بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده برق و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی دوره‌ی کارشناسی ارشد مهندسی مخابرات – سیستم

تحلیل نقش فیدبک بر نرخ‌های قابل حصول در شبکه‌های رله

محمد علی طبی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا عارف

دکتر محمود احمدیان عطاری

تابستان ۱۳۹۰

تأییدیّه هیات داوران

اعضای هیئت داوران، نسخه نهائی پایان نامه آقای: محمد علی طبی

را با عنوان: تحلیل نقش فیدبک بر نرخ‌های قابل حصول در شبکه‌های رله

از نظر فرم و محتوی بررسی نموده و پذیرش آن را برای تکمیل درجه‌ی کارشناسی ارشد تأیید می‌کند.

اعضای هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محمدرضا عارف	استاد	
۲- استاد راهنما	دکتر محمود احمدیان عطاری	دانشیار	
۳- استاد ممتحن	دکتر مهرداد اردبیلی پور	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر حمید بهروزی	استادیار	

تقدیم به

مهربانی مادرم، که خورشید زندگانی‌ام است

بزرگواری پدرم، که امید زندگانی‌ام است

صمیمیت خواهرم، که شیرینی زندگانی‌ام است

تشکر و قدردانی

از استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا عارف به خاطر تمام زحمات ایشان در مدت انجام این پایان نامه بی‌نهایت سپاس‌گزارم. توصیه‌های ایشان نه تنها در کار پژوهش بلکه در سایر جنبه‌های زندگی علمی و غیرعلمی بنده موثر و راه‌گشا بوده است.

از جناب آقای دکتر محمود احمدیان به دلیل راهنمایی‌های ایشان در به ثمر رسیدن این پایان نامه کمال تشکر را دارم. در مدت تحصیل و انجام پایان نامه همواره به کمک‌ها و همراهی ایشان دلگرم بوده‌ام.

از جناب آقای دکتر اردبیلی پور به خاطر قبول زحمت ارزیابی پایان نامه و زحمات ایشان در طول تحصیل سپاس‌گزارم. از جناب آقای دکتر بهروزی به خاطر قبول زحمت ارزیابی پایان نامه کمال قدردانی را دارم.

از اعضای آزمایشگاه شناسه و رمز (CCL) دانشگاه خواجه نصیر و اعضای آزمایشگاه سیستم‌های اطلاعاتی و امنیت (ISSL) دانشگاه شریف سپاس‌گزارم. از سرکار خانم مهندس میرمحسنی به خاطر کمک های شایان و توصیه‌های ارزشمند ایشان در انجام پایان نامه و بازبینی مقالات ارائه شده کمال تشکر را دارم.

از کارمندان محترم بخش های مختلف دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر که هر کدام به نحوی در طول مدت تحصیل با بنده مساعدت نموده‌اند بسیار سپاس‌گزارم.

از تمام دوستانم که در لحظات سخت همراه من بوده‌اند بی‌نهایت سپاس‌گزارم و برایشان آرزوی سلامتی و موفقیت دارم.

از خانواده‌ی عزیزم به خاطر تمام رنج‌ها و زحماتی که برای من متحمل شده‌اند سپاس‌گزارم و برایشان آرزوی سلامتی، طول عمر و موفقیت دارم.

چکیده

فیدبک به عنوان بخشی از سیستم‌های مخابراتی، در برخی از کانال‌ها و شبکه‌ها سبب افزایش نرخ‌های قابل حصول و یا ظرفیت می‌شود. ولی حتی در صورت عدم افزایش ظرفیت، فیدبک به روش‌های مختلف می‌تواند ارسال اطلاعات را تسهیل کرده و بهبود ببخشد. بنابراین بررسی ارسال اطلاعات در شبکه‌ها در حضور فیدبک اهمیت زیادی دارد. در این میان شبکه‌ی رله نیز به عنوان یکی از شبکه‌های رایج در سیستم‌های مخابراتی امروز، مانند شبکه‌های حس‌گر، اقتضائی و بی‌سیم، همواره مورد توجه پژوهش‌گران حوزه‌ی نظریه‌ی اطلاعات بوده است. با توجه به این مسائل، در این پایان نامه به بررسی فیدبک در شبکه-ی رله می‌پردازیم.

در این پایان نامه، مدل یک شبکه‌ی رله با دو رله را در نظر می‌گیریم. در این مدل، هر کدام از رله‌ها تلاش می‌کند تا بیشترین اطلاعات را در مورد پیام فرستنده به گیرنده ارسال نماید و گیرنده از اطلاعات هر دو رله برای رفع ابهام خود نسبت به پیام فرستنده استفاده می‌کند. یک یال مستقیم نیز از فرستنده به گیرنده وجود دارد. برای بررسی فیدبک در این شبکه دو ساختار پاره‌ای در نظر می‌گیریم.

