بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه الزهرا (س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ی فیزیک گرایش ماده چگال

عنوان
درهم تنیدگی گرمایی در زنجیره اسپینی XXZ در حضور میدان مغناطیسی عرضی

استادان راهنما
دکتر سعیده شعاری نژاد
دکتر سعید مهدوی فر

دانشجو
سلیمه مهدوی فر

دی ماه سال ۱۳۹۳

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهرا (س) است.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

که از صبرشان ایستادگی را آموختم.

قدرانی

در طول پژوهش در دوره کارشناسی ارشد از راهنمایی ها و کمک های استادان و دوستانم بسیار بهره برده ام. از این بابت از همه ایشان به ویژه، استادان راهنمایم جناب آقای دکتر سعید مهدوی فر و خانم دکتر سعیده شعاری نژاد، به خاطر راهنمایی های ارزشمندشان و هر آنچه با صبر و شکیبایی به من آموخته اند، بسیار سپاس گذارم.
فرصتی که آنها در اختیار من قرار داده اند زمینه آشنایی با موضوعی بسیار هیجان انگیز و دوستان و همکارانی با ارزش را برایم فراهم کردند.
از عمویم، دکتر مهدوی فر، به خاطر حمایت ها و دلسوزی هایی که از دوره مدرسه تا کنون به من داشته اند بسیار سپاس گذارم. از زحمات و حمایت های بی دریغ اعضای خانواده ام در طول سالیان تحصیلم، مادر و پدر مهربانم، برادرانم احمد و محمد و همچنین خانواده عموسعیدم که پذیرای من بودند صمیمانه سپاس گذارم.

چکیده

در این رساله به بررسی موضوع درهمتنیدگی گرمایی در فیزیک ماده چگال می پردازیم. درهمتنیدگی به عنوان منبعی در مباحث اطلاعات کوانتومی از قبیل فرابرد کوانتومی ، کدگذاری چگال و ... استفاده می شود. ایجاد حالت های کوانتومی درهمتنیده موضوع مهمی است. از دید فیزیک ماده چگال، در یک سیستم بس ذره ای برهمکنشی، انتظار می رود که نوع برهمکنش ها ی داخلی بین ذرات و همچنین قدرت نسبی آنها در شکل گیری حالت های درهمتنیده نقشی اساسی داشته باشند. از طرفی عوامل خارجی قابل کنترل در آزمایشگاه نیز بر میزان درهمتنیدگی موثرند. مطالعات انجام یافته در دهه اخیر نشان می دهند که سیستم های اسپینی به عنوان منابعی جهت ایجاد درهمتنیدگی بین، ذرات کاندیدهای بسیار خوبی می باشند. در این میان، زنجیره های اسپینی به طور ویژه مد نظر قرار گرفته اند. یکی از دلایل توجه ویژه به زنجیره های اسپینی، پیدایش موادی است که در طبیعت به طور موثر به صورت شبه یک بعدی رفتار می کنند. از طرفی گزارش هایی وجود دارد که نشان می دهند زنجیره های اسپینی در شبکه های اپتیکی نیز، پایه برخی از آزمایش ها و تحقیقات مرتبط با درهمتنیدگی را شامل می شوند. در نهایت باید متذکر شویم که بیشترین آثار کوانتومی در این سیستم ها نمود پیدا کرده است.

خلاصه ای از کارهای صورت گرفته در این رساله به شرح زیر است.

در این رساله زنجیره ی پادفرومغناطیس ناهمسانگرد XXZ با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور میدان مغناطیسی عرضی به عنوان یک سیستم اسپینی مورد بررسی قرار می گیرد. با استفاده از روش فرمیونی کردن، طیف انرژی سیستم محاسبه شده است. سپس به بررسی درهمتنیدگی گرمایی در آنها می پردازیم. خواهیم دید درهم تنیدگی با افزایش میدان مغناطیسی وافزایش ضریب ناهمسانگردی چگونه تغییر می کند.

