وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

تعمیم شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسایل بهینه‌سازی چندهدفه بازه‌ای

توسط:

فاطمه صولتی جشن‌آباد

استاد راهنما:

دکتر علی عباسی ملایی

استاد مشاور:

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

شهریورماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

تعمیم شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسایل بهینه‌سازی چند هدفه بازه‌ای

به وسیله‌ی :

فاطمه صولتی جشن آباد

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تایید شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : عالی

دکتر علی عباسی ملایی، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد راهنما)

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد مشاور)

دکتر رضا پورقلی، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد داور)

دکتر امید سلیمانی فرد، استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر (استاد داور)

دکتر محمود اله دادی سلمانی، استادیار دانشکده زیست شناسی (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریورماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، اسوه صداقت و شرافت

مادر مهربانم، مظهر صبر و محبت

و همسر عزیزم **امیـــــر**، روشنی بخش قلبم

الگوی عشق و فداکاری

آنکه وجودش مایه آرامشم است.

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران پروردگار بی‌همتا را که مرا به طریق علم و دانش رهنمون ساخت و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود و خوشه‌چینی از خرمن علم را روزیم ساخت.

پس از شکر و ستایش خدای متعال، سپاسگزاری و امتنان قلبی خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی، الگوی علم و اخلاق، که در این راه راهنمای من بودند ابراز می‌دارم. از استاد مشاور گرامیم جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی کمال تشکر را دارم. از اساتید داور محترم، آقایان دکتر امید سلیمانی‌فرد و دکتر پورقلی به دلیل مطالعه دقیق پایان‌نامه و شرکت در جلسه دفاعیه تشکر می‌کنم. همچنین از آقای دکتر محمود اله‌دادی‌سلمانی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع اینجانب حضور داشتند تشکر می‌نمایم.

و در نهایت از پدر و مادر و سایر اعضای خانواده و نزدیکان و خانواده همسرم به خاطر لطف و محبت و تشویق‌هایشان کمال تشکر را دارم.

چکیده

تعمیم شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسایل بهینه‌سازی چند هدفه بازه‌ای

به وسیله‌ی:

فاطمه صولتی جشن‌آباد

در این پایان‌نامه، ابتدا شرایط لازم و کافی بهینگی کروش-کان-تاکر (KKT) برای مسایل بهینه‌سازی با توابع هدف حقیقی بیان می‌شود. سپس این شرایط را برای مسایل بهینه‌سازی تک هدفه با تابع هدف بازه‌ای‌مقدار به دست می‌آوریم. برای انجام این کار، مساله برنامه‌ریزی تک‌هدفه با تابع هدف بازه‌ای‌مقدار معرفی می‌شود. همچنین دو رابطه ترتیبی جزیی برای مقایسه بازه‌های بسته ارایه شده و بر اساس این روابط ترتیبی، دو مفهوم جواب برای این مساله بهینه‌سازی پیشنهاد می‌گردد. سپس متر هاسدورف و تفاضل هاکوهارا به ترتیب برای تعریف فاصله بین دو بازه بسته و تعریف تفاضل بین دو بازه بسته به‌کار گرفته می‌شوند. با استفاده از این تعاریف، پیوستگی و مشتق‌پذیری یک تابع بازه‌ای‌مقدار تعریف و سپس تحت این مفروضات، شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسایل بهینه‌سازی تک‌هدفه با تابع هدف بازه‌ای‌مقدار ارایه خواهدشد. در ادامه، مسایل بهینه‌سازی چند هدفه با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار را ملاحظه نموده و بر اساس روابط ترتیبی جزیی فوق، مفاهیم متعددی از جواب‌های بهینه پارتو برای این مساله پیشنهاد می‌گردد و شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای این مسایل تعمیم داده می‌شود.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

