چکیده

یک ماتریس مشبکه، ماتریسی است که درایه های آن از یک مشبکه توزیع پذیربرداشته شده است .جمع و ضرب چنین ماتریس‌هایی مشابه ماتریس‌های معمولی تعریف می‌شود با این تفاوت که به جای عمل جمع و ضرب درایه‌ها به ترتیب سوپریمم و اینفیمم به‌کار می‌رود. به وضوح مجموعه ماتریس‌های مربعی مشبکه‌ای که درایه‌هایشان از L انتخاب شده‌اند، مشبکه‌ای است که عمل سوپریمم و اینفیمم بین دو ماتریس ،به صورت سوپریمم و اینفیمم بین درایه ها نظیر به نظیر تعریف می‌شود. فرض کنیم A و ξ ماتریس‌های مشبکه‌ای هستند که ξ ستونی و A مربعی است و به ازای $\lambda \in L$، $A\xi = \lambda\xi$ در این صورت λ را مقدار ویژه A وابسته به ξ و ξ بردار ویژه گویند.

هدف این پایان نامه اولاً به دست آوردن ماکزیمم بردار ویژه ماتریس مربعی A، وابسته به یک مقدار ویژه مشخص آن مثلاً λ است. ثانیاً بعضی از خاصیت‌های ماتریسی مربعی را بدست می‌آوریم که بین همه ماتریس‌هایی که دارای بردار ویژه ξ متناظر با مقدار ویژه λ هستند ماکزیمم است. سپس بردار ویژه‌ای را که همه‌ی درایه‌هایشان یکسانند به عنوان بردار ویژه اولیه تعریف کرده و ساختار ماتریس‌هایی را که بردار ویژه اولیه دارند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.درپایان نشان خواهیم داد که برای هر $\lambda \in L$ و هر بردار اولیه مانند ξ، ماتریس ماکزیمم $M(\lambda, \xi)$ موجود است به طوری که ξ، بردار ویژه اولیه ماکزیمال ماتریس M، وابسته به λ باشد.

کلمات کلیدی : ماتریس مشبکه، بردار ویژه، مقدار ویژه، دامنه تغییرات، بردار ویژه اولیه، پایا

فهرست مطالب

مقدمه

رادرفورد[۱] برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ نشان داد که اگر ξ بردار ویژه‌ی ماتریس A روی مشبکه‌ی بولی [۲] B باشد، آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس A وابسته به ξ به صورت بازه‌ای در B است. در سال ۱۹۹۸، تان[۳] این قضیه را به مشبکه‌های کامل و کاملاً توزیع‌پذیر تعمیم داد. همچنین رادرفورد در سال ۱۹۶۵ نشان داد که برای ماتریس مربعی A روی مشبکه‌ی بولی B ، هر اسکالر در B مقدار ویژه ماتریس A است و بردارهای ویژه A وابسته به مقدار ویژه λ به صورت یک زیرفضایی از فضای بردارهای روی B هستند. یعنی این بردارهای ویژه نسبت به عمل " $\vee$ " و ضرب اسکالر بسته هستند. به علاوه او یک فرمول برای ماکزیمم بردار ویژه در این فضای ویژه به‌دست آورد. در سال ۱۹۹۶ برای اولین بار بلیث[۴] در مشبکه‌ی بولی، ماتریس‌هایی مانند A را مورد مطالعه قرار داد که، برای یک بردار داده شده مانند ξ و یک اسکالر مانند λ در L، ξ بردار ویژه مربوط به A و وابسته به λ باشد. همچنین او نشان داد که این ماتریس‌ها به صورت یک گربیر[۵] هستند.یعنی این ماتریس ها نسبت به عمل " $\vee$ " بسته هستند وعمل ضرب روی $\vee$ ازدو طرف توزیع‌پذیراست. تان توانست این نتیجه را به مشبکه‌های کامل و کاملاً توزیع‌پذیر تعمیم دهد. فصل اول این پایان نامه را به بیان مفاهیم اساسی و تعاریف مورد نیاز در زمینه مشبکه‌ها و ماتریس مشبکه و ماتریس فازی اختصاص داده‌ایم. در فصل دوم به بیان مفاهیم بردار ویژه و مقدار ویژه یک ماتریس، همچنین تعریف بردار ویژه اولیه و بردار ویژه

---

[۱] Ruther ford
[۲] Boolean lattice
[۳] Tan
[۴] Blyth
[۵] Gerbier

اولیه ماکزیمال پرداخته‌ایم. سپس دامنه تغییرات λ و بردار ویژه اولیه ماکزیمال $\xi^*(\lambda)$ و ماتریس ماکزیمم $M(\lambda, \xi)$ را تعیین می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نظریه‌ی مشبکه‌ها

هدف این بخش، بیان مفاهیمی از نظریه‌ی مشبکه‌ها، مانند مشبکه‌های توزیع‌پذیر، مشبکه‌های بولی و مشبکه‌های کاملاً توزیع‌پذیر است که در ادامه کاربرد دارند. مطالب این بخش از منابع [۱] ، [۵] و [۶] استفاده شده است .