در ساختار اول، یک یال فیدبک از گیرنده به فرستنده را فرض می‌کنیم. در این ساختار، فرستنده از طریق یال فیدبک از اطلاعات فشرده شده‌ی رله‌ها که به گیرنده ارسال کرده‌اند، اطلاع پیدا می‌کند و همین مسئله باعث ایجاد هم‌کاری بین فرستنده و رله‌ها می‌شود. برای اثبات نرخ قابل حصول این شبکه، از رهیافت "فشرده سازی-گسیل" و ترکیب "افرازبندی تصادفی" و "افرازبندی یقینی" برای "کدبرداری محدودشده" استفاده می‌کنیم. در بعضی مراحل کدبرداری نیز، روش کدبرداری توأم را به‌کار می‌بریم.

در ساختار دوم، دو یال فیدبک از رله‌ها به فرستنده را در نظر می‌گیریم. این مدل باعث می‌شود که فرستنده و رله‌ها هم‌کاری کامل با یک‌دیگر داشته باشند. برای این مدل دو نرخ قابل حصول به دست می‌آوریم. نرخ اول با استفاده از رهیافت "فشرده سازی-گسیل" و "افرازبندی تصادفی" به دست می‌آید. برای اثبات قابلیت حصول نرخ دوم از ترکیب رهیافت‌های "کدبرداری-گسیل" و "فشرده سازی-گسیل"، "افرازبندی تصادفی" و "افرازبندی یقینی" برای "کدبرداری محدودشده" استفاده می‌کنیم.

کلید واژه: شبکه‌ی رله، فیدبک پاره‌ای، نرخ قابل حصول، فشرده سازی-گسیل، کدبرداری-گسیل، افرازبندی تصادفی، افرازبندی یقینی، کدبرداری محدودشده، کدبرداری توأم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل ۱- مقدمه ۱

۱-۱- پیش‌گفتار ۱

۱-۲- فیدبک در سیستم‌های مخابراتی از نگاه نظریه‌ی اطلاعات ۵

۱-۲-۱- نقش فیدبک در تسهیل کدگذاری و کدبرداری ۵

۱-۲-۲- نقش فیدبک در تشخیص مشخصات کانال توسط فرستنده ۷

۱-۲-۳- نقش فیدبک در کانال‌های اشتراکی با تاخیر کم ۸

۱-۲-۴- فیدبک با حضور اطلاعات جانبی ۹

۱-۲-۵- شبکه‌ها با فیدبک کامل ۹

۱-۲-۶- شبکه‌ها با فیدبک تک گره ۹

۱-۳- ساختار پایان نامه ۱۳

۱-۴- معرفی برخی نمادها ۱۴

فصل ۲- مفاهیم اولیه و تعریف‌ها ۱۵

۲-۱- مقدمه ۱۵

۲-۲- کانال رله با فیدبک ۱۵

۲-۲-۱- کانال رله با فیدبک کامل ۱۷

۲-۲-۲- کانال رله با فیدبک پاره‌ای از گیرنده به فرستنده ۱۹

۲-۲-۳- کانال رله با فیدبک پاره‌ای از رله به فرستنده ۲۱

۲-۳- شبکه‌ی رله با فیدبک ۲۴

۲-۳-۱- شبکه‌ی رله با فیدبک کامل ۲۶

۲-۳-۲- شبکه‌ی رله با فیدبک پاره‌ای ۲۷

۲-۴- دنباله‌های نوعی ۲۷

۲-۵- نتیجه گیری ۲۹

فصل ۳- شبکه‌ی رله با فیدبک گیرنده به فرستنده ۳۱

۳-۱- مقدمه ۳۱

۳-۲- مدل شبکه و راهبرد اثبات قابل حصول بودن نرخ ۳۱

۳-۳- نرخ ارائه شده برای شبکه‌ی رله با دو رله و فیدبک گیرنده-فرستنده ۳۳

۳-۴- مقایسه و تعبیر نتایج ۴۳

۳-۵- نتیجه گیری ۴۵

فصل ۴- شبکه‌ی رله با فیدبک رله‌ها به فرستنده ۴۶

۴-۱- مقدمه ۴۶
۴-۲- مدل شبکه و راهبرد اثبات قابل حصول بودن نرخ‌ها ۴۶
۴-۳- نرخ‌های ارائه شده برای شبکه‌ی رله با دو رله و فیدبک رله‌ها به فرستنده ۴۸
۴-۴- مقایسه و تعبیر نتایج ۶۲
۴-۵- نتیجه گیری ۶۶
فصل ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۶۷
۵-۱- مقدمه ۶۷
۵-۲- مروری بر نتایج به دست آمده در این پایان نامه ۶۷
۵-۳- پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ۶۸
ضمیمه أ -تحلیل احتمال خطای قضیه‌ی ۳-۱ ..... ۷۰
ضمیمه ب -تحلیل احتمال خطای قضیه‌ی ۴-۱ ..... ۷۵
ضمیمه ج - تحلیل احتمال خطای قضیه‌ی ۴-۲ ..... ۷۷

