دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دکتری

ریاضی محض

عنوان

برخی قضایای نقطه ثابت توابع چندمقداری در فضاهای متریک مرتب

نگارش

فاطمه ثابت قدم

استاد راهنما

دکتر سید هاشم پروانه مسیحا

استاد مشاور

دکتر کوروش نوروزی

۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر عزیز و مادر فداکارم

تقدیر و سپاسگزاری:

از جناب آقای دکتر سید هاشم پروانه مسیحا برای کوشش‌های فراوانش در این سالها بسیار سپاسگزارم. همچنین از آقایان، دکتر شهرام رضاپور، دکتر سید منصور واعظ پور، دکتر حسن حقیقی، دکتر کوروش نوروزی و سرکار خانم دکتر ملیحه حسینی که داوری پایان نامه را به عهده گرفتند، بسیار متشکرم.

چکیده

هدف این پایان نامه ارائه یک سری قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های تک‌مقداری و چندمقداری در فضاهای مجهز به یک رابطه ترتیب جزئی و تعمیم برخی نتایج موجود در این زمینه است که در فصل سوم به شرح و تفصیل آن می‌پردازیم.

در بخش اول از فصل سوم، با توجه به مفهوم ϕ–انقباضی ضعیف و همچنین مفهوم یک نگاشت دوری روی یک فضای متریک مرتب قضایایی را برای وجود نقطه ثابت برای یک نگاشت مانند T در دو حالت صعودی و نزولی اثبات کردیم. در بخش دوم از این فصل، نتایجی برای نگاشت‌های تعریف شده روی یک فضای متریک جزئی مرتب که در شرایط انقباضی از نوع انتگرالی و انقباضی ضعیف صدق می‌کنند ارائه می‌دهیم و در بخش آخر با در نظر گرفتن شرایط c–انقباضی معرفی شده توسط چاتریا و مفهوم انقباضی ضعیف و ترکیب این دو مفهوم، وجود نقطه ثابت را برای یک نگاشت چندمقداری بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی. نقطه ثابت، توابع تک‌مقداری، توابع چندمقداری، متر هاسدورف، فضای متریک کامل، فضای متریک مرتب کامل، انقباض های دوری، متر جزئی، فضای متریک جزئی مرتب.

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه نقطه ثابت حوزه‌ی وسیعی از تحقیقات همراه با دامنه گسترده‌ای از کاربردها در زمینه‌های مختلف را به خود اختصاص داده است. نتایجی که تحت شرایط خاص وجود یک یا بیشتر از یک نقطه ثابت را برای یک نگاشت روی مجموعه‌ای مانند X بیان می‌کنند، نظریه نقطه ثابت را تشکیل می‌دهند. این نکته حائز اهمیت است که، بسیاری از قضایای نقطه ثابت اثبات‌هایی ساختنی دارند که قضایا را به دلیل وجود یک الگوریتم برای محاسبه نقطه ثابت ارزشمند می‌سازند. کاربردهای قضایای نقطه ثابت در استاتیک، مهندسی، اقتصاد، نظریه تقریب، نظریه بازی‌ها، نظریه معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال بسیار چشم‌گیر است، از این رو این نظریه موضوع تحقیق ریاضیدانان بسیاری بوده و هنوز تحقیق و پژوهش در این نظریه به قوت خود باقی است.

در فصل اول این پایان‌نامه به مرور و یادآوری برخی تعاریف و قضایای نقطه ثابت برای توابع تک‌مقداری و چندمقداری در فضای متریک کامل خواهیم پرداخت و با مقایسه نتایج و ارائه مثال این مفاهیم را روشن‌تر می‌سازیم.

در فصل دوم، تاریخچه‌ای از نظریه نقطه ثابت را روی فضای متریک مجهز به یک رابطه ترتیب جزئی بیان کرده و به ارائه برخی قضایای موجود در این زمینه می‌پردازیم.

در مقالات [۳۰] و [۳۱] با در نظر گرفتن نگاشت‌های دوری روی یک فضای متریک مرتب قضایایی را برای وجود نقطه ثابت برای این نگاشت‌ها در دو حالت صعودی و نزولی اثبات کردیم. در بخش اول در فصل سوم به شرح و تفصیل نتایج موجود در این مقالات می‌پردازیم.

در بخش دوم این فصل ابتدا مفهوم متر جزئی را تعریف و برخی خواص آن را بیان کرده و به بیان قضایای موجود در مقالات [۴۴] و [۶۲] می‌پردازیم.

نتایج بیان شده در بخش آخر این فصل نیز بر اساس مقاله [۶۳] و نتایج [۶۴] می‌باشد.