تحمیل عدم‌قطعیت روی مسایل بهینه‌سازی یکی از موضوعات تحقیقاتی است که می‌تواند به دو صورت تصادفی و یا فازی تعبیر گردد. تصادفی بودن در مسایل بهینه‌سازی تحت عنوان مسایل بهینه‌سازی احتمالی طبقه‌بندی می‌شود. کتاب‌های نوشته شده توسط بیرج و لوویکس[1] [۵]، کال[2] [۱۸]، پری کوپا[3] [۲۶]، استانکو میناسیان[4] [۳۴] و وجدا[5] [۳۹] ایده‌های جالب و تکنیک‌های مفید زیادی برای کار با مسایل بهینه‌سازی احتمالی فراهم می‌آورند. از طرف دیگر، فازی‌بودن در مسایل بهینه‌سازی تحت عنوان مسایل بهینه‌سازی فازی طبقه‌بندی می‌شود. مجموعه‌ای از مقاله‌های ویرایش شده در مورد بهینه‌سازی فازی به وسیله اسلووینسکی[6] [۲۹]، دلگادو و سایرین[7] [۱۰] جریان اصلی این موضوع را نشان می‌دهد. همچنین لای و هونگ[8] [۱۹,۲۰]، به‌طور مفصل این موضوع را مورد بررسی قرار می‌دهند.

ترکیب تصادفی‌بودن و فازی‌بودن در مسایل بهینه‌سازی یک موضوع تحقیقی مهم است. اسلووینسکی و تقم[9] [۳۰] مقایسه‌هایی بین بهینه‌سازی فازی و بهینه‌سازی احتمالی برای مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه ارایه داده‌اند.

---

[1] Louveaux
[2] Kall
[3] Prekopa
[4] Stancu-Minasian
[5] Vajda
[6] Slowinski
[7] Delgado et al
[8] Lai and Hwang
[9] Slowinski and Teghem

اینوی‌گوچی و رامیک[10] [۱۵] به‌طور خلاصه مسایل بهینه‌سازی فازی را مورد بررسی قرار می‌دهند و آن را با مسایل بهینه‌سازی احتمالی مقایسه می‌کنند.

در مسایل بهینه‌سازی احتمالی فرض بر این است که ضرایب مساله، متغیرهای تصادفی با توزیع‌های شناخته‌شده هستند. همچنین، در مسایل بهینه‌سازی فازی، ضرایب مساله به صورت اعداد فازی با توابع عضویت شناخته‌شده هستند. در هر صورت، در بسیاری از موارد، تعیین توابع توزیع و توابع عضویت در مسایل بهینه‌سازی احتمالی و فازی کار ساده‌ای نمی‌باشد. برای مثال بسیاری از محققان از توزیع‌های گوسی (نرمال) با پارامترهای مختلف در مسایل بهینه‌سازی احتمالی و توابع عضویت زنگوله‌ای شکل یا s-شکل در مسایل بهینه‌سازی فازی استفاده می‌کنند. این مشخصات نیز ممکن است وضعیت واقعی را به‌طور کامل منعکس نکنند. از این‌رو، برای سادگی در محاسبات، در فرمولبندی مساله و تعیین ضرایب مساله از اعداد بازه‌ای استفاده می‌شود. بنابراین، مسایل بهینه‌سازی بازه‌ای‌مقدار می‌تواند انتخاب دیگری برای ملاحظه عدم اطمینان در مسایل بهینه‌سازی باشد. در این مسایل، ضرایب مساله به صورت بازه‌های بسته فرض می‌شوند.

مطالعه چنین مسایلی را با یک مثال ساده توضیح می‌دهیم.

فرض کنید کارخانه‌ای پنج محصول $x_1, \dots, x_5$ را نسبت به چند محدودیت مالی تولید می‌کند. با توجه به تجربه گذشته و ارزیابی متخصص، با فروختن محصول x_i، $i=1,\dots,5$، کارخانه درآمدی بین a_i^L و a_i^U به دست می‌آورد که در آن $a_i^L < a_i^U$ ، $i=1,\dots,5$. به هر حال برای تولید محصول x_i، کارخانه تعدادی از منابع را مصرف خواهدکرد. مطابق با تجربه کارگران، تولید محصول x_i، $i=1,\dots,5$، مقداری از منابع را که بین b_i^L و b_i^U است، مصرف خواهدکرد که در آن $b_i^L < b_i^U$ برای $i=1,\dots,5$. مدیران این کارخانه سعی خواهندکرد که درآمد را بیشینه کنند، به‌علاوه مصرف منابع با توجه به محدودیت‌های مالی کمینه گردد. در این حالت، می‌توان مساله را به‌صورت زیر فرمولبندی کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad (f_1(x_1, \dots, x_5), f_2(x_1, \dots, x_5)) \\
&\text{subject to} \quad \mathrm{g_i}(x_1, \dots, x_5) \le \mathrm{c_i}\,, \qquad \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m} \\
&\qquad\qquad\quad x_1, \dots, x_5 \ge 0\,,
\end{aligned}
$$