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

شکل ۱-۱: کانال محک باینری ۶
شکل ۱-۲: یک کانال گسسته با حافظه ۷
شکل ۱-۳: یک شبکه‌ی چند کاربره در حالت کلی ۱۰
شکل ۱-۱: مدل یک کانال رله ۱۵
شکل ۱-۲: کانال رله با فیدبک کامل ۱۷
شکل ۱-۳: شبکه‌ی رله با N گره میانی ۲۴
شکل ۳-۱: مدل شبکه با دو رله و و فیدبک گیرنده-فرستنده ۳۲
شکل ۳-۲ افرازبندی کلمات کد مربوط به افرازبندی ۱ ..... ۳۶
شکل ۱-۳ افرازبندی کلمات کد مربوط به افرازبندی ۲ ..... ۳۶
شکل ۱-۴ افرازبندی کلمات کد مربوط به افرازبندی ۳ ..... ۳۷
شکل ۱-۵ چگونگی ارتباط بین متغیرهای تصادفی کمکی ۴۳
شکل ۱-۱ شبکه‌ی رله با دو رله و فیدبک از رله ها به فرستنده ۴۶
شکل ۱-۲ نحوه‌ی ارتباط بین متغیرهای تصادفی در قضیه ۴-۱ ..... ۶۲
شکل ۱-۳ نحوه‌ی ارتباط بین متغیرهای تصادفی در قضیه ۴-۲ ..... ۶۳

فصل ۱– مقدمه

۱–۱– پیشگفتار

شانون[1] در سال ۱۹۴۸ میلادی با انتشار مقاله‌ی "نظریه‌ی ریاضی مخابرات"، نظریه‌ی اطلاعات را پایه گذاری کرد [۱]. شانون یک مدل ساده‌ی ریاضی برای نمودار بلوکی مخابرات دیجیتال ارائه نمود و نشان داد که با اعمال محدودیت در نرخ ارسال اطلاعات از کانال (ظرفیت کانال) می‌توان خطای آشکارسازی را به حداقل رساند. در واقع نظریه‌ی شانون تطبیق منبع اطلاعات با کانال توسط کدگذاری مناسب می‌باشد. شانون هم‌چنین نشان داد فرایندهای اتفاقی دارای پیچیدگی تقلیل ناپذیری هستند، به طوری‌که نمی-توان این سیگنال‌ها را تا مقدار کمتر از این پیچیدگی فشرده کرد. شانون این پیچیدگی را *آنتروپی*[2] نامید و نشان داد که اگر آنتروپی منبع کمتر از ظرفیت کانال باشد می‌توان اطلاعات را به صورت مجانبی بدون خطا ارسال نمود. به عبارت دیگر نظریه‌ی اطلاعات، بررسی آماری یا ریاضی سیستم‌های مخابراتی است که در مورد سه محور اصلی:

- اندازه گیری اطلاعات موجود در منابع
- ظرفیت کانال‌های ارتباطی برای انتقال اطلاعات
- کدگذاری و کدبرداری برای استفاده‌ی بهینه از منابع و کانال‌ها

بحث می‌نماید. نظریه‌ی اطلاعات به دو سوال اساسی در نظریه‌ی مخابرات پاسخ می‌دهد [۲]:

۱. اطلاعات را تا چه حد می‌توان فشرده کرد؟

۲. حداکثر نرخ ارسال اطلاعات در کانال چقدر باشد تا احتمال خطا به سمت صفر میل نماید؟

نظریه‌ی اطلاعات، مباحث مربوط به دو انتهای یک سیستم مخابراتی را در بر می‌گیرد. در مبدأ، فشرده سازی اطلاعات را تا حد کمترین مقدار $I\left(X;\hat{X}\right)$ داریم و در مقصد باید بیشترین میزان اطلاعات ارسالی

[1] Shannon
[2] Entrpy

$I(X;Y)$ را داشته باشیم، که همان ظرفیت کانال می‌باشد. بنابراین تمام روش‌های مدولاسیون و فشرده سازی اطلاعات باید بتوانند این حدود را برآورده کنند.

فیدبک معمولاً جزئی از سیستم‌های مخابراتی می‌باشد. به عنوان مثال، در طول یک تماس تلفنی با دریافت فیدبک از طرف مقابل می‌توان کیفیت مکالمه را بهبود داد. اغلب سیستم‌های مخابراتی، سیستم-های دو طرفه هستند و بنابراین می‌توان در زمان ارسال اطلاعات در یک جهت، از جهت دیگر به عنوان یال فیدبک استفاده نمود.

منظور از فیدبک در یک کانال مخابراتی، هر نوع روشی است که بتوان اطلاعاتی را از گیرنده یا کانال به فرستنده ارسال نمود تا فرستنده بتواند براساس این اطلاعات در مورد ارسال‌های بعدی خود تصمیم گیری نماید. به طور معمول یال فیدبک در سیستم‌های عملی همراه با نویز و تاخیر می‌باشد. اما به دلائلی که در زیر بیان می‌شود، در این پایان نامه و در اکثر پژوهش‌ها، فیدبک بدون تاخیر و بدون نویز فرض می‌شود.