فصل ۱

نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک

۱.۱ قضایای نقطه ثابت برای توابع تک‌مقداری

در این بخش، تاریخچه‌ای از نظریه نقطه ثابت را برای توابع تک‌مقداری روی یک فضای متریک کامل بیان و با ارائه برخی قضایای موجود این مفاهیم را روشن‌تر می‌سازیم.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و T نگاشتی از X بتوی X است. نگاشت T یک نگاشت انقباضی نامیده می‌شود اگروتنهااگر یک عدد ثابت $0 < \lambda < 1$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

در سال ۱۹۲۲، باناخ [۱] قضیه مهم زیر را بیان و اثبات کرد:

قضیه ۱.۱.۱. ([۱۲]، *Banach*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و T یک خود نگاشت انقباضی روی X باشد. در این صورت نقطه یکتای $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $Tx_0 = x_0$ و برای هر $x \in X$،* $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$.

به دلیل کاربردهای وسیع نقطه ثابت، بعد از آن محققان زیادی به مطالعه در زمینه نقطه ثابت علاقه‌مند شدند و با تعمیم‌های گوناگون و در نظر گرفتن شرایط انقباضی کلی‌تر مقالات فراوانی در این راستا منتشر کردند. در ادامه چند تعمیم از اصل انقباض باناخ را ارائه خواهیم داد.

بعد از بیان اصل انقباض باناخ، برخی از محققین به جای ثابت λ در تعریف نگاشت انقباضی یک تابع $\lambda(x, y)$ را که $(0 \leq \lambda(x, y) < 1)$ و $\sup \lambda(x, y) = 1$ است را در نظر گرفته و ثابت کردند نتیجه نقطه ثابت باناخ

[۱] Banach

همچنان برقرار است.

در سال ۱۹۶۱، ادلشتاین [۲] رسته نگاشت‌های زیر را معرفی کرد:

تعریف ۲.۱.۱. [۲۵] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $T : X \to X$ نگاشتی تک‌مقداری باشد. نگاشت T را (ε, λ)–به طور یکنواخت موضعاً انقباضی گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و $۰ \leq \lambda < ۱$ داشته باشیم

$$۰ < d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

تعریف ۳.۱.۱. [۲۵] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $\varepsilon > ۰$ عددی دلخواه است، در این صورت (X, d) را ε–زنجیرپذیر [۳] گوییم هرگاه برای هر دو نقطه $a, b \in X$ یک ε–زنجیر از a تا b وجود داشته باشد؛ منظور از یک ε–زنجیر، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $x_۰, x_۱, \ldots, x_n \in X$ است که $x_۰ = a, x_n = b$ و برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $d(x_{i-۱}, x_i) < \varepsilon$.

مثال ۱. بازه بسته $[a, b]$ در $(\mathbb{R}, |.|)$ برای هر $\varepsilon > ۰$، ε–زنجیر پذیر است.

قضیه ۴.۱.۱. ([۲۵]، *Edelstein*) *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل ε–زنجیرپذیر و $T : X \to X$ یک نگاشت (ε, λ)–به طور یکنواخت موضعاً انقباضی باشد، در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

در سال ۱۹۶۸، کانان [۴] شرایط انقباضی زیر را برای یک نگاشت $T : X \to X$ و هر $x, y \in X$ معرفی کرد:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad ۰ < \alpha < \frac{۱}{۲}. \tag{۱.۱.۱}$$

قضیه ۵.۱.۱. ([۳۷]، *Kanan*) *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت تک‌مقداری باشد که در شرایط انقباضی (۱.۱.۱) صدق می‌کند، در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

بوضوح نگاشت‌هایی که در شرایط انقباضی باناخ صدق می‌کنند پیوسته هستند. اما در زیر مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد نگاشت‌هایی با شرایط انقباضی از نوع کانان لزوماً پیوسته نیستند.

مثال ۲. فرض کنید $X = [۰, ۴]$ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی همراه با متر معمولی $d(x, y) = |x - y|$ است. نگاشت $T : X \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{۳}, & x \leq ۳ \\ \frac{x}{۴}, & ۳ < x \leq ۴ \end{cases}$$

[۲] Edelstein
[۳] ε-chainable
[۴] Kanan

برای $x, y \in [0, 3]$ داریم

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{3}|x-y| = \frac{1}{3}|x - Tx + Tx - Ty + Ty - y|$$
$$\leq \frac{1}{3}[d(x, Tx) + d(Tx, Ty) + d(y, Ty)].$$

بنابراین

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}[d(x, Tx) + d(y, Ty)],$$

به طور مشابه برای $x, y \in (3, 4]$ نیز می‌توان نامساوی بالا را به دست آورد. حال فرض کنید $x \in [0, 3]$ و $y \in (3, 4]$. در این صورت

$$d(Tx, Ty) = |\frac{x}{3} - \frac{x}{4}| \leq 1 < 1/125 \leq \frac{1}{2}d(y, Ty).$$

واضح است که نامساوی مشابهی برای $x \in (3, 4]$ و $y \in [0, 3]$ برقرار می‌باشد. بنابراین T در شرایط انقباضی کانان (۱.۱.۱) صدق می‌کند در حالی که پیوسته نیست.