کلمات کلیدی: درهم تنیدگی گرمایی ، زنجیره XXZ با اسپین1/2، فرمیونی کردن

فهرست

فصل اول مفاهیم اولیه درهم تنیدگی ۱

پیش گفتار ۲

۱ . ۱ سیر تاریخی شکل گیری درهم تنیدگی کوانتومی ۳

۱ . ۱ .۲ شرح آزمایش EPR..... ۴

۱ . ۱ .۳ نتایج آزمایش EPR ۴

۱ . ۲ مفاهیم لازم برای مطالعه ی در همتنیدگی ۶

۱ . ۲ .۱ کیوبیت..... ۶

۱ . ۲ .۲ آنسامبل خالص و آمیخته..... ۶

۱ . ۲ .۳ آنسامبل خالص ۶

۱ . ۲ .۴ آنسامبل آمیخته ۷

۱ . ۲ .۵ ماتریس چگالی..... ۷

۱ . ۳ معنای درهم تنیدگی ۱۱

۱ . ۵ آنتروپی شانون..... ۱۶

فصل دوم پیش گفتار ۱۸

۲ . ۱ مواد مغناطیسی منظم..... ۱۸

۲ . ۱ .۱ مواد فرومغناطیس ۱۹

۲ . ۱ .۲ مواد پادفرومغناطیس..... ۲۰

۲ . ۱ .۳ مواد فری مغناطیس..... ۲۱

۲ .۲ گذار فاز..... ۲۱

۲ . ۳ مغناطش در یک بُعد..... ۲۳

۲ . ۴ بررسی ساختار درونی زنجیره های اسپینی..... ۲۳

۲. ۵ مدل های ساده مغناطیسی ۲۴
۲. ۶ برهم کنش تبادلی ۲۴
۲ . ۷ مدل هایزنبرگ ۲۴
۲. ۸ مدل XXZ..... ۲۶
۲. ۹ دیدگاه نظری مدل یک بعدی اسپین-۱/۲ XXZ..... ۲۶
۲. ۹ .۱ در غیاب میدان مغناطیسی خارجی..... ۲۷
۲. ۹ .۲ در حضور میدان مغناطیسی عرضی ۲۷
فصل سوم هامیلتونی هایزنبرگ xxz در حضور میدان مغناطیسی عرضی ۳۰
پیشگفتار ۳۱
۳ . ۱ فرمیونی کردن اسپین 12..... ۳۲
۳ . ۲ تبدیلات جردن- ویگنر ۳۲
۳ . ۳ فرمیونی کردن در مدل زنجیره ی هایزنبرگ اسپین 12..... ۳۷
۳ . ۴ هامیلتونی هایزنبرگ ناهمسانگرد در حضور میدان مغناطیسی عرضی ۳۸
۳ . ۵ محاسبه $\gamma 3، \gamma 2، \gamma 1$ در دمای صفر مطلق ۴۸
فصل چهارم بررسی درهم تنیدگی در زنجیره ی اسپینی XXZ در حضور میدان مغناطیسی عرضی ۵۰
پیشگفتار ۵۱
۴ . ۱ رفتار گرمایی درهم تنیدگی ۵۱
۴ . ۲ بررسی در هم تنیدگی در دمای صفر..... ۵۹
۴ . ۲ . ۱ در غیاب میدان مغناطیسی..... ۵۹
۴ . ۲ . ۲ در حضور میدان مغناطیسی..... ۶۰
۴ . ۳ بررسی درهم تنیدگی گرمایی ۶۳
۴ . ۳ . ۱ در غیاب میدان مغناطیسی..... ۶۳
۴ . ۳ . ۲ در حضور میدان مغناطیسی..... ۶۴
فصل پنجم نتیجه گیری..... ۶۶
مراجع ۶۸

فهرست شکل ها:

شکل (۱-۱)..... ۸
شکل (۱-۲)..... ۱۵
شکل (۲-۱)..... ۲۰
شکل (۲-۲)..... ۲۹
شکل (۳-۱) ۳۴
شکل (۳-۲) ۳۸
شکل (۴-۱)..... ۶۰
شکل (۴-۲)..... ۶۱
شکل (۴-۳)..... ۶۲
شکل (۴-۴)..... ۶۳
شکل (۴-۵)..... ۶۴
شکل (۴-۶) ۶۴
شکل (۴-۵) ۶۵

فصل اول

مفاهیم اولیه درهم تنیدگی

پیش گفتار

همبستگی کوانتومی[1] و درهمتنیدگی[2] به عنوان کمیتی که یک خصلت کوانتومی را بیان می کند در سال های اخیر مورد پژوهش وسیعی قرار گرفته است. این توجه هم ناشی از نقش درهمتنیدگی در مبانی مکانیک کوانتومی است و هم به دلیل نقش بارزی است که در فرایندهای محاسبات و مبادله اطلاعات کوانتومی ایفا می کند [1].