که در آن هر c_i حد بالای بودجه محدودیت iام است و f_1 و f_2 توابع بازه‌ای‌مقداری هستند که به‌صورت زیر داده شده‌اند:

[10] Inuiguchi and Ramik

$f_1(x_1, \dots, x_5)$ =-$[\, a_1{}^{\mathrm{L}}, a_1{}^{\mathrm{U}}] x_1 \ominus [\, a_2{}^{\mathrm{L}}, a_2{}^{\mathrm{U}}] x_2 \ominus [\, a_3{}^{\mathrm{L}}, a_3{}^{\mathrm{U}}] x_3 \ominus [\, a_4{}^{\mathrm{L}}, a_4{}^{\mathrm{U}}] x_4 \ominus [\, a_5{}^{\mathrm{L}}, a_5{}^{\mathrm{U}}] x_5$,

و

$f_2(x_1, \dots, x_5) = [\, b_1{}^{\mathrm{L}}, b_1{}^{\mathrm{U}}] x_1 \oplus [\, b_2{}^{\mathrm{L}}, b_2{}^{\mathrm{U}}] x_2 \oplus [\, b_3{}^{\mathrm{L}}, b_3{}^{\mathrm{U}}] x_3 \oplus [\, b_4{}^{\mathrm{L}}, b_4{}^{\mathrm{U}}] x_4 \oplus [\, b_5{}^{\mathrm{L}}, b_5{}^{\mathrm{U}}] x_5$,

که در آن $\oplus$ و $\ominus$ به ترتیب به معنی جمع و تفریق دو بازه بسته هستند.

تئوری دوگان برای مسایل برنامه‌ریزی خطی نادقیق به‌وسیله سویستر[۱۱] [۳۳,۳۱] و تیوانت[۱۲] [۳۷] پیشنهاد شد. فالک[۱۳] [۱۱] چند خاصیت برای این مسایل به‌دست آورد. به هر حال پومرول[۱۴] [۲۵] نقایصی از نتایج سویستر را خاطر نشان کرد و همچنین چندین شرط برای بهبود نتایج سویستر به‌دست آورد.

مسایل بهینه‌سازی بازه‌ای مقدار رابطه نزدیکی با مسایل برنامه‌ریزی خطی نادقیق دارند. چارنس[۱۵] و سایرین [۸] مسایل برنامه‌ریزی خطی را که سمت راست محدودیت‌های نامساوی آن بازه‌های بسته بودند، مورد بررسی قرار دادند. استوئر[۱۶] [۳۶] سه الگوریتم برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار پیشنهاد کرد. بیترن[۱۷] [۶] درباره مرتبط بودن مجموعه نقاط گوشه کارا و وجود نقاط کارا در مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای بحث کرد و یک الگوریتم شمارشی ضمنی برای به‌دست آوردن جواب‌ها پیشنهاد داد. ایشی‌بوچی و تاناکا[۱۸] [۱۷] رابطه ترتیبی بین دو بازه بسته را با در نظر گرفتن مسایل ماکزیمم-سازی و مینیمم‌سازی به‌طور جداگانه پیشنهاد کردند. اینوی‌گوچی و کیوم[۱۹] [۱۴] چهار نوع مساله برنامه‌ریزی با ضرایب بازه‌ای را فرمولبندی و حل کردند که در آن مقادیر هدف به‌صورت بازه‌های بسته فرض می‌شوند. اینوی‌گوچی و ساکاوا[۲۰] [۱۶] مفهوم جواب پشیمانی مینیماکس را معرفی کردند و رابطه آن را با جواب‌های بهینه ضرورت (حتمی) و امکان (محتمل) مورد بررسی قرار دادند. مراز[۲۱] [۲۳] الگوریتم‌هایی برای محاسبه کران‌های دقیق پایین و بالای جواب‌های بهینه برای مسایل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای‌مقدار به‌دست آورد. چین‌نک و رامادان[۲۲] [۹] روشی برای یافتن بهترین جواب بهینه و بدترین جواب