در سال ۱۹۶۹، میر [5]– کیلر [6] قضیه زیر را که در واقع یکی از توسیع‌های پرقدرت اصل انقباض باناخ است، ارائه نمودند.

قضیه ۶.۱.۱. ([۴۶]، *Meir-Keeler*) *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T : X \to X$ در شرط زیر صدق کند*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad (\epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \epsilon),$$

در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

ملاحظه ۱. قضیه‌ی بالا توسیعی از اصل انقباض باناخ (۱.۱.۱) است. در واقع، فرض کنید نگاشت T یک نگاشت انقباضی با ثابت α است و δی مورد نیاز در این قضیه را به صورت $\delta < (\frac{1}{\alpha} - 1)\epsilon$ در نظر می‌گیریم. از انقباضی بودن T نتیجه می‌شود که برای هر $x, y \in X$ رابطه $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ برقرار است. بویژه برای x و y های با فاصله بیشتر از ϵ و کمتر از $\epsilon + \delta$. بنابراین، برای چنین x و y هایی داریم

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha(\epsilon + \delta) < \alpha(\epsilon + (\frac{1}{\alpha} - 1)\epsilon) = \epsilon.$$

[5] Meir
[6] Keeler

در سال ۱۹۶۹، بوید[۷] و وانگ[۸] در [۱۶] مفهوم ϕ-انقباضی را به صورت زیر معرفی کردند

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است، نگاشت تک‌مقداری T را ϕ-انقباضی گوییم اگر تابع نیم-پیوسته بالایی $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ با شرط $\phi(t) < t$ موجود باشد به طوری که برای هر $x,y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq \phi(d(x,y)),$$

و ثابت کردند اگر T یک نگاشت ϕ-انقباضی روی یک فضای متریک کامل باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

در سال ۱۹۷۲، چاتریا[۹] قضیه‌ی زیر را بیان و ثابت کرد

قضیه ۱.۱.۷. ([۱۹]، *Chatterjea*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت c-انقباضی باشد، یعنی برای هر $x,y \in X$،*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha[d(x,Ty)+d(y,Tx)], \qquad \alpha \in (0,\tfrac{1}{2})$$

در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

در سال ۱۹۷۳، گراختی[۱۰] با در نظر گرفتن تابع $\beta : [0,+\infty) \to [0,1)$ با این شرط که

$$\lim_{n\to\infty} \beta(t_n) = 1 \Rightarrow t_n \to 0,$$

که در آن، t_n دنباله‌ای دلخواه در $[0,+\infty)$ است، قضیه‌ی زیر را بیان و ثابت کرد.

قضیه ۱.۱.۸. ([۲۹]، *Geraghty*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ یک نگاشت تک‌مقداری است، که برای هر $x,y \in X$ در شرط انقباضی زیر صدق کند*

$$d(Tx,Ty) \leq \beta(d(x,y)).d(x,y),$$

در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

اگر برای هر $t \geq 0$، قرار دهیم $\beta(t) = \frac{1}{1+t}$ یا $\beta(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$، آن‌گاه تابع β در شرط تعریف شده توسط گراختی صدق می‌کند.

[۷] Boyd
[۸] Wong
[۹] Chatterjea
[۱۰] Geraghty

در سال ۱۹۹۷، آلبر[۱۱] و دلابریر[۱۲] در [۳] مفهوم ϕ-انقباضی ضعیف را برای یک نگاشت برروی فضاهای هیلبرت[۱۳] تعریف کرده و وجود نقطه ثابت را در این فضاها اثبات کردند. یادآوری می‌کنیم که، نگاشت تک‌مقداری T روی یک فضای متریک Xرا ϕ-انقباضی ضعیف گویند، اگر تابع اکیداً صعودی $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ که $\phi(0) = 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi(d(x,y)).$$

در سال ۲۰۰۱، رودز[۱۴] در [۵۹] ثابت کرد که اگر در نتیجه بیان شده در مقاله [۳]، یک فضای باناخ دلخواه را جایگزین فضای هیلبرت کنیم، نتایج درست خواهد بود. همچنین، در قضیه‌ی زیر تعمیمی از اصل انقباض باناخ ارائه داد:

قضیه ۹.۱.۱. ([۵۹]، *Rhoades*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و T یک نگاشت ϕ-انقباضی روی X است. اگر تابع $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ یک تابع پیوسته، صعودی باشد به طوری که برای هر $t > 0$، $\phi(t) > 0$ و $\phi(0) = 0$، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

اگر ϕ یک تابع نیم-پیوسته پایینی از راست باشد، آن‌گاه تابع ψ تعریف شده به صورت $\psi(t) = t - \phi(t)$ یک تابع نیم-پیوسته بالایی از راست است و بعلاوه، $d(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y))$ بنابراین با تعریف ϕ به صورت خاص در واقع نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف همان نگاشت انقباضی از نوع بوید و وانگ است. از طرفی اگر برای $k \in (0,1)$ قرار دهید $\phi(t) = (1-k)t$ در این صورت اصل انقباض باناخ را خواهیم داشت.