درهمتنیدگی هم در دنیای میکروسکوپی مشاهده می شود [2,3] و همچنین تحت شرایطی در دنیای ماکروسکوپی نیز قابل مشاهده است[4,5]. در بسیاری از فرایندها مجموعه بسیار زیادی از زوج های درهمتنیده مثل فوتون ها در یک منبع ایجاد شده و برای استفاده با کاربردهای متفاوت ارسال می شود. معمولا این زوج های درهمتنیده همبستگی اولیه خود را به تدریج از دست می دهند[6]. در واقع زمانی که به مقصد می رسند همبستگی شان کمتر از مقدار اولیه شده است. با این وجود تحت شرایطی باز هم ممکن است پس از تقویت درهمتنیدگی ، این زوج ها قابل مشاهده می باشند.

با یک مثال ساده به توضیح درهمتنیدگی می پردازیم. فردی را در نظر بگیرید که عادت دارد همیشه جوراب هایی با دو رنگ متفاوت بپوشد که یکی از آنها همیشه به رنگ صورتی و دیگری سبز است. اگر مشاهده گری فقط یکی از پاهای او را ببیند و متوجه شود که رنگ جورابش صورتی است می تواند با اطمینان بگوید که جوراب دیگر شخص سبز است. از طرفی اگر مشاهده گر یک جوراب سبز مشاهده کند درمی یابد که جوراب دیگر حتما صورتی است. این به نوعی یک همبستگی کاملا کلاسیکی دارد و هیچ چیز پیچیده ای در این مثال وجود ندارد. اما مسئله زمانی پیچیده می شود که با یک همبستگی کوانتومی روبه رو می شویم. به عنوان مثال اسپین دو ذره را در نظر بگیرید، اندازه گیری مولفه z یکی از اسپین ها نتیجه اندازه گیری مولفه z دیگری را تعیین می کند. در واقع یک همبستگی قوی بین دو ذره وجود دارد که از نوع همبستگی کلاسیکی نیست.

اگر به درهمتنیدگی به عنوان یک منبع مثل انرژی نگاه کنیم این مسئله که یک زوج درهمتنیده چه مقدار درهمتنیدگی دارند اهمیت می یابد. بنابراین بخش مهمی از پژوهش های مربوط به درهمتنیدگی معطوف به تعیین معیارهای کمی برای سنجش درهمتنیدگی شده است[7,8]. از طرفی به دلیل اهمیتی که سیستم های همبسته قوی در ماده چگال دارند این مسئله که همبستگی موجود در این سیستم ها تا چه اندازه کلاسیک و تا

[1] Quantum correlation
[2] Entanglement

چه اندازه کوانتومی است مورد پرسش قرار گرفته است [9,10]. همچنین می توان پرسید که هنگام گذار فاز در این سیستم ها، کدام یک از هم بستگی ها دچار واگرایی شده و کدام یک محدود باقی می مانند؟ میزان درهمتنیدگی یا همان همبستگی کوانتومی خالص را چگونه باید به طور کمی و عددی سنجید؟ در حوزه پردازش اطلاعات نتایج بدست آمده زمانی بهترین حالت را دارند که درهمتنیدگی بیشینه باشد. گویی درهمتنیدگی ماهیت کمی دارد.

برای درک فیزیکی سوالات فوق و کسب توانایی علمی جهت پاسخ گویی، در ادامه ابتدا به این نکته پی می بریم که درهمتنیدگی چگونه متولد شد و چه سیری را تاکنون پیموده است و سپس به معرفی مفاهیم لازم برای کمی کردن درهمتنیدگی می پردازیم و بعد از آن یکی از روش هایی که در این پایان نامه برای کمی کردن درهمتنیدگی از آن استفاده شده است را معرفی می کنیم.

