنیم R یک حلقه و S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی در R که $S\subseteq R\setminus \mathrm{Z}(R)$ و $۱\in S$ باشد. در این صورت تابع $\varphi: R\longrightarrow R_S$ با ضابطه $\varphi(x)=\frac{x}{۱}$ یک هم‌ریختی یک به یک است. بنابراین R را می‌توان زیرحلقه‌ای از R_S در نظر گرفت که عناصر آن به شکل $\frac{a}{۱}$ هستند.

در ادامه لم زیر را که به پنج لم کوتاه معروف است یادآوری می‌کنیم.

لم ۱۹.۲ فرض کنیم

$$\begin{array}{ccccccccc}
۰ & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & ۰\\
 & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\
۰ & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & ۰
\end{array}$$

نموداری جابه‌جایی از $R-$مدول‌ها باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند.

(۱) اگرهم‌ریختی‌های α و γ یک به یک باشند، آن‌گاه هم‌ریختی β نیز یک به یک است.

(۲) اگرهم‌ریختی‌های α و γ پوشا باشند، آن‌گاه هم‌ریختی β نیز پوشا است.

(۳) اگرهم‌ریختی‌های α و γ یک‌ریختی باشند، آن‌گاه هم‌ریختی β نیز یک‌ریختی است.

اثبات. به لم ۱۷.۱.۴ از مرجع [۱۵] رجوع شود. ■

تعریف ۲۰.۲ فرض کنیم A و C دو R–مدول باشند. R–مدول B، **توسیع** A **به وسیله‌ی** C نامیده می‌شود، هرگاه دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق باشد.

تعریف ۲۱.۲ فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح و M یک R–مدول باشد. اگر $T(M) = \{m \in M \mid \exists\, r \in R \backslash \{0\}; rm = 0\}$، آن‌گاه M **تابدار** نامیده می‌شود، هرگاه $T(M) = M$ و **از تاب آزاد** نامیده می‌شود، هرگاه $T(M) = \{0\}$.

به سادگی دیده می‌شود که $T(M)$ یک زیرمدول از M است. $T(M)$ **زیرمدول تابدار** از M نامیده می‌شود. با توجه به این که برای هر مدول M روی دامنه‌ی صحیح R، دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

دقیق و $M/T(M)$ از تاب آزاد است، هر مدولی توسیعی از یک مدول تابدار به وسیله‌ی مدولی از تاب آزاد است.

اگر R دامنه‌ی صحیح نباشد می‌توان $T(M)$ را به صورت فوق تعریف کرد، ولی ممکن است $T(M)$ دیگر زیرمدول M نباشد، به عبارت دیگر اگر $m, m' \in T(M)$، آن‌گاه عناصر ناصفر r, r' در R وجود دارند به طوری که $rm = 0 = r'm'$. در نتیجه $rr'(m - m') = 0$. ولی ممکن است $rr' = 0$، که در این حالت دیگر نمی‌توانیم بگوییم $(m - m') \in M$. بنابراین دامنه‌ی صحیح بودن R، برای زیرمدول بودن $T(M)$ ضروری است.

تعریف ۲۲.۲ مدول D برای هم‌ریختی‌های R–مدولی $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ **جلوبر** نامیده می‌شود، هرگاه هم‌ریختی‌های R–مدولی $\beta : C \longrightarrow D$ و $\alpha : B \longrightarrow D$ وجود داشته باشند به طوری که $\beta g = \alpha f$ و نیز اگر هم‌ریختی‌های $\beta' : C \longrightarrow Y$ و $\alpha' : B \longrightarrow Y$ چنان موجود باشند که $\beta' g = \alpha' f$، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای $\theta : D \longrightarrow Y$ چنان موجود باشد که نمودار

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\alpha'"'] & D \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

جابه‌جایی باشد.

گزاره ۲۳.۲ برای هر جفت $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ از هم‌ریختی‌های R–مدولی، جلوبر وجود دارد.

اثبات. به گزاره‌ی ۵.۱۰.۲ از مرجع [۳۰] رجوع شود. ■

قضیه ۲۴.۲ (۱) فرض کنیم D، برای هم‌ریختی‌های $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ جلوبر باشد، آن‌گاه

(i) نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$
\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
g\downarrow & & \downarrow\beta & & \| & & \\
C & \xrightarrow{\alpha} & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

(ii) اگر f پوشا باشد، آن‌گاه α نیز پوشا است.