در سال ۲۰۰۲، برانچاری [۱۵] قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ را برای نگاشت‌هایی که در شرایط انقباضی از نوع انتگرالی صدق می‌کنند به صورت زیر تعمیم داد.

قضیه ۱۰.۱.۱. ([۱۷]، *Branciari*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل، $c \in (0,1)$ و $T : X \to X$ یک نگاشت تک‌مقداری است به طوری که برای هر $x, y \in X$،*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt, \tag{۲.۱.۱}$$

[۱۱] Alber
[۱۲] Guerre-Delabriere
[۱۳] Hilbert
[۱۴] Rhoades
[۱۵] Branciari

که در آن $\varphi : [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ است به طوری که روی هر زیر مجموعه فشرده از $[\circ, +\infty)$ جمع‌پذیر، نامنفی و برای هر $\varepsilon > \circ$، $\int_\circ^\varepsilon \varphi(t)dt > \circ$. در این صورت T یک نقطه ثابت یکتای x^* دارد و برای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

قضیه‌ی بالا، نتیجه اصلی مقاله [۱۷] است. اثبات قضیه مشابه روندی است که در اثبات قضیه‌ی ۱ در مقاله بوید و وانگ [۱۶] آورده شده است.

ملاحظه ۲. قضیه‌ی (۱۰.۱.۱) تعمیمی از اصل انقباض باناخ است، در واقع اگر برای هر $t \geq \circ$ قرار دهیم $\varphi(t) = ۱$، داریم

$$\int_\circ^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt = d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) = c\int_\circ^{d(x,y)} \varphi(t)dt, \tag{۳.۱.۱}$$

بنابراین اصل انقباض باناخ در (۲.۱.۱) صدق می‌کند. اما مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب درست نیست.

مثال ۳. مجموعه $X := \{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\circ\}$ را همراه با متر معمولی $d(x, y) = |x - y|$ روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. واضح است که (X, d) یک فضای متریک کامل است. نگاشت $f : X \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$fx = \begin{cases} \frac{۱}{n+۱} & x = \frac{۱}{n}\ (n \in \mathbb{N}), \\ \circ & x = \circ, \end{cases}$$

اگر قرار دهیم، $\varphi(t) = t^{\frac{۱}{t-۲}} |۱ - \log t|$، آن‌گاه برای هر $t > \circ$ ، $\varphi(\circ) = \circ$ و $c = \frac{۱}{۲}$. بنابراین شرط انقباضی (۲.۱.۱) برقرار است. در حالی که $\int_\circ^\tau \varphi(t)dt = \tau^{\frac{۱}{\tau}}$ برای $x \neq y$ شرایط (۲.۱.۱) هم‌ارز است با

$$d(fx, fy)^{\frac{۱}{d(fx,fy)}} \leq cd(x, y)^{\frac{۱}{d(x,y)}}. \tag{۴.۱.۱}$$

حال ثابت می‌کنیم رابطه (۴.۱.۱) برقرار است. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ و $m > n$. قرار دهید $x = \frac{۱}{n}$ و $y = \frac{۱}{m}$. داریم

$$\begin{aligned} d(fx, fy)^{۱/d(fx,fy)} &= |\frac{۱}{n+۱} - \frac{۱}{m+۱}|^{۱/|\frac{۱}{(n+۱)} - \frac{۱}{(m+۱)}|} \\ &= [\frac{m-n}{(n+۱)(m+۱)}]^{(n+۱)(m+۱)/(m-n)} \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$d(x, y)^{۱/d(x,y)} = |\frac{۱}{n} - \frac{۱}{m}|^{۱/|\frac{۱}{n} - \frac{۱}{m}|} = [\frac{m-n}{mn}]^{nm/(m-n)}.$$

حال نشان می‌دهیم

$$[\frac{m-n}{(n+۱)(m+۱)}]^{(n+۱)(m+۱)/(m-n)} \leq \frac{۱}{۲}[\frac{m-n}{nm}]^{nm/(m-n)},$$

یا به طور هم‌ارز،

$$[\frac{m-n}{(n+۱)(m+۱)}]^{(n+m+۱)/(m-n)}.[\frac{nm}{(n+۱)(m+۱)}]^{nm/(m-n)} \leq \frac{۱}{۲}.$$