۱.۱ سیر تاریخی شکل گیری درهم تنیدگی کوانتومی

اولین توجهات به درهمتنیدگی به تلاش های انیشتن[1] ، پودولسکی[2] و روزن[3] برای نشان دادن کامل نبودن نظریه کوانتومی باز می گردد. در سال ۱۹۳۵ آنها با انتشار مقاله ای که به نام (EPR) معروف می باشد[11] تلاش کردند که نشان دهند مکانیک کوانتومی با تفسیر رایج کامل نیست و فیزیک نیازمند نظریه کامل تری است. طبق نظریه کوانتومی حالت یک سیستم فیزیکی به طور کامل با بردار حالت آن مشخص می شود اما انیشتین، پودولسکی و روزن با در نظر گرفتن دو فرض موضعیت (عدم امکان تأثیرگذاری دو رویداد فضاگونه بر روی یکدیگر) و واقعیت خارجی (وجود خاصیت فیزیکی مستقل از انجام اندازه گیری بر روی سیستم) که مبتنی بر استفاده از یک حالت درهمتنیده است، یک آزمایش ذهنی ارائه کردند. به نحوی که مقدار دو کمیت را که مقدار مشاهده شده آنها در چهارچوب فیزیک کوانتومی به طور هم زمان قابل پیش بینی نبود (کمیت های غیر جابه جا شونده) به طور دقیق پیش بینی کردند[11]. بر این اساس آنها نتیجه گرفتند عدم توانایی پیش بینی دقیق نتایج اندازه گیری ها توسط فیزیک کوانتومی ریشه در ناکامل بودن این نظریه دارد. در حالی که فیزیک کوانتومی و فرض های واقعیت فیزیکی و موضعیت تا آن زمان از انبوه آزمون ها موفق بیرون آمده بودند. در این آزمایش ادعا شده بود ما می توانیم قبل از اندازه گیری هم نتیجه آزمایش را با قطعیت پیش بینی کنیم، که این برخلاف ادعای مکانیک کوانتومی است، پس مکانیک کوانتومی رایج ناقص[11] است.

[1] Einstein
[2] Podolsky
[3] Rosen

۱ . ۱ . ۲ شرح آزمایش EPR

سیستمی شامل دو الکترون که دارای اسپین کل صفر هستند را در نظر می گیریم. فرض می کنیم اندازه گیری روی امتداد اسپینی یکی از الکترون ها انجام شود. شانس به دست آوردن اسپین بالا یا پایین ۵۰-۵۰ است. ولی اگر نشان داده شود یکی از الکترون ها در حالت اسپین بالاست، الکترون دیگر الزاما در حالت اسپین پایین است یا برعکس. این نوع از هم بستگی حتی هنگامی که دو ذره از هم دور بوده و هیچ برهمکنشی با هم نداشته باشند نیز وجود دارد.

حالتی مثل

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|0,1\rangle - |1,0\rangle) \qquad (۱-۱)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید برای انجام این آزمایش از دو نفر به نام های آلیس و باب درخواست همکاری می کنیم. کیوبیت اول در دست آلیس و کیوبیت دوم دست باب است. حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را برای نشان دادن ویژه حالت های اسپینی در راستای z بکار می بریم. اگر آلیس روی ذره خود یک اندازه گیری در راستای z انجام دهد و مقدار صفر بدست آورد، می تواند به طور قطع اندازه گیری باب را پیش بینی کند زیرا باب در صورت اندازه گیری در همین پایه مقدار یک به دست خواهد آورد. چنین حالتی را یک حالت درهمتنیده می گویند. این تاثیر حتی در وضعیتی که اندازه گیری های آلیس و باب فاصله فضاگونه باهم دارند نیز برقرار است. از آنجا که دو رویداد با فاصله فضاگونه هیچ گونه رابطه علت و معلولی با هم ندارند به نظر می رسد یک نوع اثر ناموضعی در مکانیک کوانتومی وجود دارد که هیچ نوع سابقه ای در فیزیک کلاسیک ندارد. همچنین به نظر می رسد که این نوع پدیده ها به نوعی نسبیت خاص را نقض می کنند. اما آلیس تنها با اندزه گیری روی کیوبیت خودش، نتایج آزمایش باب را پیش گویی می کند و به هیچ وجه نمی تواند علامت یا سیگنالی به او مخابره کند. در حقیقت ناموضعیت به معنای نقض نسبیت خاص نیست.

۱ . ۱ . ۳ نتایج آزمایش EPR

انیشتین در توضیح آزمایش خود متذکر می شود که دو مطلب زیر با هم سازگار نمی باشند:

۱) توصیف حالت یک سیستم فیزیکی به وسیله تابع موج یک توصیف کامل است.