تعریف ۱.۱ رابطه $\leq$ روی مجموعه‌ی غیرتهی P را یک «ترتیب جزئی» گوییم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in P$ داشته باشیم:

الف) خاصیت بازتابی : $a \leq a$،

ب) خاصیت پادتقارنی : اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آن‌گاه $a = b$،

ج) خاصیت تعدی : اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آن‌گاه $a \leq c$.

مجموعه P همراه با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ یک مجموعه «مرتب جزئی» یا جزئاً مرتب نامیده می‌شود.هرگاه $a \leq b$ و $a \neq b$ می‌نویسیم $a < b$. به وضوح رابطه‌ی $<$، جزئاً مرتب نیست.

تعریف ۲.۱ فرض می‌کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد. گوییم P «زنجیر» یا مجموعه‌ی «مرتب خطی» است اگر هر دو عضوش قابل مقایسه باشند یعنی به ازای هر $a, b \in P$، $a \leq b$ یا

$b \le a$. اگر دو عضو a, b قابل مقایسه نباشند نماد $a||b$ را به کار می‌بریم. همچنین اگر به ازای هر دو عضو a, b، که $a \neq b$ داشته باشیم $a||b$، آن مجموعه را یک «مجموعه نامرتب» گوییم.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $(P, \le)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و $\emptyset \neq Q \subseteq P$، آن‌گاه تحدید رابطه $\le$ بر Q یک رابطه جزئاً مرتب بر Q است.

تعریف ۴.۱ یک زنجیر C در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی P، زیرمجموعه‌ای غیرتهی است که به عنوان زیرمجموعه مرتب جزئی از P یک زنجیر باشد. در این صورت طول زنجیر C که با نماد $l(C)$ نمایش می‌دهیم برابر است با $|C| - ۱$. گوییم مجموعه جزئاً مرتب P دارای طول n است $(n \in N)$ هرگاه یک زنجیری با طول n در P موجود باشد و هر زنجیر دیگر در P دارای طول کمتر یا مساوی n باشد.

تعریف ۵.۱ یک «پاد زنجیر C» در یک مجموعه مرتب جزئی P، زیرمجموعه‌ای غیر تهی است که به عنوان زیرمجموعه‌ی مرتب جزئی از P نامرتب باشد. گوییم «عرض مجموعه‌ی مرتب جزئی P» برابر n $(n \in \mathbb{N})$ است هرگاه پاد زنجیری از n عنصر در P موجود باشد و هر پاد زنجیر دیگر در P دارای تعداد عناصر کمتر از n باشد. عرض مجموعه‌ی مرتب جزئی P را با نماد $w(P)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۱ فرض کنید n عددی طبیعی است و $D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}$. به وضوح $(D(n), |)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است. به ازای $n =$ ۲۰ داریم $D(۲۰) = \{۱،۲،۴،۵،۱۰،۲۰\}$. ملاحظه می‌شود که دو عنصر ۲ و ۴ یا ۵ و ۱۰ مقایسه‌پذیرند اما دو عنصر ۲ و ۵ مقایسه‌ناپذیرند.

به علاوه $\{۱،۲،۱۰،۲۰\}$، $\{۱،۲،۴،۲۰\}$ و $\{۱،۵،۱۰،۲۰\}$ زنجیرهایی به طول ۳ در این مجموعه هستند به وضوح $l(D(۲۰)) =$ ۳ و $w(D(۲۰)) =$ ۲.

مثال ۷.۱ اگر Aیک مجموعه ی دلخواه و Pمجموعه‌ی همه‌ی روابط جزئاً مرتب روی مجموعه ی Aباشد، آن گاه Pبا رابطه ی شمول یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.

مثال ۸.۱ $(P(X),\subseteq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است.

مثال ۹.۱ فرض می‌کنیم A مجموعه تمام توابع با مقدار حقیقی روی مجموعه X باشد. برای هر $f,g\in A$، تعریف می‌کنیم $f\leq g$ هرگاه برای هر $x\in X$، $f(x)\leq g(x)$. در این صورت $(A,\leq)$ مجموعه جزئاً مرتب است.

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. در این صورت

الف) $a\in P$ را عنصر «ماکزیمال» P گویند اگر $x\in P$ ای وجود نداشته باشد به طوری که $a<x$.