یکی از دلائل فرض فیدبک ایده‌آل این است که در اکثر پژوهش‌ها، کران بالا برای نرخ کانال در حضور فیدبک تعیین می‌شود و فرض غیر ایده‌آل بودن فیدبک، این کران‌های بالا را نمی‌تواند تغییر دهد. دلیل دیگر این است که تحلیل فیدبک ایده‌آل ساده‌تر می‌باشد و هم‌چنین سیستم‌های عملی وجود دارند که شرایط فیدبک در آن‌ها نزدیک به حالت ایده‌آل می‌باشد، مانند شبکه‌های کامپیوتری اترنت[1].

مسئله‌ی فیدبک در نظریه‌ی اطلاعات برای اولین بار توسط شانون مطرح شد. او نشان داد که ظرفیت یک کانال گسسته و بدون حافظه‌ی تک کاربره با فیدبک افزایش پیدا نمی‌کند [۳].

در یک کانال دسترسی چندگانه، هر کدام از مسیرها مانند یک کانال گسسته و بدون حافظه عمل می‌کند. در این کانال، فیدبک به دلیل ایجاد همکاری بین فرستنده‌ها می‌تواند ناحیه‌ی ظرفیت کانال را افزایش دهد [۴-۵]. توماس[2] در [۶] نشان داد فیدبک، ناحیه‌ی ظرفیت کانال دسترسی چندگانه‌ی

[1] Ethernet
[2] Thomas

گسسته و بدون حافظه‌ی گوسی با دو کاربر را حداکثر ۲ برابر می‌کند. کینگ[1] در رساله‌ی دکتری خود نوع جدیدی از فیدبک با عنوان فیدبک تعمیم یافته را برای کانال دسترسی چندگانه معرفی کرد. در این مدل، یال‌های فیدبک به‌جای این‌که از گیرنده به فرستنده باشند از کانال به فرستنده‌ها می‌باشند. این نوع فیدبک برای سیستم‌های بی‌سیم عملی‌تر می‌باشد [۷].

الجمال[2] در سال‌های ۱۹۷۸ و ۱۹۸۱ نشان داد که ناحیه‌ی ظرفیت کانال پخش نازل گسسته و بدون حافظه و کانال پخش نازل گوسی، با فیدبک کامل افزایش پیدا نمی‌کند [۸-۹]. در سال ۱۹۸۴، اوزارو[3] نشان داد که فیدبک می‌تواند ظرفیت کانال پخش گسسته و بدون حافظه و کانال پخش گوسی را در حالت کلی افزایش دهد [۱۰].

از مهم‌ترین و جامع‌ترین پژوهش‌هایی که در زمینه‌ی کانال تداخل با فیدبک صورت گرفته است می‌توان به مقالات تونینتی[4] اشاره کرد. در این مقالات مدل کانال تداخل با فیدبک تعمیم یافته ارائه شده است. در این مدل، مانند کانال تداخل، هر فرستنده اطلاعات خود را به گیرنده متناظرش ارسال می‌کند. بنا به طبیعت پخشی بودن کانال‌های بی‌سیم، هر فرستنده می‌تواند از اطلاعات ارسال شده توسط فرستنده‌ی دیگر نیز اطلاع پیدا کند. این مسئله باعث ایجاد همکاری بین فرستنده‌ها و در نتیجه افزایش نرخ ارسال می‌شود [۱۱-۱۲].

کانال رله برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط وندرمولن[5] به عنوان حالت خاصی از شبکه‌ی سه ترمیناله معرفی و کران‌های پایینی برای ظرفیت آن ارائه شد [۱۳]. سال ۱۹۷۶، ساتو[6] مثالی از کانال رله‌ی نازل را مطرح و یک کران بالائی و دو کران پائینی برای ظرفیت آن ارائه نمود [۱۴]. در سال ۱۹۷۹، مهم‌ترین نتایج در مورد کانال رله توسط کوور[7] و الجمال ارائه شد [۱۵]. روش‌های مختلف "کدگذاری

[1] King
[2] El Gamal
[3] Ozarow
[4] Tuninetti
[5] Van-Der Meulen
[6] Sato
[7] Cover

برهم نهی مارکوف قالبی[۱]"، "افرازبندی تصادفی[۲]"، "اطلاعات جانبی[۳]" و کران بالایی کات-ست[۴] برای ظرفیت این کانال برای اولین بار در این مقاله مطرح و ظرفیت کانال رله‌ی نازل[۵]، کانال رله نازل معکوس[۶]، کانال رله نازل گوسی[۷] با قید توان محاسبه شد. کانال رله با فیدبک نیز برای اولین بار در این مقاله مطرح شد و ظرفیت کانال رله با فیدبک کامل[۸] یعنی فیدبک از گیرنده به فرستنده و رله و از رله به فرستنده به دست آمد. براساس اثبات ظرفیت کانال رله با فیدبک کامل، می‌توان نشان داد که ظرفیت کانال رله با فیدبک پاره‌ای[۹] از گیرنده به رله نیز برابر ظرفیت کانال رله با فیدبک کامل می‌باشد [۱۶-۱۸]. عابد هم‌چنین در [۱۶] نشان داد که ظرفیت کانال رله‌ی شبه یقینی[۱۰] با فیدبک تغییر نمی‌کند. کانال رله با فیدبک پاره‌ای از گیرنده به رله یا فرستنده در سال ۲۰۰۶ توسط گابای[۱۱] و براس[۱۲] مورد بررسی قرار گرفت و نرخ‌های قابل حصولی برای این دو کانال ارائه شد [۱۹]. در سال ۲۰۰۹ نیز براس و ویگر[۱۳] به طور خاص مسئله‌ی فیدبک پاره‌ای از گیرنده به فرستنده را بررسی کردند و نرخ به دست آمده در [۱۹] را بهبود دادند [۱۸]. براس در [۲۰] یک کران بالا برای کانال رله با فیدبک از رله به فرستنده به دست آورد که بالاتر از کران بالای کات-ستی می‌باشد که در [۱۵] به دست آمده است.