[11] Soyster
[12] Thuente
[13] Falk
[14] Pomerol
[15] Charnes
[16] Steuer
[17] Bitran
[18] Ishibuchi and Tanaka
[19] Inuiguchi and Kume
[20] Inuiguchi and Sakawa
[21] Mraz
[22] Chinneck and Ramadan

بهینه پیشنهاد کردند. سن‌گوپتا [۲۳]و سایرین [۲۸] تابع $\mathcal{A}$-index را برای مقایسه دو بازه بسته پیشنهاد کردند و آن را برای تعریف یک سیستم معادل معمولی رضایتمند محدودیت نامساوی، با ضرایب بازه‌ای‌مقدار، استفاده کردند که در آن مفهوم جواب رضایتمند نیز تعریف شد. یورلی و نادیو[۲۴] [۳۸] روش موثری را برای تبدیل مسایل نادقیق به مسایل دقیق پیشنهاد کردند. چنس و کاچتا[۲۵] [۷] روشی را برای یکی‌کردن روش‌های جواب پیشنهادی به‌وسیله ایشی بوچی و تاناکا [۱۷]، رومل فنگر[۲۶] و سایرین [۲۷] ارایه دادند. همچنین، مساله انتخاب سهم با توابع هدف بازه‌ای به‌وسیله ایدا[۲۷] [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. اخیراً اولیوریا و آنتیونس[۲۸] [۲۴] یک برداشت کلی از مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با ضرایب بازه‌ای به وسیله مثال‌های عددی ارایه دادند.

در این پایان‌نامه، مساله برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار را معرفی می‌کنیم. سپس، دو رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه بازه‌های بسته تعریف می‌شوند. بر اساس این روابط ترتیبی، چند مفهوم از جواب بهینه پارتو برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار پیشنهاد می‌شوند. تشخیص بهینه‌بودن یک نقطه شدنی در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار با توجه به تعریف جواب بهینه پارتو و اینکه تعداد نقاط فضای شدنی در حالت کلی نامتناهی است، کار پیچیده، زمانبر و مشکلی می‌باشد. بنابراین به یک دسته شرایط کافی نیاز داریم که با بررسی آن‌ها به‌راحتی بتوان در مورد بهینه‌بودن یا عدم‌بهینگی آن نقطه بدون مقایسه این نقطه با نقاط دیگر نظر داد. در این پایان‌نامه، هدف اصلی ارایه چنین شرایط کافی برای تشخیص بهینگی یک نقطه شدنی در مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار است. بدین منظور، شرایط بهینگی کروش- کان- تاکر (KKT) مندرج در [۴] را برای مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با توابع هدف بازه‌ای مقدار تعمیم می‌دهیم. اما قبل از آن، ابتدا شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر برای مسایل بهینه‌سازی تک‌هدفه با تابع هدف بازه‌ای‌مقدار به‌دست آورده می‌شود. برای این منظور، لازم است که مفهوم پیوستگی و مشتق‌پذیری یک تابع بازه‌ای‌مقدار را تعریف کنیم. از این‌رو، متر هاسدورف و تفاضل هاکوهارا را برای تعریف فاصله بین دو بازه بسته و تعریف تفاضل بین دو بازه بسته استفاده می‌کنیم. با استفاده از این تعاریف، پیوستگی و مشتق‌پذیری یک تابع بازه‌ای مقدار را تعریف می‌کنیم. سرانجام شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر را برای مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با توابع هدف بازه‌ای‌مقدار به‌دست می‌آوریم.

[23] Sengupta
[24] Urli and Nadeau
[25] Chanas and Kuchta
[26] Rommelfanger
[27] Ida
[28] Oliveria and Antunes

مطالب این پایان‌نامه در چهار فصل به‌صورت زیر سازماندهی می‌شود.