ب) $a\in P$ را عنصر «ماکزیمم» P گویند اگر برای هر $x\in P$، $x\leq a$.

ج) $b\in P$ را عنصر «مینیمال» P گویند اگر $x\in P$ای وجود نداشته باشد به طوری که $x<b$.

د) $b\in P$ را عنصر «مینیمم» P گویند اگر برای هر $x\in P$، $b\leq x$.

پ) عنصر ماکزیمم P را در صورت وجود با نماد ۱ نمایش می‌دهیم.

ت) عنصر مینیمم P را در صورت وجود با نماد ۰ نمایش می‌دهیم.

عنصر ماکزیمم (مینیمم) در صورت وجود نه تنها منحصر به‌فرد است بلکه تنها عنصر ماکزیمال (مینیمال) مجموعه جزئاً مرتب است. اما عنصر ماکزیمال (مینیمال) در صورت وجود لزومی ندارد منحصر به‌فرد باشد. حتی اگر منحصر به‌فرد هم باشد وجود عنصر ماکزیمم (مینیمم) را نتیجه نمی‌دهد. به طور مثال اگر مجموعه ی $\mathbb{N}\cup\{c\}$ را با رابطه کوچکتر یا مساوی در نظر بگیریم و عنصر c به گونه ای باشد که فقط با عدد ۱ در رابطه باشد و داشته باشیم $c\leq ۱$، در این صورت $(\mathbb{N}\cup\{c\},\leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است که c تنها عنصر ماکزیمال مجموعه است که، در شرط ماکزیمم بودن صدق نمی کند.

تعریف ۱۱.۱ مجموعه جزئاً مرتب را کران‌دار گویند هرگاه دارای عنصر ماکزیمم و مینیمم باشد.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $(P,\leq)$ مجموعه جزئاً مرتب باشد و $H\subseteq P$. در این صورت $a\in P$ را «کران بالای» H گوییم هرگاه به ازای هر $h\in H$، $h\leq a$. یک کران بالا از H، مانند a، کوچک‌ترین

کران بالای H یا سوپریمم H نامیده می‌شود و آن را با نماد $a = supH$ یا $a = \vee H$ نشان می‌دهیم هرگاه به ازای هر کران بالای H مانند b، داشته باشیم $a \leq b$.

به طور مشابه $b \in P$ را کران پایین H گوییم هرگاه به ازای هر $h \in H$، $b \leq h$. یک کران پایین از H، مانند b بزرگ‌ترین کران پایین H یا اینفیموم H نامیده می‌شود و با نماد $b = infH$ یا $b = \wedge H$ نشان داده می‌شود هرگاه به ازای هر کران پایین H مانند c داشته باشیم $c \leq b$.

توجه کنید که کوچکترین کران بالا یا بزرگترین کران پایین هر زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب در صورت وجود منحصر به‌فرد است.

فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، $a \geq b$ یعنی $b \leq a$.فرض کنید رابطه $\geq$درشرایط ا لف ،ب و ج تعریف مجموعه مرتب جزئی صدق می‌کنددرا ین صورت $(P, \geq)$ نیز یک مجموعه مرتب جزئی است این مجموعه مرتب جزئی را دوگان $(P, \leq)$ می‌نامیم. حال اگر Q یک گزاره در مورد مجموعه‌های مرتب جزئی باشد و اگر در گزاره Q تمام روابط $\leq$ با $\geq$ جایگزین شود، آن‌گاه دوگان Q را خواهیم داشت.

اگر $(P, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد آن‌گاه می‌توان گفت دوگان آن یعنی $(P, \geq)$ نیز یک مجموعه جزئاً مرتب است.

به وضوح اگر مجموعه جزئاً مرتب $(P, \leq)$ مینیمم داشته باشد، آن‌گاه $(P, \geq)$ عضو ماکزیمم دارد.

اصل دوگان. فرض می‌کنیم φ یک گزاره باشد که برای همه‌ی مجموعه‌های جزئاً مرتب درست است. در این صورت دوگان آن نیز برای تمام مجموعه‌های جزئاً مرتب درست است.