درسال ۱۹۸۰، عارف شبکه‌ی رله را معرفی و ظرفیت "شبکه‌ی رله‌ی معین بدون تداخل (شبکه‌ی عارف)" با ورودی‌های مستقل، "کانال رله‌ی نیمه معین" و "شبکه‌ی رله‌ی نازل" را در حالت کلی و حالت گوسی با تعمیم روش "افرازبندی تصادفی" محاسبه کرد [۲۱]. هم‌چنین عارف مسئله‌ی شبکه‌ی رله با فیدبک کامل یعنی فیدبک از گیرنده به فرستنده و تمام رله‌ها و از هر رله به فرستنده و رله‌های قبلی را مطرح کرد و نشان داد که فیدبک کامل می‌تواند ظرفیت شبکه‌ی رله‌ی عادی را افزایش دهد

[1] Block Markov Superposition Encoding
[2] Random Partitioning
[3] Side Information
[4] Cut-Set
[5] Degraded Relay Channel
[6] Reversely Degraded
[7] Gaussian
[8] Complete Feedback
[9] Partial Feedback
[10] Semi-Deterministic
[11] Gabbai
[12] Bross
[13] Wigger

[۲۱]. عابد در [۱۶] نشان داد که ظرفیت شبکه‌ی رله با فیدبک پاره‌ای از گیرنده به رله‌ها و از هر رله به رله‌های قبلی، برابر ظرفیت شبکه‌ی رله با فیدبک کامل می‌باشد.

مسئله‌ی شبکه‌ی رله با دو رله و ارائه‌ی نرخ‌های قابل حصول برای این شبکه‌ها با استفاده از رهیافت-های "فشرده‌سازی-گسیل[۱]"، "کدبرداری پاره‌ای[۲]" و ترکیب "کدبرداری-گسیل[۳]" و "فشرده سازی-گسیل" برای شبکه‌های رله‌ی سری، موازی و متقارن در [۲۲-۲۵] بررسی شده است.

در این پایان نامه مسئله‌ی شبکه‌ی رله با دو رله و فیدبک پاره‌ای به فرستنده بررسی می‌شود و نرخ-های قابل حصولی برای این شبکه‌ها با استفاده از رهیافت‌های مختلف ارائه می‌شود.

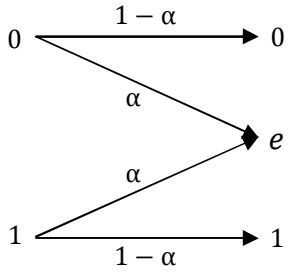
۱-۲- فیدبک در سیستم های مخابراتی از نگاه نظریه‌ی اطلاعات

در این بخش به بررسی نقش فیدبک در سیستم‌های مخابرتی با نگاه نظریه‌ی اطلاعاتی می‌پردازیم. فیدبک حتی در صورت عدم افزایش ظرفیت، به روش‌های مختلف به انتقال اطلاعات در یک سیستم مخابراتی کمک می‌کند. در این بخش به مواردی از نحوه‌ی تاثیر فیدبک در سیستم‌های مخابراتی اشاره می‌کنیم. هم‌چنین مباحثی کلی در زمینه‌ی شبکه‌ها با فیدبک مطرح خواهیم کرد.

۱-۲-۱- نقش فیدبک در تسهیل کدگذاری و کدبرداری

به طور شهودی می‌توان گفت که هر نوع تصحیح در برداشت گیرنده از پیام فرستنده، می‌تواند نرخ ارتباط را بهبود بخشد. اما می‌توان نشان داد که برای یک کانال بدون حافظه‌ی تک کاربره، نمی‌توان نرخ بیشینه‌ی ارسال اطلاعات را افزایش داد [۳]. اما فیدبک روند کدگذاری و کدبرداری جهت حصول ظرفیت را به شدت تسهیل می‌کند. به عنوان مثال، کانال محک باینری نشان داده شده در شکل ۱-۱ را در نظر بگیرید. در صورت وجود فیدبک، اگر یک بیت از بین برود، تا زمانی که گیرنده دریافت صحیحی داشته باشد می‌توان اطلاعات مورد نظر را مجدداً ارسال نمود. اگر بیت‌ها با احتمال $1-\alpha$ صحیح دریافت شوند