در رابطه بالا با تحلیل دومین عضو داریم

$$[\frac{nm}{(n+۱)(m+۱)}]^{nm/(m-n)} \leq ۱,$$

چون $nm < (n+۱)(m+۱)$ و $nm/(m-n) > ۰$، و همچنین

$$[\frac{m-n}{(n+۱)(m+۱)}]^{(n+m+۱)/(m-n)} \leq \frac{۱}{۲} \tag{۵.۱.۱}$$

چون برای هر $n, m \in \mathbb{N}$، $m \leq ۳n + mn + ۱$، بنابراین $۲(m-n) \leq (n+۱)(m+۱)$، در حالی که چون برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $n + m + ۱ > m - n$ بنابراین توان بزرگتر از یک است. از طرف دیگر، $x = \frac{۱}{n}$ و $y = ۰$ را در نظر بگیرید، در این صورت

$$d(fx, fy)^{۱/d(fx,fy)} = [\frac{۱}{n+۱}]^{n+۱} \leq \frac{۱}{۲}[\frac{۱}{n}]^{n} = \frac{۱}{۲}d(x, y)^{۱/d(x,y)},$$

چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\frac{n}{n+۱} < ۱$ و $\frac{۱}{n+۱} \leq \frac{۱}{۲}$ داریم

$$[\frac{n}{n+۱}]^{n}.\frac{۱}{n+۱} \leq \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه، نگاشت f در شرط (۴.۱.۱) با $c = \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند. در واقع می‌توان گفت که با c و φ تعریف شده شرایط انقباضی (۲.۱.۱) را خواهیم داشت. اما

$$\sup_{\{x,y \in X | x \neq y\}} \frac{d(fx, fy)}{d(x, y)} = ۱,$$

بنابراین اصل انقباض باناخ برقرار نمی‌باشد.

ملاحظه ۳. اگر مقدار صفر را تقریباً همه جا برای نگاشت φ در نظر بگیریم، آن‌گاه قضیه‌ی (۱۰.۱.۱) برقرار نمی‌باشد. بعلاوه، اگر φ مقادیر منفی بپذیرد نتیجه قضیه‌ی (۱۰.۱.۱) درست نیست. در ادامه دو مثال برای درستی این مطلب ارائه می‌دهیم.

مثال ۴. مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را همراه با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ و $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ به صورت زیر تعریف شده باشند

$$fx=\begin{cases} ۱, & x\neq ۱,\\ ۲, & x=۱. \end{cases} \qquad \varphi(t)=\begin{cases} e^{۱/(۱-t)}, & t>۱,\\ ۰, & t\in[۰,۱]. \end{cases}$$

چون برای هر $x,y\in\mathbb{N}$، $d(fx,fy)\leq ۱$ در این صورت برای یک $c\in(۰,۱)$ دلخواه داریم

$$\int_۰^{d(fx,fy)}\varphi(t)dt\leq\int_۰^۱\varphi(t)dt=۰\leq c\int_۰^{d(x,y)}\varphi(t)dt.$$

در نتیجه شرایط انقباضی (۲.۱.۱) برای هر $c\in(۰,۱)$ برقرار است، اما f نقطه ثابت ندارد.

مثال ۵. مجموعه $[۰,+\infty)$ را همراه با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. فرض کنید $f:[۰,+\infty)\to[۰,+\infty)$ تعریف شده به صورت $fx:=x+۱$ و $\varphi(t)=-۱$ است. برای هر $c\in(۰,۱)$ داریم

$$\int_۰^{d(fx,fy)}\varphi(t)dt=-d(fx,fy)\leq-d(x,y)\leq-cd(x,y)=c\int_۰^{d(x,y)}\varphi(t)dt,$$

در نتیجه (۲.۱.۱) برقرار است اما f نقطه ثابت ندارد.

بعد از بیان قضیه‌ی (۱۰.۱.۱) مقالات متعددی در ارتباط با وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌هایی که در شرایط انقباضی از نوع انتگرالی صدق می‌کنند، ارائه شد. (به مقالات [۴]، [۷]، [۳۴]، [۲۴]، [۶۰]، [۶۷] رجوع کنید)

در سال ۲۰۰۳، کِرک[۱۶] و دیگران مفهوم عملگر دوری را روی زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از یک فضای متریک (X,d) به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۱۱.۱.۱. [۴۱] فرض کنید $\{A_i\}_{i=۱}^p$ زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از یک فضای متریک (X,d) باشند. نگاشت $T:\cup_{i=۱}^pA_i\to\cup_{i=۱}^pA_i$ یک نگاشت دوری نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد

$$T(A_i)\subseteq A_{i+۱},\quad \forall i\in\{۱,۲,\dots,p\} \tag{۶.۱.۱}$$

که در آن $A_{p+۱}=A_۱$. بعلاوه، برای $p=۲$ $(A_۱=A,A_۲=B)$ شرایط زیر را برای یک نگاشت دوری داریم

$$T(A)\subseteq B \ \text{و}\ T(B)\subseteq A. \tag{۷.۱.۱}$$

[۱۶] Kirk

در ادامه قضایای از نقطه ثابت را که متناظر با نگاشت‌های دوری ثابت شده‌اند، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱.۱. ([۴۱]، *Kirk, Srinivasan and Veeramani*) *فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از یک فضای متریک کامل (X,d) بوده و نگاشت $T : X \to X$ در شرط (۷.۱.۱) صدق کند و برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad k \in [0, 1),$$

در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا در $A \cap B$ دارد.