تعریف ۱.۱۳ مجموعه جزئاً مرتب $(P, \leq)$ را «مشبکه» گوییم اگر به ازای هر $a, b \in P$، $sup\{a, b\}$ و $inf\{a, b\}$ هر دو موجود باشند. در این صورت این دو را به ترتیب با نمادهای $a \vee b$ و $a \wedge b$ و مشبکه را با نماد $(P, \wedge, \vee)$ نشان می دهیم . زیر مجموعهA از مشبکه P را زیرمشبکه یP گوییم هر گاه به ازای هر$a, b \in A$ ، $a \vee b \in A$ و$a \wedge b \in A$ با توجه به این مطلب به ازای هر $a, b \in P$ داریم:

$$a \wedge b \leq a \qquad \text{و} \qquad a \leq a \vee b.$$

لم ۱۴.۱ مجموعه جزئاً مرتب $(P, \leq)$ مشبکه است اگر و تنها اگر به ازای هر زیر مجموعه ناتهی و متناهی H از P، عناصر $\inf H$ و $\sup H$ وجود داشته باشند.

اثبات. فرض کنید $(P, \leq)$ مشبکه است، $H = \{x_1, \cdots, x_n\}$ و $H \subseteq P$. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 2$ و $H = \{x_1, x_2\}$، آن‌گاه طبق تعریف مشبکه $\sup H$ و $\inf H$ موجودند. اگر حکم برای $n = k$ برقرار باشد و $H = \{x_1, \cdots, x_k\}$، آن‌گاه $\sup H$ و $\inf H$ هردو موجود است. حال فرض کنید $n = k + 1$ و $H = \{x_1, \cdots, x_{k+1}\}$ در این‌صورت

$$infH = inf\{inf\{x_1, \cdots, x_k\}, x_{k+1}\}$$

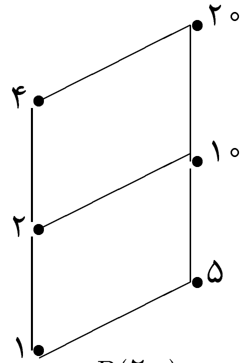
$$supH = sup\{sup\{x_1, \cdots, x_k\}, x_{k+1}\}$$

که بنابه فرض استقرا و مشبکه بودن P، $\sup H$ و $\inf H$ هردو موجودند. اثبات عکس لم نیز واضح است. □

تعریف ۱۵.۱ مجموعه جزئاً مرتب P را $\vee-$ نیم‌مشبکه گویند اگر به ازای هر $a, b \in P$، $sup\{a, b\}$ موجود باشد. به طور دوگان P را $\wedge-$ نیم‌مشبکه گویند اگر به ازای هر $a, b \in P$، $inf\{a, b\}$ موجود باشد.

تعریف ۱۶.۱ فرض می کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $a, b \in P$. گویند b بوسیله a پوشانده می‌شود یا a پوشش b است و آن را با نماد $b \preceq a$ نمایش می‌دهند هرگاه $b < a$ و هیچ x ای غیر از a و b وجود نداشته باشد، به طوری که $b \leq x \leq a$.

فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد.در ا ین صورت به هر عنصر P یک نقطه در صفحه متناظر می‌کنیم. اگر $b < a$ ، آن گاه دو نقطه متناظر با a و b در P را به وسیله یک پاره‌خط به هم وصل می‌کنیم به‌طوری‌که نقطه متناظر با b در صفحه پایین‌تر از نقطه متناظر با a در صفحه باشد. نمودار مجموعه مرتب جزئی $(D(20), |)$ به صورت زیر است:



$D(20)$

مثال ۱۷.۱ الف) هر مجموعه‌ی مرتب خطی، مشبکه است. در واقع به ازای هر دو عنصر a و b در آن، $a \wedge b = min\{a,b\}$ و $a \vee b = max\{a,b\}$. این نوع مشبکه، «مشبکه خطی» نامیده می‌شود.

ب) مجموعه مرتب جزئی $(\mathbb{N},|)$ مشبکه است در واقع به ازای هر $a,b \in \mathbb{N}$، $a \vee b = [a,b]$ و $a \wedge b = (a,b)$ که در آن $[a,b]$ و (a,b) به ترتیب کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b، عناصری از $\mathbb{N}$ هستند.

ج) مجموعه جزئاً مرتب $(P(X),\subseteq)$ در مثال ۸.۱ در واقع یک مشبکه است که به ازای هر $A,B \in P(X)$ داریم : $A \wedge B = A \cap B$ و $A \vee B = A \cup B$.

گزاره ۱۸.۱ فرض کنید $(L,\leq)$ یک مشبکه باشد. در این صورت

۱. (خاصیت خودتوانی): به ازای هر $a \in L$،

$$a \vee a = a \qquad \text{و} \qquad a \wedge a = a$$

۲. (خاصیت جابجایی): به ازای هر $a,b \in L$،

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad \text{و} \qquad a \vee b = b \vee a$$

۳. (خاصیت شرکت‌پذیری): به ازای هر $a,b,c \in L$،

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \qquad \text{و} \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

۴. (قانون جذب): به ازای هر $a,b \in L$،

$$a \wedge (a \vee b) = a \qquad \text{و} \qquad a \vee (a \wedge b) = a$$

گزاره قبل مشبکه را کاملاً به صورت جبری توصیف می کند و تعریفی جبری‌ازآن به دست می دهد. بر عکس اگر $\wedge,\vee$ دو عمل بر یک مجموعه L باشند به طوری که چهار شرط فوق برقرار باشند، آن گاه $(L,\leq)$ که در آن رابطه $\leq$ به صورت زیر تعریف می شود یک مشبکه است.