۲) حالت واقعی سیستم هایی که به طور فضاگونه از هم جدا می باشند مستقل از هم است.

از نظر انیشتین مطلب دوم درست است چون دو ذره بسیار از هم دور هستند و نمی توانند روی هم اثری بگذارند و با توجه به اینکه توانستیم حتی قبل از اندازه گیری نیز حالت ذره را مشخص کنیم پس نتیجه می گیریم که ذره دوم حتی قبل از اندازه گیری نیز دارای اسپین مشخص است که این با تفسیر رایج در کوانتوم

که می گوید نمی توان حالت یک ذره را قبل از اندازه گیری به طور دقیق مشخص کرد در تضاد است بنابراین تابع موج نمی تواند توصیف کاملی از یک سیستم فیزیکی ارائه کند.

اینکه از نظر انیشتین ذره دوم قبل از اندازه گیری دارای اسپین مشخص است. بیانگر این است که با اندازه گیری واقعیت را نمی سازیم بلکه فقط از روی آن پرده برمی داریم و آن را آشکار می کنیم.

انیشتین برای حل این مشکل (ناقص بودن مکانیک کوانتومی) بر این عقیده بود که می توان با استفاده از یک سری متغیر پنهان[۱] نظریه کاملی، بدون اثرات غیر موضعی به وجود آورد. در فیزیک کلاسیک آزمایش های یکسان بر روی سیستم های کاملا مشابه نتایج یکسانی را به دنبال دارد در حالی که در فیزیک کوانتومی نتایج آزمایش های یکسان بر روی سیستم های کاملا مشابه، تصادفی بوده و تابع شانس و احتمال است که این تصادفی بودن در ذات خود پدیده است. اما شاید متغیرهای بسیار ظریف و پنهانی وجود داشته باشند که عدم اطلاع و کنترل ما بر آنها و پراکنده بودن آنها در آزمایش های گوناگون این تصور کاذب را به وجود آورد که اگر از این متغیرها آگاهی داشته باشیم می توانیم یک توصیف قطعی از آزمایش های یکسان بر روی سیستم های یکسان ارائه کنیم.

تصمیم گیری درباره استدلال EPR و متغیرهای پنهان ساده نبود تا اینکه در سال ۱۹۶۴ بل[۲] با در نظر گرفتن یک سیستم دو بخشی نشان داد که در صورت پیروی طبیعت از فرض های موضعیت به همراه واقعیت خارجی، همبستگی بین نتایج اندازه گیری بدست آمده در دو بخش سیستم، نمی تواند از مقدار معینی بیشتر باشد. این درحالی بود که محاسبه درهمتنیدگی در چارچوب فیزیک کوانتومی به ازای برخی حالت های درهمتنیده نتیجه ای بزرگتر از حد بالای محاسبه شده با فرض های ذکر شده را بدست می داد [12]. از آنجا که امکان اندازه گیری هم بستگی حالت های مورد بحث بل در آزمایشگاه وجود دارد، آزمایش بل مبنایی برای تصمیم گیری بین فیزیک کوانتومی و فرض های موضعیت به همراه واقعیت خارجی را به دست می دهد. کلید موفقیت بل در ارائه یک آزمایش تعیین کننده به نحوه ی وارد کردن فرض های برشمرده در نظرات فیزیکی اش برمی گشت. در واقع او با در نظر گرفتن متغیر پنهان موضعی فرض های ذکر شده را اعمال کرد و تصادفی بودن نتایج مشاهده شده در آزمایش را به عدم دسترسی به مقدار این متغیر نسبت داد. از آن زمان آزمایش های مختلفی بر پایه مدل بل انجام شده که همگی درستی پیش بینی های فیزیک کوانتومی را تایید کرده اند [13,14]. در نتیجه اثبات شده که طبیعت بر مبنای متغیر پنهان موضعی رفتار نمی کند.

---

[۱] Hidden Variable

[2] J.S.Bell

۱ . ۲ مفاهیم لازم برای مطالعه ی در همتنیدگی

در ادامه با معرفی مفاهیمی از قبیل کیوبیت، آنسامبل و ماتریس چگالی سعی در شناخت ابزارهایی برای کمی کردن درهم تنیدگی داریم.