در فصل اول برخی از مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی توابع حقیقی و برخی از خواص پایه‌ای و حساب بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. متر هاسدوف و تفاضل هاکوهارا برای تعریف فاصله بین دو بازه بسته و تعریف تفاضل بین دو بازه بسته استفاده می‌شود و با استفاده از این تعاریف، پیوستگی و مشتق‌پذیری یک تابع بازه‌ای مقدار تعریف می‌شود. در فصل دوم شرایط لازم و کافی کروش-کان-تاکر (KKT) برای توابع حقیقی بیان می‌شود. در فصل سوم یک رابطه ترتیبی بین دو بازه بسته در $\mathbb{R}$ پیشنهاد می‌شود و خواهیم دید که این رابطه بر روی کلاس همه بازه‌های بسته یک رابطه ترتیبی کلی نیست. در این فصل جواب‌های نوع اول و نوع دوم را معرفی می‌کنیم و شرایط بهینگی KKT را در مسایل بهینه‌سازی تک هدفه با تابع هدف بازه‌ای مقدار برای این جواب‌ها ارایه خواهیم‌کرد. در فصل چهارم براساس روابط ترتیبی پیشنهادشده در فصل سوم چند مفهوم از جواب بهینه پارتو برای مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با توابع هدف بازه‌ای مقدار پیشنهاد می‌شود و در نهایت شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر (KKT) را برای این‌گونه مسایل بهینه‌سازی ارایه می‌دهیم.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱. مقدمه

برای مدلبندی بسیاری از مسایل عملی و کاربردی که در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد، نمی‌توان پارامترهای مساله را به‌طور دقیق مشخص کرد. از این‌رو، برای بیان دقیقتر پدیده‌ها و وقایع دنیای واقعی ناگزیر هستیم که از داده‌های غیرقطعی برای مدلبندی آن‌ها استفاده کنیم. اعداد فازی و متغیرهای تصادفی ابزارهایی برای بیان داده‌های غیرقطعی می‌باشد. اما تعیین توابع عضویت اعداد فازی یا توابع توزیع متغیرهای تصادفی به سادگی امکان پذیر نمی‌باشد و انجام عملیات محاسباتی بر روی این‌گونه داده‌ها به سادگی اعداد حقیقی نیست. از این رو، بازه‌های بسته را که ابزار ساده‌تری نسبت به اعداد فازی و متغیرهای تصادفی می‌باشد برای بیان داده-های غیرقطعی به‌کار می‌بریم. دلایل استفاده از داده‌های بازه‌ای برای بیان عدم قطعیت به‌جای اعداد فازی یا متغیرهای تصادفی به شرح زیر است:

الف- بیان داده‌های غیرقطعی به وسیله بازه‌های بسته ساده‌تر می‌باشد.

ب- انجام عملیات ریاضی روی این‌گونه داده‌ها ساده‌تر است.

ج- مدلبندی پدیده‌ها به‌وسیله بازه‌های بسته آسان‌تر است.

د- روش‌های حل مدل‌های بازه‌ای پیچیدگی کمتری دارد.

اکنون که به تعدادی از مزیت‌های استفاده از داده‌های بازه‌ای پی بردیم، برخی از مفاهیم

و عملیات ریاضی مرتبط با بازه‌های بسته را که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم معرفی می‌کنیم.

۱-۲. مساله برنامه‌ریزی غیرخطی

هر مساله برنامه‌ریزی غیرخطی را می‌توان به صورت زیر فرمولبندی کرد:

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathrm{x}) \\ \text{subject to} & \mathrm{x} \in \mathrm{S}, \end{array} \qquad (۱-۱)$$

که در آن تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و مجموعه S، که در آن $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^n$، مجموعه جواب‌های شدنی را نشان می‌دهد.

اکنون مفهوم جواب بهینه[۲۹] برای مساله (۱-۱) را در زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. [۴] مساله (۱-۱) را در نظر بگیرید. اگر $\bar{\mathrm{x}} \in \mathrm{S}$ و $f(\mathrm{x}) \geq f(\bar{\mathrm{x}})$ برای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$، در این صورت $\bar{\mathrm{x}}$ یک جواب بهینه، یک جواب بهینه سراسری[۳۰]، یا به طور ساده یک جواب برای مساله (۱-۱) گفته می‌شود. اگر $\bar{\mathrm{x}} \in \mathrm{S}$ و یک ε-همسایگی $\mathrm{N}_\varepsilon(\bar{\mathrm{x}})$ حول $\bar{\mathrm{x}}$ موجود باشد به طوری‌که $f(\mathrm{x}) \geq f(\bar{\mathrm{x}})$ برای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{S} \cap \mathrm{N}_\varepsilon(\bar{\mathrm{x}})$، آنگاه $\bar{\mathrm{x}}$ یک جواب بهینه موضعی نامیده می‌شود.