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$$

واضح است که هر مشبکه به مفهوم ترتیب جزئی یک مشبکه‌جبری است وبر عکس آن نیز صحیح می باشد.(به صفحه ٦ مرجع [۵] مراجعه شود)

تعریف ۱.۱۹ فرض کنید L مجموعه‌ای نا تهی است. در این صورت سه‌تایی $(L, \wedge, \vee)$ را که در آن $\wedge, \vee : L \times L \to L$ دو عمل دو تایی بر L هستند، یک مشبکه‌نامیم هرگاه در خواص ۱ تا ۴ گزاره قبل صدق کند.

تعریف ۱.۲۰ مشبکه L، «کامل» نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه H در L، $\wedge H$ و $\vee H$ موجود باشد.

تعریف ۱.۲۱ مشبکه L، مشبکه «کران دار» نامیده می‌شود، هرگاه به عنوان مجموعه‌ی مرتب جزئی، کران دار باشد. بنابراین می‌توان گفت هر مشبکه متناهی، کران دار است.

مثال ۱.۲۲ $(P(X), \cap, \cup)$ مشبکه کران دار و کامل است که $\emptyset = 0$ و $X = 1$ و به ازای هر $H \subseteq P(X)$، $\vee H = \cup H$ و $\wedge H = \cap H$.

گزاره ۱.۲۳ فرض کنید $(L, \wedge, \vee)$ یک مشبکه است. در این صورت به ازای هر $a, b, c, d \in L$، اگر $a \leq b$ و $c \leq d$، آن‌گاه $a \wedge c \leq b \wedge d$ و $a \vee c \leq b \vee d$. به ویژه به ازای هر $x \in L$ داریم $a \wedge x \leq b \wedge x$ و $a \vee x \leq b \vee x$.

اثبات. با توجه به این‌که $a \wedge c \leq a \leq b$ و $a \wedge c \leq c \leq d$، بنابراین $a \wedge c$ یک کران پایین $\{b, d\}$ است واز این رو $a \wedge c \leq b \wedge d$. همچنین چون $a \leq b$ و $x \leq x$، لذا $a \wedge x \leq b \wedge x$. اثبات برای سوپریمم به‌طور دوگان برقرار است. □

گزاره ۱.۲۴ در هر مشبکه $(L, \leq, \wedge, \vee)$ به ازای هر $a, b, c \in L$ داریم:

الف) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ب) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

اثبات. الف) با توجه به این‌که $a \wedge b \leq a$ و $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$، بنابراین $a \wedge b$ یک کران پایین $\{a, b \vee c\}$ است و از این رو $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$. بنابه دلیل مشابه چون $a \wedge c \leq a$ و

$a \wedge c \leq c \leq b \vee c$. لذا داریم $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$. بنابراین $a \wedge (b \vee c)$ یک کران بالای $a \wedge c$ و $a \wedge b$ است و داریم:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

ب) چون $a \leq a \vee b$ و $a \leq a \vee c$ پس داریم، $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. از طرفی چون $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ و $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$، بنابراین می توان نوشت $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. بنابراین $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ یک کران بالای $b \wedge c$ و a است واز این رو داریم: $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$ □

تعریف ۲۵.۱ مشبکه $(L, \wedge, \vee)$، توزیع‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه:

$$\forall a, b, c \in L : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

مثال ۲۶.۱ $(P(X), \cap, \cup)$ و $(D(n), |)$ مشبکه‌های توزیع‌پذیرند.