[1] Compress-Forward
[2] Partial Decoding
[3] Decode-Forward



شکل ۱-۱ کانال محک باینری

و در هر لحظه یک بیت دریافت شود، ارسال یک بیت در هر ارسال همراه با موفقیت خواهد بود و نرخ موثر ارسال برابر $1-\alpha$ است. بنابراین، در صورت وجود فیدبک به راحتی می‌توان به ظرفیت $1-\alpha$ بیت بر ارسال دست پیدا کرد. ظرفیت این کانال بدون فیدبک نیز برابر $1-\alpha$ بیت بر ارسال می‌باشد، اما برای رسیدن به این ظرفیت بدون فیدبک به کدهای پیچیده با طول قالب طولانی نیاز داریم. بنابراین، ملاحظه می‌شود که اطلاع از خطای ایجاد شده توسط کانال، روند ارتباط را تسهیل می‌کند، حتی اگر نتوان بیشینه‌ی نرخ قابل حصول را افزایش داد.

به عنوان مثال دیگری از تسهیل کدگذاری توسط فیدبک، می‌توان به روش کایلاث[۱]–شالکویجک[۲] [۲۶] برای کدگذاری کانال گوسی با فیدبک اشاره نمود. در این روش، فرستنده تلاش می‌کند تا یک عدد حقیقی را برای گیرنده ارسال نماید. به دلیل وجود نویز در کانال، گیرنده نسخه‌ی مخدوشی از این عدد را دریافت می‌نماید و تخمینی از عدد ارسال شده را محاسبه می‌کند. به دلیل وجود فیدبک، فرستنده نیز می‌تواند همین تخمین را به دست آورده و خطای کانال را محاسبه نماید. در ارسال بعد، فرستنده نسخه-ی مقیاس[۳] شده‌ای از خطا را ارسال می‌نماید که گیرنده برای به روز کردن تخمین خود از پیام استفاده می‌کند.

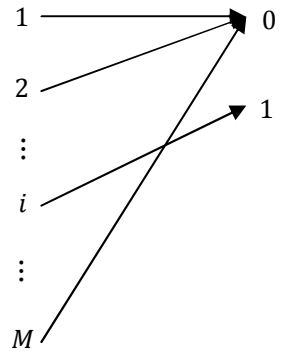
[1] Kailath
[2] Schalkwijk
[3] Scaled

کایلاث و شالکویجک نشان دادند که این روش علاوه بر حصول ظرفیت کانال، باعث افت احتمال خطا با افزایش طول قالب کد به صورت نمایی از ۲ می‌شود. بنابراین با طول‌های قالب کوتاه می‌توان به احتمال خطاهای بسیار پایین دست پیدا کرد.

در کنار طراحی کدهای پیچیده برای کانال‌ها در حضور فیدبک، بیشتر سیستم‌های عملی از فیدبک تنها برای روش ARQ[1] استفاده می‌کنند. در این روش، فرستنده مجدداً پیام با خطا دریافت شده را ارسال می‌نماید. روش ARQ برای کنترل خطا در بسیاری از شبکه‌های کامپیوتری استفاده می‌شود [۲۷]. با وجود این‌که کدهای پیچیده معمولاً کارائی بهتری دارند، اما در اغلب موارد نیازی نیست که تا این حد هزینه پردازش به هر گره تحمیل کنیم.

۱-۲-۲- نقش فیدبک در تشخیص مشخصات کانال توسط فرستنده

کانال‌های مخابراتی گاهی مشخصاتی دارند که برای فرستنده نامشخص می‌باشند که دانستن آن‌ها می‌تواند تا حد زیادی نرخ ارسال را بهبود بخشد. به عنوان مثال، کانال نشان داده شده در شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید. این کانال دارای M سمبل ورودی $\{1,2,\dots,M\}$ و دو سمبل خروجی $\{0,1\}$ است. کانال دارای M حالت متناظر با هر یک از سمبل‌های ورودی است، به طوری که یکی از سمبل‌ها (سمبل i) به 1 و سایر سمبل‌ها به 0 نگاشت می‌شوند. اگر حالت کانال مشخص باشد، می‌توان یک بیت بر ارسال را از طریق این کانال ارسال نمود.



شکل ۱-۲ یک کانال گسسته با حافظه [۳۱].

[1] Acknowledge Request

اما در صورت نامشخص بودن حالت کانال، در بهترین شرایط می‌توان تمام سمبل‌ها را با احتمال یکسان به‌کار برد. بنابراین ظرفیت کانال بدون فیدبک (عدم آگاهی از حالت کانال) برابر خواهد بود با

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) = H\left(\frac{M-1}{M}, \frac{1}{M}\right) \approx \frac{\log M}{M}$$

اما در صورت وجود فیدبک به راحتی می‌توان از حالت کانال اطلاع پیدا کرد. به عنوان مثال، می‌توان یک دنباله‌ی آزمون به طول M ارسال نمود. بعد از آگاهی از حالت کانال می‌توان به ظرفیت ۱ بیت در هر ارسال دست پیدا کرد. بنابراین فیدبک، ظرفیت کانال را با نسبت $\frac{M}{\log M}$ افزایش می‌دهد. به عنوان نمونه دیگری از نقش فیدبک در مشخص کردن وضعیت کانال و بهبود نرخ ارتباط می‌توان به روش‌های همسان‌سازی تطبیقی[1] در مخابرات دیجیتال برای خطوط تلفن اشاره نمود. مشخصات نویز و پاسخ فرکانسی خط تلفن ثابت نیست، بنابراین همسان‌ساز با استفاده از فیدبک، این مشخصات را به دست آورده و اصلاح می‌کند و در نتیجه می‌تواند نرخ ارتباط را بهبود ببخشد.