۱ . ۲. ۱ کیوبیت[1]

یک سیستم در مکانیک کوانتومی با بردار حالت در فضای هیلبرت نمایش داده می شود. کیوبیت ساده ترین سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرت آن دو بعد دارد. حالت یک کیوبیت را معمولا به صورت

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \qquad (۲-۱)$$

می نویسیم که در آن $|1\rangle$ و $|0\rangle$ پایه محاسباتی یا پایه استاندارد خوانده می شوند. مشاهده پذیرها حداکثر دارای دو مقدار قابل اندازه گیری هستند. a و b ضرایت بسط هستند که از شرط بهنجارش پیروی می کنند:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad (۳-۱)$$

در نظریه اطلاعات کوانتومی کیوبیت به عنوان واحد در سنجش اطلاعات کوانتومی بکار می رود.

از سیستم هایی که کیوبیت در آن به عنوان واحد بکار می رود می توان به سیستم های اسپینی $S = \frac{1}{2}$ و نور قطبیده که فضای هیلبرت دو بعدی دارد اشاره کرد که در این پایان نامه منظورمان از کیوبیت یک سیستم اسپینی دو حالتی $S = \frac{1}{2}$ است.

۱ . ۲. ۲ آنسامبل خالص و آمیخته

آنسامبل چیست؟ برای یک سیستم فیزیکی مجموعه ای از نسخه های ذهنی در نظر می گیریم به گونه ای که تعداد اعضای این مجموعه به اندازه تعداد پیکربندی های ممکن سیستم باشد. به این مجموعه در فیزیک آماری آنسامبل می گویند. از آنسامبل ها برای توصیف سیستم های فیزیکی در فیزیک نظری استفاده می شود[15].

۱ . ۲. ۳ آنسامبل خالص[2]

هر عضو یک آنسامبل وظیفه ی توصیف یک پیکربندی میکروسکوپی مجاز از سیستم را دارد اگر همه ی اعضای یک آنسامبل خواص ماکروسکوپی یکسان داشته باشند به آن آنسامبل ، آنسامبل خالص می گویند[16].

[1] qbit
[2] Pure ensemble

در کوانتوم برای یک آنسامبل خالص می توان حالت همه ی اعضای آنسامبل را با یک کت حالت نمایش داد. که برای یک سیستم دو قسمتی اینگونه می نویسیم[16]:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} \, |\varphi_i\rangle_A |\varphi_j\rangle_B \qquad (۴-۱)$$

که در آن $\{|\varphi_i\rangle_A\}$و$\{|\varphi_j\rangle_B\}$ مجموعه ویژه کت های متعامد زیرسیستم های A و B هستند.

۱ . ۲. ۴ آنسامبل آمیخته[1]

در آنسامبل آمیخته کسری از اعضای آنسامبل با احتمال کلاسیکی P_1 با کت حالت $|\varphi^1\rangle$ و کسری دیگر با احتمال کلاسیکی P_2 با کت حالت $|\varphi^2\rangle$ و ... مشخص می شوند که آنسامبل آمیخته را می توان به صورت ترکیب خطی از کت های حالت اعضای آنسامبل در احتمال کلاسیکی آنها

$$|\varphi\rangle = P_1|\varphi^1\rangle + P_2|\varphi^2\rangle + \cdots = \sum_{i=1}^{M} P_i|\varphi^i\rangle \qquad (۵-۱)$$

نوشت [15] که احتمالات کلاسیکی باید در شرط بهنجارش صدق کنند:

$$\sum_i P_i = 1 \qquad (۶-۱)$$

در واقع می توان گفت آنسامبل آمیخته مجموعه ای از چند آنسامبل خالص است. به عبارتی می توان آنسامبل خالص را آنسامبل آمیخته ای در نظر گرفت که فقط برای i اُمین کت $|\varphi\rangle$ ،مقدار P برابر یک شده و برای سایر کت های حالت، تابع احتمال کلاسیکی صفر است.