گزاره ۲۷.۱ مشبکه $(L, \wedge, \vee)$ توزیع‌پذیر است اگر و فقط اگر

$$\forall a, b, c \in L : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

اثبات. فرض کنید L توزیع‌پذیر است. در این صورت بنابرخاصیت توزیع پذیری L، قانون جذب و خاصیت شرکت پذیری در مشبکه داریم:

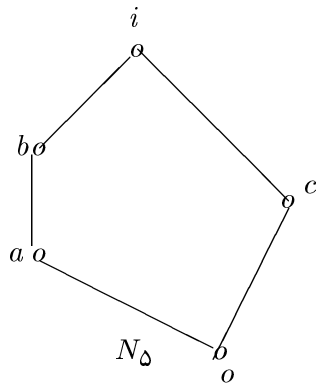
$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

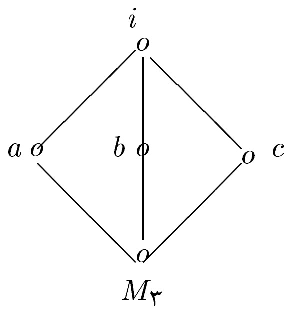
بر عکس به ازای هر $\forall a, b, c \in L$ داریم

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] \\ &= a \wedge [(a \wedge b) \vee c] \\ &= a \wedge [(a \vee c) \wedge (b \vee c)] \\ &= [a \wedge (a \vee c)] \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee c)\end{aligned}$$

□

لم ۲۸.۱ فرض کنید L یک مشبکه کران دار باشد، در این‌صورت L توزیع‌پذیر است اگر و فقط اگرزیر مشبکه ای یکریخت با N_5 یا M_3 نداشته باشد.





اثبات. مراجعه شود به صفحه ۵۹ مرجع [۵]. □

تعریف ۲۹.۱ فرض کنید L یک مشبکه کران دار باشد. هرگاه به ازای هر $a \in L$ عنصری مانند $x \in L$ وجود داشته باشد به‌طوری که $a \wedge x = 0$ و $a \vee x = 1$، در این صورت x را «متمم» a می‌نامیم. به وضوح اگر x، متمم a باشد a نیز متمم x خواهد بود.

تعریف ۳۰.۱ اگر هر عنصر مشبکه‌ی کران دار L، دارای متمم باشد، آن‌گاه L «مشبکه‌ی متمم‌دار» نامیده می‌شود.

مشبکه‌ی $(P(X), \cap, \cup)$ یک مشبکه‌ی متمم‌دار است و متمم هر عنصر A از آن $X \setminus A$ می‌باشد. متمم یک عنصر در مشبکه در صورت وجود، لزوماً منحصر به‌فرد نیست اما:

گزاره ۳۱.۱ در مشبکه‌های توزیع‌پذیر کران دار، متمم یک عنصر در صورت وجود، منحصر به‌فرد است.

اثبات. فرض کنید که c, b متمم a باشند(فرض خلف). در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c \end{aligned}$$

□

در مشبکه‌های توزیع‌پذیر کران دار، متمم عنصر a را (در صورت وجود) با نماد $\tilde{a}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۳۲.۱ اگر L یک مشبکه‌ی متمم‌داربوده و متمم هر عنصر منحصر به فرد باشد، آن‌گاه آن مشبکه توزیع‌پذیر است.

اثبات. اگر L توزیع‌پذیر نباشد، آن‌گاه بنا به لم ۲۸.۱ شامل یک نسخه N_5 یا M_3 می‌باشد که در هر کدام از آن‌ها حداقل یک عنصر وجود دارد که دارای متمم منحصر به فرد نمی‌باشد.

به طور مثال در N_5 و M_3 داریم :

$$a \wedge c = 0 \qquad \text{و} \qquad b \wedge c = 0$$

$$a \vee c = i \qquad \text{و} \qquad b \vee c = i$$

لذا عنصر c دارای دو متمم a و b می باشد. بنابراین مشبکه توزیع‌پذیر است. □

تعریف ۳۳.۱ هر مشبکه‌ی توزیع‌پذیر و متمم‌دار B را «مشبکه بولی» نامیده و با نماد $(B, \wedge, \vee, \tilde{}, 0, 1)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳۴.۱ در قسمت‌های قبل ملاحظه نمودیم که مشبکه‌ی $(P(X), \cap, \cup, \tilde{}, \emptyset, X)$ مشبکه‌ای توزیع‌پذیر و متمم‌دار است پس مشبکه‌ای بولی است.

مثال ۳۵.۱ مجموعه‌ی $B = \{0, 1\}$ با اعمال $a \wedge b = min\{a, b\}$ ، $a \vee b = max\{a, b\}$ و $\tilde{a} = 1 - a$ مشبکه‌ای بولی است.

تعریف ۳۶.۱ مشبکه‌ی کامل $(L, \leq, \vee, \wedge)$ را «کاملاً توزیع‌پذیر» می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی S از L و هر $x \in L$ تساوی‌های زیر را داشته باشیم:

الف) $x \wedge (\vee\{y|y \in S\}) = \vee\{x \wedge y|y \in S\}$

ب) $x \vee (\wedge\{y|y \in S\}) = \wedge\{x \vee y|y \in S\}$

لم ۳۷.۱ اگر مشبکه‌ی L توزیع‌پذیر و متناهی باشد، آن‌گاه L کاملاً توزیع‌پذیر است.