نکته جالب توجه این است که در قضیه‌ی بالا نیازی به پیوستگی نگاشت T نیست. از طرفی نویسندگان در [۴۱] ثابت کردند که قضیه‌ی (۱۲.۱.۱) برای دو نگاشت وجود نقطه ثابت مشترک را نیز نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۱۳.۱.۱. [۴۱] *فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از فضای متریک کامل (X,d) باشند. فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to A$ دو نگاشت باشند به طوری که برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم*

$$d(fx, gy) \leq kd(x, y), \quad k \in [0, 1),$$

در این صورت نقطه یکتای $x_0 \in A \cap B$ وجود دارد به طوری که $fx_0 = gx_0 = x_0$.

همچنین، قضیه‌ی (۱۲.۱.۱) را به خانواده متناهی از زیر مجموعه‌های X توسیع داده و شرط انقباضی را محدود به $x \in A_i$ و $y \in A_{i+1}$ در نظر گرفتند.

قضیه ۱۴.۱.۱. [۴۱] *فرض کنید $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از یک فضای متریک کامل (X,d) باشند. فرض کنید $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ در شرط (۶.۱.۱) صدق کند و برای هر $x \in A_i$ و $y \in A_{i+1}$ که $1 \leq i \leq p$، داشته باشیم*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad k \in [0, 1),$$

در این صورت T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

در مقاله [۴۱] نتیجه ادلشتاین [۲۵]، نتیجه گراختی [۲۹]، نتیجه بوید–وانگ [۱۶] و نتیجه کاریستی [۱۸] [۱۷] به طور مشابه به نگاشت‌های دوری توسیع پیدا کرد. در سال ۲۰۰۵، راس [۱۸] مفهوم نمایش دوری را به صورت زیر معرفی کرد.

تعریف ۱.۱.۱۵. [۶۱] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، m یک عدد صحیح مثبت و $T : X \to X$ یک نگاشت است. $X = \cup_{i=1}^{m} A_i$ نمایش دوری X نسبت به T نامیده می‌شود، اگر

(۱) A_i ها برای $i = 1, 2, \ldots, m$ مجموعه‌های ناتهی باشند؛

(۲) $T(A_1) \subset A_2, \ldots, T(A_{m-1}) \subset A_m, T(A_m) \subset A_1$.

مثال ۶. فرض کنید $A_1 := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ و $A_2 := \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$. فرض کنید نگاشت T به صورت زیر تعریف شده باشد

$$Tx = 3x + 1, \quad \forall x \in A_1 \cup A_2.$$

در این صورت $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2$ یک نمایش دوری $\mathbb{N}$ نسبت به T است.

مثال ۷. فرض کنید $X = \mathbb{R}$ همراه با متر معمولی است. زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از X را به صورت، $A_1 = [0, 2]$، $A_2 = [\frac{1}{3}, 1]$، $A_3 = [\frac{2}{3}, 1]$، $A_4 = [1, \frac{4}{3}]$، $A_5 = [1, \frac{5}{3}]$ و $A_6 = [1, 2]$ با $Y = \cup_{i=1}^{6} A_i = [0, 2]$ در نظر بگیرید. فرض کنید $T : Y \to Y$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$T(A_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad T(A_2) = \begin{cases} \frac{5}{6}, & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$T(A_3) = \begin{cases} \frac{7}{6}, & \frac{2}{3} \le x < \frac{5}{6} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad T(A_4) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 1 \le x < \frac{7}{6} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$T(A_5) = \begin{cases} \frac{11}{6}, & \frac{4}{3} \le x < \frac{3}{2} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad T(A_6) = \begin{cases} 2, & \frac{5}{3} \le x < \frac{11}{6} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

آن‌گاه، $T(A_1) \subset A_2$، $T(A_2) \subset A_3$، $T(A_3) \subset A_4$، $T(A_4) \subset A_5$، $T(A_5) \subset A_6$ و $T(A_6) \subset A_1$. از طرف دیگر اگر $x_1 \in A_1$ آن‌گاه

$$Tx_1 = x_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x_1 < \frac{1}{3} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad T(x_2) = x_3 = \begin{cases} \frac{5}{6}, & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین $\cup_{i=1}^{6} A_i$ نمایش دوری Y نسبت به T است.