نتیجه زیر، یک نتیجه مستقیم از تعریف (۱-۱) است.

نتیجه ۱.۱. [۴] مینیمم سراسری[۳۱] f، مینیمم موضعی[۳۲] f نیز می‌باشد.

یکی از شرایطی که اطمینان می‌دهد مینیمم موضعی f، مینیمم سراسری f نیز باشد محدب‌بودن تابع f است. تعمیم‌های متعددی از مفهوم محدب‌بودن ارایه شده است که در قسمت بعدی به آن می‌پردازیم و اهمیت آن را در تعیین جواب‌های بهینه سراسری توضیح می‌دهیم.

[29] Optimal solution
[30] Global optimal solution
[31] Global minimum
[32] Local minimum

۱-۳. تعریف تابع محدب و تعمیم‌های آن

یکی از مفاهیم مهم در بهینگی، محدب‌بودن یا مقعربودن تابع f می‌باشد که تعریف آن را در زیر ارایه می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. [۴] فرض کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ و تابع $f:\mathrm{S}\rightarrow\mathbb{R}$ باشد. تابع f در S محدب است اگر

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}, \forall\lambda\in(0,1): f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad (۱-۲)$$

اگر "$\le$" در رابطه فوق به "$<$" تبدیل شود، تابع f را محدب اکید می‌گوییم.

مفهوم مفید دیگر در بهینه‌سازی، مفهوم محدب‌بودن در یک نقطه[۳۳] است. در بعضی اوقات، شرط محدب‌بودن تابع ممکن است خیلی قوی باشد و به شرط ضعیف‌تری، مثل محدب بودن تابع در یک نقطه نیاز داشته باشیم. این مفهوم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ و تابع $f:\mathrm{S}\rightarrow\mathbb{R}$ تعریف شود. تابع f در $\bar{\mathrm{x}}\in\mathrm{S}$ محدب گفته می‌شود اگر

$$\forall \mathrm{x}\in \mathrm{S}, \forall\lambda\in(0,1): f[\lambda\bar{\mathrm{x}} + (1-\lambda)\mathrm{x}] \le \lambda f(\bar{\mathrm{x}}) + (1-\lambda) f(\mathrm{x}), \quad (۱-۳)$$

نکته ۱.۱. [۴] فرض‌کنید f یک تابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر تعریف‌شده روی یک زیر مجموعه غیرتهی باز و محدب S از $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ باشد. آنگاه، f در $\bar{\mathrm{x}}\in\mathrm{S}$ محدب است اگر و تنها اگر

$$\forall \mathrm{x}\in \mathrm{S}, \quad f(\mathrm{x}) \ge f(\bar{\mathrm{x}}) + \nabla f(\bar{\mathrm{x}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}}), \quad (۱-۴)$$

یعنی،

$$\forall \mathrm{x}\in \mathrm{S}, \quad f(\mathrm{x}) - f(\bar{\mathrm{x}}) \ge \nabla f(\bar{\mathrm{x}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}}), \quad (۱-۵)$$

بنابراین می‌بینیم که اگر $f(\mathrm{x}) \le f(\bar{\mathrm{x}})$ آنگاه

$$\forall \mathrm{x}\in \mathrm{S}, \quad \nabla f(\bar{\mathrm{x}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}}) \le 0, \quad (۱-۶)$$

همچنین اگر $f(\mathrm{x}) < f(\bar{\mathrm{x}})$ آنگاه $\nabla f(\bar{\mathrm{x}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}-\bar{\mathrm{x}}) < 0$.

اکنون اهمیت محدب‌بودن تابع در یک نقطه را در تعیین جواب‌های بهینه سراسری با گزاره‌های زیر بیان می‌کنیم.