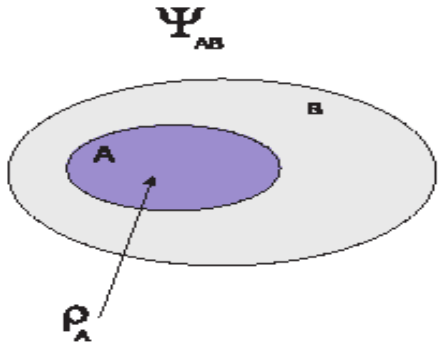
۱ . ۲. ۵ ماتریس چگالی[2]

به نحوه توزیع یک کمیت در ناحیه ای از فضا، چگالی می گویند. به عنوان مثال نحوه توزیع جرم در یک حجم مشخص را می توان با تابع چگالی جرمی توصیف کرد. در مورد بار، تعداد ذرات و خیلی موارد دیگر نیز می توان تعریف مشابه ای ارائه کرد. فرض کنید دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ داریم و این دو ذره در حالتی مثل حالت زیر قرار دارند:

$$|\Psi\rangle_{AB} = a|\uparrow,\uparrow\rangle + b|\uparrow,\downarrow\rangle + c|\downarrow,\uparrow\rangle + d|\downarrow,\downarrow\rangle \qquad (۷-۱)$$

[1] Mixed ensemble
[2] Density matrix

در اینجا دو ذره در یک حالت مشخص قرار دارند ولی نمی توان به ذره A بردار حالت مشخصی را نسبت داد. در این مورد و موارد مشابه که دستگاه کوانتومی مورد نظر ما بخشی از یک دستگاه بزرگتر است؛ حالت آن با یک ماتریس چگالی مشخص می شود. (شکل۱-۱)



شکل ۱-۱:یک سیستم بسته با یک بردار حالت توصیف می شود ولی اجزای آن با یک ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.

برای یک سیستم که از دو بخش A و B تشکیل شده است، بنابر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم می توان فضای هیلبرت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ نسبت داد که $\mathcal{H}_A$ در پایه ی $\{|i\rangle\}_{i=1}^{m}$ و $\mathcal{H}_B$ در پایه ی $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^{n}$ باشد. در این صورت حالت کلی سیستم AB با بردار حالت زیر نشان داده می شود:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \Psi_{i\mu} |i,\mu\rangle \qquad (۸-۱)$$

می توان فرم صریح تر ماتریس چگالی را با توجه به رابطه ی بالا بدست آورد[14]:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |\alpha^i\rangle\langle\alpha^j| = \sum_i \rho_i |\alpha^i\rangle\langle\alpha^i| \qquad (۹-۱)$$

$|\alpha^i\rangle$ ویژه بردار ها و ρ_i ویژه مقادیر ماتریس چگالی بوده و تعداد آن ها برابر با بُعد ماتریس چگالی، N ، یا بُعد فضای هیلبرت می باشد.

همچنین عملگر چگالی را به شکل زیر نیز میتوان نمایش داد:

$$\rho = \sum_i P_i |\varphi^i\rangle\langle\varphi^i| \qquad (۱۰-۱)$$

$|\varphi^i\rangle$ ها ویژه کت های کسری از اعضای آنسامبل با تابع احتمال کلاسیکی P_i هستند و ممکن است بر یکدیگر متعامد نبوده و تعداد آن ها ربطی به بُعد ماتریس ρ ندارد. ماتریس چگالی شامل دو نوع از احتمالات است: یکی، احتمال کلاسیکی P_i برای حالت های مختلف و دیگری احتمال کوانتومی که بیان کننده آن است که چطور یک اندزه گیری ممکن است تابع موج را به یک ویژه حالت عملگر اندازه گیری شده تصویر کند. ماتریس چگالی ρ دارای سه خاصیت است. هرمیتی، مثبت و دارای رد واحد است [17].

آنسامبل خالص آنسامبلی است که فقط در یک میکروحالت قرار دارد بنابراین برای آنسامبل خالص فقط به ازای کت حالت iاُم، $P_i = 1$ بوده و برای سایر کت های حالت برابر صفر می باشد.

$$\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi| \qquad (۱۱-۱)$$

برای آنسامبل خالص چون همه سیستم های سیستم های این آنسامبل باید در یک حالت مثل هم باشند. بنابراین، فقط یک عنصر قطری ρ_{nn} که غیر صفر است (در واقع برابر با واحد است) وجود خواهد داشت، در حالیکه بقیه برابر صفر هستند. در این صورت ماتریس چگالی در این شرط $\rho^2 = \rho$ صدق می کند که می توان نتیجه گرفت که عملگر چگالیِ آنسامبل خالص تنها دو ویژه مقدار صفر و یک دارد[16].