۱-۲-۳- نقش فیدبک در کانال‌های اشتراکی با تاخیر کم

فیدبک در پروتکل‌های مخابراتی نظیر ALOHA که تعداد زیادی از کاربران از یک کانال مشترک استفاده می‌کنند، نقش مهمی دارد. فرض می‌کنیم که فرستنده اطلاعات را در بسته‌هایی در مقاطع زمانی[2] ثابت ارسال می‌کند. در پروتکل ALOHA، هر فرستنده در هر زمانی که پیامی داشته باشد شروع به ارسال می‌نماید. اگر در زمانی که یک فرستنده در حال ارسال اطلاعات می‌باشد، فرستنده‌ی دیگری هم پیامی داشته باشد و شروع به ارسال نماید تصادم رخ خواهد داد و هر دو پیام از بین خواهد رفت. به دلیل وجود فیدبک، فرستنده‌ها از برخورد اطلاع پیدا می‌کنند، بنابراین هر کدام از فرستنده‌ها زمانی را به صورت تصادفی منتظر می‌مانند و مجدداً اقدام به ارسال اطلاعات می‌نمایند. در [۲۸] نشان داده شده است که با استفاده از این روش می‌توان حداکثر $\frac{1}{e} = 0.37$ بسته در هر بازه‌ی زمانی ارسال کرد. با استفاده از این روش تعداد دلخواهی از کاربران می‌توانند یک کانال را با میزان تاخیر کم به اشتراک

[1] Adaptive Equalization
[2] Time Slot

بگذارند. در [۲۹] نشان داده شده است که برای حالت بدون فیدبک و تعداد ثابتی از کاربران می‌توان به گذردهی[1] کانال به اندازه‌ی $1/e$ بسته در هر بازه‌ی زمانی دست پیدا کرد.

۱-۲-۴- فیدبک با حضور اطلاعات جانبی

در [۳۰] مسئله‌ی ارسال اطلاعات، زمانی که گیرنده دارای اطلاعات جانبی همبسته می‌باشد، مطرح شد. این مسئله در بدترین حالت یعنی زمانی که هیچ خطایی قابل قبول نباشد بررسی شد و نشان داده شد که ارسال مقداری اطلاعات از گیرنده به فرستنده می‌تواند کمک کننده باشد، به این معنی که می‌تواند تعداد کل بیت‌های لازم جهت ارسال را با ضریب نمایی کاهش دهد. در این مسئله، هر ارسال در هر دو جهت پیشرو یا پسرو مانند ارسال یک پیام می‌باشد و هدف کاهش تعداد کل بیت‌های لازم جهت ارسال یک پیام است. در [۳۰] نشان داده شد که تبادل بیشتر از دو پیام، تعداد کل بیت‌های لازم برای ارسال را در مقایسه با حالت دو پیام، حداکثر ۴ برابر کم می‌کند.

۱-۲-۵- شبکه‌ها با فیدبک کامل

در این مسئله فرض بر این است که سمبل‌های دریافتی توسط تمام گیرنده‌ها به محض دریافت در گیرنده و بدون نویز به تمام فرستنده‌ها فیدبک می‌شود. برای یک شبکه با m گره، می‌توان گفت که m سمبل دریافتی در زمان i، یعنی $Y_i^{(1)}, \dots, Y_i^{(m)}$، قبل از زمان $i+1$ به تمام گره‌ها فیدبک می‌شود. بنابراین تمام گره‌ها، برداری از سمبل‌های $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(m)}$ را دریافت می‌کنند. بر این اساس می‌توان گفت که یک شبکه با فیدبک، شبیه یک کانال دسترسی چندگانه[2] با فیدبک است و می‌توان قضایا و نتایج مربوط به کانال دسترسی چندگانه با فیدبک را به شبکه‌ها با فیدبک تعمیم داد.

۱-۲-۶- شبکه‌ها با فیدبک تک گره

در مسئله‌ی فیدبک تک گره[3]، سمبل ارسالی در یک گره به سمبل‌های قبلی دریافتی در آن گره وابسته است. این حالت از فیدبک عملی‌تر از فیدبک کامل می‌باشد ولی اندکی با فیدبک کامل تفاوت

[1] Throughput
[2] Multiple-Access Channel
[3] Single Node

دارد. به این ترتیب که در فیدبک تک گره، فیدبک به طور ضمنی در سمبل‌های دریافتی مستتر است. این نوع فیدبک، مشابه فیدبک تعمیم یافته[1] در کانال دسترسی چندگانه می‌باشد که در [۷] بررسی شده است.