---
[۱۷] Caristi
[۱۸] Rus

با توجه به مفهوم نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف، در سال ۲۰۱۰، پکوآر[۱۹] و راس مفهوم یک نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف دوری را برای یک نگاشت T روی یک فضای متریک به صورت زیر معرفی و وجود نقطه ثابت یکتا را برای T ثابت کردند.

تعریف ۱.۱.۱۶. [۵۴] فرض کنید (X,d) فضای متریک، m عددی صحیح مثبت، $A_1,\dots,A_m$ زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از X و $Y=\cup_{i=1}^m A_i$ است. نگاشت $T:Y\to Y$ را یک نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف دوری می‌نامیم اگر

(۱) $\cup_{i=1}^m A_i$ یک نمایش دوری از Y نسبت به T باشد؛

(۲) تابع پیوسته و صعودی $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ موجود باشد به طوری که برای هر $t>0$، $\phi(t)>0$ و $\phi(0)=0$ و برای هر $x\in A_i$ و $y\in A_{i+1}$ که در آن $i\in\{1,2,\dots,m\}$ و $A_{m+1}=A_1$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)-\phi(d(x,y)).$$

مثال ۸. فرض کنید $X=\mathbb{R}$ با متر معمولی است. فرض کنید $A_1=[-1,0]=A_3$، $A_2=[0,1]=A_4$ و $Y=\cup_{i=1}^4 A_i$. برای هر $x\in Y$، نگاشت $T:Y\to Y$ را به صورت $Tx=-\frac{x}{3}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\cup_{i=1}^4 A_i$ یک نمایش دوری از Y نسبت به T است. علاوه بر آن، اگر قرار دهیم $\phi(t):=\frac{t}{2}$ آن‌گاه T یک نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف دوری خواهد بود.

مثال ۹. فرض کنید $X=\mathbb{R}$ با متر معمولی است. فرض کنید $A_1=A_2=\cdots=A_m=[0,1]$ و $Y=\cup_{i=1}^m A_i$. برای هر $x\in Y$ نگاشت $T:Y\to Y$ را به صورت $Tx=\frac{x}{1+x}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\cup_{i=1}^m A_i$ یک نمایش دوری از Y نسبت به T است. بعلاوه، اگر قرار دهیم $\phi(t):=\frac{t^2}{t+2}$، آن‌گاه T یک نگاشت ϕ-انقباضی ضعیف دوری خواهد بود.

قضیه ۱.۱.۱۷. ([۵۴]، *Pacurare, Rus*) *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل، m عدد صحیح مثبت، $A_1,\dots,A_m$ زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته از X و $Y=\cup_{i=1}^m A_i$ باشند. فرض کنید تابع پیوسته $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ موجود باشد به طوری که $\phi(0)=0$ و برای هر $t\in(0,\infty)$، $\phi(t)>0$. اگر*

[۱۹] Pacurar

$T: X \to X$ یک نگاشت ϕ-انقباضی دوری ضعیف باشد که درآن $Y = \cup_{i=1}^{m} A_i$ یک نمایش دوری Y نسبت به T است، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

مقالات متعدد دیگری به بررسی وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های دوری با در نظر گرفتن شرایط انقباضی متفاوت پرداخته‌اند، از جمله می‌توان به مقالات [۱۳]، [۳۸]، [۵۵] و [۵۶] اشاره کرد.

۲.۱ قضایای نقطه ثابت برای توابع چندمقداری

در این بخش قصد داریم به یادآوری برخی نتایج به‌دست آمده برای توابع چندمقداری روی یک فضای متریک، بپردازیم. مفهوم نگاشت چندمقداری تعمیم طبیعی مفهوم تابع بودن یک ضابطه با حذف شرط یکتایی تصویر برای هر عضو دامنه است. نگاشت‌های چندمقداری جدای از کاربردهایی که در خود ریاضیات دارند، در بحث نظریه بازی‌ها، کنترل بهینه و سیستم‌های دینامیکی نیز دارای کاربرداند.
به منظور سهولت در بیان زیر مجموعه‌های یک فضای متریک، نمادگذاری متداول زیر را که بر اساس [۴۲] تنظیم شده، معرفی و در سرتاسر این پایان نامه به کار خواهیم برد.

نمادگذاری ۱. *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است. دراین‌صورت:*

$\mathcal{N}(X)$ را برای اشاره به خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی X؛

$\mathcal{C}(X)$ را برای اشاره به خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته X؛

$\mathcal{B}(X)$ را برای اشاره به خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار X؛

$\mathcal{K}(X)$ را برای اشاره به خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی و فشرده X؛

$\mathcal{CB}(X)$ را برای اشاره به خانواده تمام زیر مجموعه‌های ناتهی ، بسته و کراندار X به کار می‌بریم.