اثبات. چون L متناهی است بنابراین $L = \{x_1, \cdots, x_n\}$. برای اثبات کاملاً توزیع‌پذیری L باید نشان دهیم که

الف) $x_i \wedge (\bigvee_{j=1}^{n} x_j) = \bigvee_{j=1}^{n}(x_i \wedge x_j)$

ب) $x_i \vee (\bigwedge_{j=1}^{n} x_j) = \bigwedge_{j=1}^{n}(x_i \vee x_j)$

با توجه به لم ۱۱.۱ چون L متناهی است پس $\bigvee_{j=1}^{n} x_j$ و $\bigwedge_{j=1}^{n} x_j$ موجود است. برای قسمت الف، حکم را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. با توجه به توزیع پذیری L داریم:

$$x_i \wedge (x_j \vee x_k) = (x_i \wedge x_j) \vee (x_i \wedge x_k)$$

بنابراین حکم برای $n = 2$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم، حکم برای $n = k$ برقرار است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$x_i \wedge (\bigvee_{j=1}^{k} x_j) = \bigvee_{j=1}^{k} (x_i \wedge x_j)$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم حکم برای $n = k + 1$ برقرار است.

$$x_i \wedge (\bigvee_{j=1}^{k+1} x_j) = x_i \wedge ((\bigvee_{j=1}^{k} x_j) \vee x_{k+1})$$

بنا به برقراری حکم برای $n = 2$ داریم:

$$= (x_i \wedge (\bigvee_{j=1}^{k+1} x_j)) \vee (x_i \wedge x_{k+1})$$

و بنا به برقراری حکم برای $n = k$ داریم:

$$= (\bigvee_{j=1}^{k}(x_i \wedge x_j)) \vee (x_i \wedge x_{k+1}) = \bigvee_{j=1}^{k+1}(x_i \wedge x_j)$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد قسمت ب نیز برقرار است. □

تعریف ۳۸.۱ فرض کنید $(L, \leq, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد و $a, b \in L$. در این صورت بزرگ‌ترین xای را که در نامساوی $a \wedge x \leq b$ صدق کند شبه متمم a نسبت به b می‌نامند و آن را با نماد $a \to b$ نشان می‌دهند. در بعضی مواقع با نماد $a \cup b$ نیز نمایش می‌دهند و برای دو عضو $a, b \in L$، کوچک‌ترین x ای را که در نامساوی $a \vee x \geq b$ صدق کند شبه متمم پایینی a نسبت به b می‌نامند و آن را نماد $a \pitchfork b$ نمایش می‌دهند.

لم ۳۹.۱ اگر $a \wedge b \leq c$ آن‌گاه $b \leq (a \to c)$ و $a \leq (b \to c)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a \to c = x$، در این صورت بنا به تعریف، $a \wedge x \leq c$ از طرفی $a \wedge b \leq c$ و چون x، بزرگ‌ترین عضوی است که $a \wedge x \leq c$ پس $b \leq x$. بنابراین $b \leq (a \to c)$ و بنا به دلیل مشابه $a \leq (b \to c)$. □

تعریف ۴۰.۱ مشبکه $(L, \leq, \vee, \wedge)$ مشبکه‌ای «براوری »[1] نامیده می شود هرگاه به ازای هر $a, b \in L$، $a \to b$ در L موجود باشد. هرگاه به ازای هر $a, b \in L$، $a \pitchfork b$ در L موجود باشد در این صورت مشبکه را مشبکه «دوگان براوری » می‌نامند.

گزاره ۴۱.۱ فرض می کنیم L یک مشبکه‌ی کامل باشد.اگر L در شرط (الف) کاملاً توزیع‌پذیری صدق کند، آن‌گاه L یک مشبکه‌ی براوری است و اگر در شرط (ب) کاملاً توزیع‌پذیری صدق کند، آن‌گاه L یک مشبکه‌ی دوگان براوری است.

اثبات. اگر a و b را دو عضو دلخواه در نظر بگیریم ،آن‌گاه می‌توان گفت، مجموعه‌های $\{x|x \in L, a \wedge x \leq b\}$ و$\{x|x \in L, a \vee x \geq b\}$ دو مجموعه‌ی غیر تهی هستند چون حداقل b در داخل این دو مجموعه قرار دارد. قرار می‌دهیم $u = \vee\{x|x \in L, a \wedge x \leq b\}$. در این صورت داریم:

$$a \wedge u = a \wedge (\vee\{x|x \in L, a \wedge x \leq b\})$$

$$= \vee\{a \wedge x|x \in L, a \wedge x \leq b\} \leq b$$

چون u بزرگ‌ترین عضوی است که در نابرابری $a \wedge x \leq b$ صدق می‌کند بنابراین $a \to b$ موجود است و می‌توان گفت، $a \to b = u$.