---

[33] Convexity at a point

گزاره ۱.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در $\bar{x} \in S$ مشتق‌پذیر و محدب باشد. در این صورت،

$$\forall x \in S, \quad f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}), \tag{۷-۱}$$

گزاره ۲.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و تابع $f: S \to \mathbb{R}$ در $\bar{x} \in S$ محدب باشد. همچنین، $\bar{x}$ یک جواب بهینه مساله (۱-۱) باشد. در این صورت، $\bar{x}$ یک جواب بهینه سراسری مساله (۱-۱) است.

گزاره ۳.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد و تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در $\bar{x} \in S$ مشتق‌پذیر و محدب باشد. همچنین $\bar{x}$ یک جواب بهینه برای مساله (۱-۱) باشد. در این صورت

$$\forall x \in S, \quad \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \tag{۸-۱}$$

یک تعمیم از تعریف محدب‌بودن تابع f، نیمه محدب‌بودن در یک نقطه[۳۴] است که در بخش‌های بعدی به آن نیاز داریم و تعریف آن در زیر ارایه می‌شود.

تعریف ۴.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f: S \to \mathbb{R}$ باشد. تابع f را در $\bar{x} \in S$ نیمه‌محدب می‌گوییم اگر

$$\forall x \in S, \forall \lambda \in (0,1): f[\lambda \bar{x} + (1-\lambda)x] \leq \max\{f(x), f(\bar{x})\}, \tag{۹-۱}$$

تعریف ۵.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : S \to \mathbb{R}$ در $\bar{x} \in S$ مشتق‌پذیر باشد. تابع f در $\bar{x}$ شبه‌محدب[۳۵] است اگر $f(x) \leq f(\bar{x})$ آنگاه

$$\forall x \in S, \quad \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0, \tag{۱۰-۱}$$

همچنین f در $\bar{x}$ شبه‌محدب اکید[۳۶] است اگر $f(x) < f(\bar{x})$ آنگاه

$$\forall x \in S, \quad \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) < 0, \tag{۱۱-۱}$$

نکته ۲.۱. [۴] یادآوری می‌کنیم که خاصیت محدب اکید[۳۷]، خاصیت شبه‌محدب اکید را نتیجه می‌دهد.

[34] Quasiconvexity at a point
[35] Pseudoconvex
[36] Strictly pseudoconvex
[37] Strictly convex

خاصیتی از یک تابع نیمه‌محدب در یک نقطه را در گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۴.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در $\bar{x} \in S$ نیمه‌محدب و مشتق‌پذیر باشد. همچنین ، $x \in S$ به گونه‌ای باشد که $f(x) \leq f(\bar{x})$ در این صورت

$$\forall x \in S, \quad \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0, \tag{۱۲-۱}$$

تعمیم دیگری از تعریف محدب‌بودن تابع f، شبه‌محدب‌بودن در یک نقطه است که تعریف آن در زیر آورده می‌شود.

تعریف ۶.۱. [۴] فرض‌کنید S یک مجموعه محدب ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. تابع f در $\bar{x} \in S$ شبه‌محدب است اگر برای $x \in S$، $\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \leq 0$ ایجاب کند که $f(x) \leq f(\bar{x})$.

۴-۱. حساب اعداد بازه‌ای

فرض کنید $K_c(\mathbb{R})$ کلاس همه زیرمجموعه‌های محدب و فشرده $\mathbb{R}$ است. فرض‌کنید $A, B \in K_c(\mathbb{R})$ باشند. در این صورت $A+B$ به‌صورت زیر تعریف می شود،

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \tag{۱۳-۱}$$

و $-A$ نیز به‌وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود،

$$-A = \{-a : a \in A\}, \tag{۱۴-۱}$$

بنابراین، تفاضل A و B را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد،

$$A - B = A + (-B), \tag{۱۵-۱}$$

حال فرض‌کنید Φ کلاس همه بازه‌های بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، زمانی که می‌گوییم A بازه بسته است به‌طور ضمنی به این معنی است که A در $\mathbb{R}$ کراندار است.

اگر A یک بازه بسته باشد آن را با نماد $A=[a^L, a^U]$ نشان می‌دهیم که در آن a^L و a^U به ترتیب کران‌های پایین و بالای A هستند.