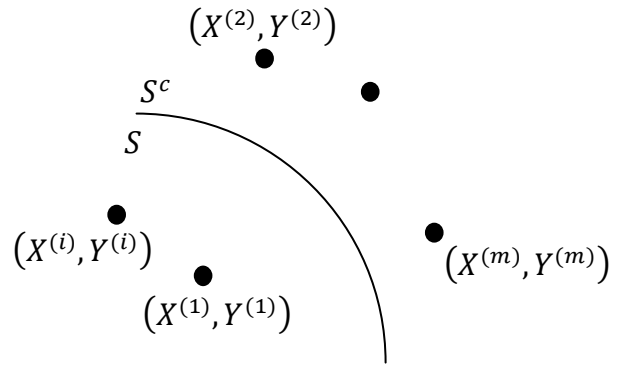
در ادامه برای تحلیل نقش فیدبک در این شبکه‌ها مسائل و قضایایی را مطرح می‌کنیم. با توجه به شکل ۱-۴ برای یک شبکه در حالت کلی، دو مجموعه گره تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌ی S و مکمل آن، مجموعه‌ی S^c. قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌شود، کران بالائی نرخ ارسال اطلاعات از مجموعه‌ی گره‌های S به سمت گره‌های S^c را مشخص می‌کند. این قضیه در واقع تعمیم نتایجی است که در [۲۱] برای شبکه‌ی رله در حالت کلی به دست آمده است.

در [۳۴] نشان داده شده است که، کران بالای نرخ کل ارسال اطلاعات از S به S^c برابر اطلاعات متقابل بین ورودی‌ها در S و خروجی‌ها در S^c مشروط به ورودی‌ها در S^c می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\sum_{j:S_j\subseteq S,T_j\cap S^c\neq\emptyset} R^{(j)} \le I\left(X^{(S)};Y^{(S^c)}\middle|X^{(S^c)}\right)$$

برای چگالی احتمال توام $p\left(x^{(1)},\dots,x^{(m)}\right)$. به طوری که S_j مجموعه‌ی مبدا، T_j مجموعه‌ی مقصد و $P=\{j:S_j\subseteq S,T_j\cap S^c\neq\emptyset\}$ مجموعه‌ی یال‌هایی است که گره‌های موجود در S را به گره‌های موجود در S^c متصل می‌کند.



شکل ۱-۳ یک شبکه‌ی چند کاربره در حالت کلی [۳۱]

[1] Generalized Feedback

با استفاده از این قضیه به بررسی برخی خواص ناحیه‌ی ظرفیت شبکه‌ها با فیدبک می‌پردازیم.

- فیدبک نمی‌تواند بیشینه‌ی نرخ اطلاعات ورودی به یک گره را افزایش دهد.

علت این مسئله این است که، بیشینه‌ی نرخ اطلاعاتی که می‌تواند به یک گره (مثلاً گره ۱) ارسال شود، زمانی است که سایر گره‌ها در ارسال اطلاعات به گره ۱ با هم همکاری نمایند. این بیشینه‌ی نرخ زمانی است که مجموعه‌ی ورودی برابر $S = \{2,3, \dots, m\}$ و مجموعه خروجی برابر $S^c = \{1\}$ باشد. این نرخ بیشینه برابر است با

$$R(S, S^c) = \max_{p(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})} I\left(X^{(2)}, \dots, X^{(m)}; Y^{(1)} \middle| X^{(1)}\right)$$

$$= \max_{x^{(1)}} \max_{p(x^{(2)}, \dots, x^{(m)})} I\left(X^{(2)}, \dots, X^{(m)}; Y^{(1)} \middle| X^{(1)} = x^{(1)}\right)$$

اگر تمام گره‌های موجود در S پیام یکسانی را ارسال نمایند، این نرخ بدون فیدبک نیز قابل حصول است. بنابراین نرخ بیشینه‌ی تمام مسیرها با $m-1$ گره ورودی و 1 گره خروجی با حضور فیدبک تغییر نمی-کند.

- بیشینه‌ی گذردهی کل قابل حصول شبکه (مجموع نرخ‌های تمام مسیرها در شبکه) در حضور فیدبک حداکثر m برابر می‌شود.

این مسئله در واقع تعمیم استدلال هندسی در کانال دسترسی چندگانه با m کاربر است. تمام مسیرها در شبکه باید به یک یا چند گره منتهی شوند. بنابراین تمام مسیرها باید در حصول نرخ $R(i^c, i)$ برای گرهی مانند i همکاری نمایند. بنابراین برای گذردهی کل شبکه داریم

$$R_T \leq \sum_{i=1}^{m} R(i^c, i)$$

بیشینه‌ی مقدار $R(i^c, i)$ بدون فیدبک قابل حصول است، اگر تمام گره‌ها به جز i پیام یکسانی را ارسال نمایند. از آن‌جا که مجموع m عدد، کوچکتر از m برابر بزرگترین عدد است، بیشینه‌ی گذردهی با فیدبک از m برابر بیشینه‌ی نرخ قابل حصول بدون فیدبک کمتر است. این نتیجه، گذردهی کل با فیدبک را با گذردهی کل قابل حصول روی تمام مسیرها بدون فیدبک مقایسه می‌کند.