(iii) اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه α نیز یک به یک است.

(۲) اگر f پوشا باشد، آن‌گاه برای هر نمودار جابه‌جایی

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & 0 \\
& & \| & & g\downarrow & & \downarrow\beta & & \\
& & K & \xrightarrow{gi} & C & \xrightarrow{\alpha} & D & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

D جلوبر است اگر و تنها اگر سطر پایین نیز دقیق باشد.

اگر g یک به یک باشد، آن‌گاه gi نیز یک به یک است.

اثبات. به گزاره‌ی ۶.۱۰.۲ از مرجع [۳۰] رجوع شود. ■

در تعریف ۲۲.۲، مفهوم جلوبر برای دو هم‌ریختی با ابتدای یکسان مطرح شد. اکنون قصد داریم برای دو هم‌ریختی با انتهای یکسان، مفهوم عقب‌بر را معرفی کنیم.

تعریف ۲۵.۲ مدول D برای هم‌ریختی‌های $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$، **عقب‌بر** نامیده می‌شود، هرگاه هم‌ریختی‌های R−مدولی $\alpha : D \longrightarrow C$ و $\beta : D \longrightarrow B$ وجود داشته باشند به طوری که $f\beta = g\alpha$ و نیز اگر هم‌ریختی‌های $\alpha' : X \longrightarrow C$ و $\beta' : X \longrightarrow B$ چنان موجود باشند که $f\beta' = g\alpha'$، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای $\theta : X \longrightarrow D$ چنان موجود باشد که نمودار

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد.

گزاره ۲۶.۲ برای هر جفت $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$، از هم‌ریختی‌های R−مدولی، عقب‌بر وجود دارد.

اثبات. به گزاره‌ی ۲.۱۰.۲ از مرجع [۳۰] رجوع شود. ■

قضیه ۲۷.۲ (۱) فرض کنیم D، برای هم‌ریختی‌های $f : B \longrightarrow A$ و $g : C \longrightarrow A$ عقب‌بر باشد، آن‌گاه موارد زیر برقرارند.

(i) نمودار جابه‌جایی زیر با سطرهای دقیق وجود دارد.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\alpha} & C \\
& & \| & & \beta\downarrow & & \downarrow g \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & A
\end{array}$$

(ii) اگر f پوشا باشد، آن‌گاه α نیز پوشا است.

(iii) اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه α نیز یک به یک است.

(۲) اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه برای نمودار جابه‌جایی

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\alpha} & C & \xrightarrow{hg} & L & & \\ & & \beta\downarrow & & \downarrow g & & \| & & \\ \circ & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{h} & L & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

D، عقب‌بر است اگر و تنها اگر سطر اول دقیق باشد.

اگر g پوشا باشد، آن‌گاه hg هم پوشا است.

اثبات. به قضیه‌ی ۳.۱۰.۲ از مرجع [۳۰] رجوع شود. ■

۲–۳ مدول‌های تزریقی، بخش پذیر و تصویری

تعریف **۲۸.۲** مدول E روی حلقه‌ی R **تزریقی** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر هم‌ریختی $\lambda : A \to E$ و برای هر هم‌ریختی یک به یک $\beta : A \to M$، یک هم‌ریختی مانند $\bar{\lambda} : M \to E$ وجود داشته باشد به طوری که $\bar{\lambda}\beta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \\ & E & \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[dl, "\bar{\lambda}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

نمودار دقیق ⇒ نمودار جابه‌جایی دقیق

در قضیه‌ی زیر چند معادل برای مدول‌های تزریقی ارائه می‌شود.

قضیه **۲۹.۲** برای هر R–مدول E شرایط زیر معادلند.

(۱) E تزریقی است.

(۲) تابعگر $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ دقیق راست است.

(۳) R–مدول E، جمعوند مستقیمی از هر R–مدول شامل E است.

اثبات. به قضیه‌ی ۲.۱.۳ از مرجع [۸] رجوع شود. ■

در ادامه قضیه‌ای بیان می‌شود که در نظریه‌ی مدول‌های تزریقی نقشی اساسی دارد. این قضیه به قضیه‌ی بئر معروف است.

قضیه **۳۰.۲** فرض کنیم E یک R–مدول باشد. در این صورت E تزریقی است اگر و تنها اگر برای هر ایدال I، هم‌ریختی $f : I \longrightarrow E$ قابل توسیع به هم‌ریختی $g : R \longrightarrow E$ باشد.