در این بخش ابتدا به معرفی متریک هاسدورف [۲۰] و پاره‌ای از خواص آن می‌پردازیم.

[۲۰] Hausdorff metric

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است. در این صورت منظور از یک ε–همسایگی (به ازای هر $\varepsilon > 0$) برای یک $A \in \mathcal{CB}(X)$ که با نماد $N(\varepsilon, A)$ نشان می‌دهیم، مجموعه زیر است:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X |\ d(x, a) < \varepsilon, \quad a \in A \ \text{برای حداقل یک}\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. [۴۸] تابع H از $\mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X)$ به $\mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon | A \subset N(\varepsilon, B)\ ,\ B \subset N(\varepsilon, A)\}, \qquad \forall A, B \in \mathcal{CB}(X). \tag{۱.۲.۱}$$

متریک هاسدورف برای $\mathcal{CB}(X)$ نامند.

البته تعریف معادل دیگری نیز به صورت زیر برای متریک هاسدورف وجود دارد که در منابع جدیدتر معمولاً از آن استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. [۴۲] برای هر $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ قرار می‌دهیم

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in B} D(x, A), \sup_{y \in A} D(y, B)\right\} \tag{۲.۲.۱}$$

که در آن $D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ است. تابع H را متریک هاسدورف القا شده توسط d نامند.

گزاره ۴.۲.۱. *تابع H تعریف شده در تعریف (۱ .۲ .۳) یک متر روی $\mathcal{CB}(X)$ است.*

گزاره ۵.۲.۱. ([۳۵]، [۵]) *تعاریف (۱ .۲ .۲) و (۱ .۲ .۳) ارائه شده برای متریک هاسدورف معادل‌اند.*

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $f : (X, d) \to \mathbb{R}^*$ یک تابع است که در آن $\mathbb{R}^*$ توسیع $\mathbb{R}$ (یعنی $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) می‌باشد. f در $x_0 \in X$ نیم–پیوسته بالایی [نیم– پیوسته پایینی] است اگروتنهااگر به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x_0$ داشته باشیم

$$\limsup_n f(x_n) \leq f(x_0) \quad [f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n)].$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید T یک فضای توپولوژیک و (X, d) یک فضای متریک باشد. منظور از یک نگاشت چندمقداری، نگاشتی چون $F : T \to \mathcal{N}(X)$ است که در آن $\mathcal{N}(X)$ مطابق نمادگذاری ۱ گردایه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی X است.

در این پایان‌نامه نگاشت چندمقداری را با نشان دادن برد تابع به صورت نمادهای ارائه شده در نمادگذاری ۱ ابراز نموده‌ایم.

مثال ۱۰. فرض کنید $f : X_1 \to X_2$ نگاشتی تک‌مقداری است. معکوس f همواره یک نگاشت چندمقداری است:

$$F(y) := f^{-1}(y) = \{x \in X_1 | f(x) = y\}.$$

مثال ۱۱. فرض کنید $f : X_1 \to X_2$ ($X_2 = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) نگاشتی تک‌مقداری است. از ریاضیات پایه به یاد داریم که انتگرال نامعین f، مجموعه ای از توابع است که در یک ثابت با هم اختلاف دارند. اینک می‌توان نگاشت چندمقداری انتگرال نامعین را تعریف کرد:

$$F(x) := \int f(x)dx = \{h(x) | h'(x) = f(x)\}.$$

در سال ۱۹۶۹، نادلر [۲۱] پس از مدل سازی مفهوم یک نگاشت انقباضی برای نگاشت‌های چندمقداری و با استفاده از روشی مشابه با اثبات اصل انقباض باناخ، قضیه‌ای را برای انقباض‌های چندمقداری اثبات کرد.

قضیه ۸.۲.۱. ([۴۸]، *Nadler*) *فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $M : X \to \mathcal{CB}(X)$ یک نگاشت چندمقداری باشد که برای هر $x, y \in X$ در شرایط انقباضی زیر صدق می‌کند*

$$H(Mx, My) \le \alpha d(x, y), \quad \alpha \in (0, 1),$$

در این صورت M نقطه ثابت خواهد داشت.

نادلر پس از ارائه قضیه گفته شده با مدل سازی مفاهیم ارائه شده توسط ادلشتاین [۲۲] [۲۵] ، نوعی موضعی سازی از شرط انقباضی برای نگاشت‌های چندمقداری ارائه کرد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک است. نگاشت چندمقداری $M : X \to \mathcal{CB}(X)$ را (ε, λ)-به طور یکنواخت موضعاً انقباضی [۲۳] گوییم (که در آن $0 \le \lambda < 1$ ، $\varepsilon > 0$)، هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $d(x, y) < \varepsilon$ داشته باشیم

$$H(Mx, My) \le \lambda d(x, y).$$

[۲۱] Nadler
[۲۲] Edelstein
[۲۳] (ε, λ)-uniformly locally contractive