نمایش ماتریسی عملگر چگالی را نیز به سادگی می توان نوشت:

$$\rho_{ij} = \langle b_i|\rho|b_j\rangle = \sum_n \rho_n \langle b_i|\varphi^n\rangle\langle\varphi^n|b_j\rangle \qquad (۱۲-۱)$$

رابطه فوق عنصری از سطر iاُم و ستون j اُم ماتریس چگالی را نشان می دهد.

ماتریس چگالی آنسامبل خالص و آمیخته در پایه های خودش در زیر آمده است:

$$\rho_{\text{خالص}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\text{آمیخته}} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(۱-۱۳)

در مکانیک کوانتومی هدف نهایی از حل معادله شرودینگر و دستیابی به طیف ویژه مقادیر و مجموعه ویژه بردار های سیستم این است که از ویژه مقدارها و ویژه بردار ها به منظور محاسبه مقدار چشمداشتی مشاهده پذیرها استفاده کنیم تا بتوانیم مقایسه ای با اندازه گیری های تجربی داشته باشیم. اما روشی دیگر برای به دست آوردن مقدار چشمداشتی، استفاده از ماتریس چگالی است. به سادگی می توان اثبات کرد که مقدار چشمداشتی عملگر نوعی M از رابطه ی $\langle M\rangle = tr(\rho M)$ به دست می آید و از این جا می توان نتیجه گرفت که ماتریس چگالی در بردارنده تمام اطلاعاتی است که لازم است از سیستم کوانتومی کسب شود. بنابراین به جای اینکه با یک بردار حالت، سیستم مورد نظر خود را مشخص کنیم با یک ماتریس چگالی آن را توصیف می نماییم. اما به دلیل اینکه در عمل، کار کردن با ماتریس چگالی که دارای ابعاد بزرگی است، کار ساده ای نمی باشد از کمیّتی به نام ماتریس چگالی کاهش یافته استفاده می کنیم[18]. به عنوان مثال در یک سیستم متشکل از N زیر سیستم، ممکن است بخواهیم حالت زیر سیستم i اُم را به دست آوریم. زیر سیستم i اُم بخشی از یک سیستم بزرگ تر است که سایر

زیر سیستم ها محیط آن محسوب می شوند. برای یافتن اطلاعات زیر سیستم i اُم راحت تر است از ماتریس چگالی کاهش یافته استفاده کنیم که آن را اینگونه تعریف می کنیم:

$$\rho_i = tr_{R(i)}\rho \qquad (۱۴-۱)$$

رابطه فوق بیانگر آن است که بدون در نظر گرفتن درجات آزادی ذره ی iاُم، از ماتریس چگالی رد بگیریم. به عبارت دیگر، سیستم خود را به دو زیرسیستم نوعی A و B تقسیم می کنیم که به ترتیب دارای تعداد N_A و $N_B = N - N_A$ ذره می باشد. در این صورت ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_A = tr_B\rho \qquad (۱۵-۱)$$

ρ_A بدین معناست که کلیه درجات آزادی ذرات زیرسیستم A را کنار گذاشته و از ماتریس چگالی ρ نسبت به درجات آزادی ذرات زیرسیستم B رد بگیریم. در واقع ماتریس چگالی کاهش یافته، ماتریس چگالی متناظر با توصیف یک زیرسیستم است. به عنوان مثال اگر $N = 6$ باشد و سیستم به دو زیرسیستم A و B با تعداد مساوی از ذرات تقسیم شود ($N_A = 3$ و $N_B = 3$)، ماتریس چگالی کاهش یافته یک ماتریس ۸×۸ خواهد بود که بُعد آن در مقایسه با ماتریس چگالی ρ که ۶۴×۶۴ بود، بسیار کوچک تر شده است.

۱ . ۳ معنای درهمتنیدگی

برای درک بهتر معنای درهمتنیدگی، کمیت فوق را به صورت مجزا در حالت های خالص و آمیخته بررسی می کنیم. یک حالت خالص در صورتی درهمتنیده است که نتوان آن را به شکل حاصل ضرب تانسوری نوشت. سیستمی متشکل از دو بخش A و B را در نظر می گیریم. بردار حالت این سیستم یعنی $|\psi\rangle_{AB}$ را درهمتنیده می گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت ضرب تانسوری دو بردار حالت مجزا از زیر بخش های آن نوشت یعنی

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \qquad (۱۶-۱)$$