حال اگرقرار دهیم $w = \{x|x \in L, a \vee x \geq b\}$، آن گاه داریم:

$$a \vee w = a \vee (\wedge\{x|x \in L, a \vee x \geq b\})$$

$$= \wedge\{a \vee x|x \in L, a \vee x \geq b\} \geq b$$

چون w کوچک‌ترین عضوی است که در نابرابری $a \vee x \geq b$ صدق می‌کند بنابراین $a \pitchfork b$ موجود

[1] Brouweri

است و می‌توان گفت $a \pitchfork b = w$ بنابراین اگر L مشبکه‌ی کاملاً توزیع‌پذیر باشد، آن‌گاه براوری و دوگان براوری است. $\square$

گزاره ۴۲.۱ اگر L یک مشبکه‌ی بولی باشد، آن‌گاه $a \to b = b \vee \tilde{a}$ که $\tilde{a}$ عنصر متمم a در L می‌باشد.

اثبات. با توجه به توزیع‌پذیری L داریم:

$$a \wedge (b \vee \tilde{a}) = (a \wedge b) \vee (a \wedge \tilde{a}) = (a \wedge b) \vee 0 = (a \wedge b) \leq b$$

همچنین فرض کنید $c \in L$ وجود داشته باشد به‌طوری که $a \wedge c \leq b$ در این صورت

$$c \leq c \vee \tilde{a} = 1 \wedge (c \vee \tilde{a}) = (a \vee \tilde{a}) \wedge (c \vee \tilde{a}) = (a \wedge c) \vee \tilde{a} \leq b \vee \tilde{a}.$$

در نتیجه $c \leq b \vee \tilde{a}$. پس $b \vee \tilde{a}$ بزرگ‌ترین عضوی است که در رابطه‌ی $a \wedge x \leq b$ صدق می‌کند لذا $a \to b = b \vee \tilde{a}$. $\square$

مثال ۴۳.۱ اگر L مشبکه‌ی خطی$[0, 1]$ باشد، آن گاه این مشبکه یک مشبکه براوری ، دوگان براوری ، کامل و کاملاً توزیع پذیر است که بولی نمی باشد.

به ازای هر $a, b \in P(X)$ داریم :

$$a \pitchfork b = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a \leqslant b \\ a & \text{اگر } a > b \end{cases} \qquad \text{و} \qquad a \to b = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \leqslant b \\ b & \text{اگر } a > b \end{cases}$$

بنابراین این مشبکه یک مشبکه براوری ودوگان براوری است. در این مشبکه فقط دو عنصر ۰ و ۱ دارای متمم می باشند ولی بقیه عناصر متمم ندارند. زیرا اگر a یک عضو دلخواه در این مشبکه باشد در این صورت عنصری مانند b که در شرط $a \wedge b = 0$ صدق کند تنها عنصر $b = 0$ است که این عنصر b در شرط $a \vee b = 1$ صدق نمی کند. لذا مشبکه متمم دار نیست. هر زیر مجموعه ی غیر تهی از این مجموعه دارای سو پریمم و اینفیمم می باشد به طور مثال بازه$(0.3, 0.5)$ دارای سوپریمم

۰.۵ و ا ینفیمم ۰.۳ می باشد بنابراین مشبکه کامل است .برای اثبات قسمت (الف) کاملاً توزیع پذیری فرض می کنیم S یک زیر مجموعه ی دلخواه از $[0,1]$ و x یک عضو دلخواه‌از مشبکه باشد در این صورت برای عضو x سه حالت می توان در نظر گرفت :

الف)$x < \wedge S$. در این حالت $\vee\{y|y \in S\} = b$ و $x \wedge (\vee\{y|y \in S\}) = x \wedge b = x$.از طرفی چون $x < \wedge S$ بنابراین $\{x \wedge y|y \in S\} = x$ و $\vee\{x \wedge y|y \in S\} = x$. لذا شرط (الف) کاملاً توزیع پذیری برقرار است.

ب)$x \in S$ یا $\wedge S \leq x \leq \vee S$. در این حالت $\vee\{y|y \in S\} = b$ و $x \wedge (\vee\{y|y \in S\}) = x \wedge b = x$.از طرفی مجموعه ی $\{x \wedge y|y \in S\}$ را به اجتماع دو مجموعه تبدیل می کنیم :

۱) $\{x \wedge y|y \in S, y \leq x\}$ که در این حالت عناصری از S که کوچک تر یا مساوی x هستند این مجموعه را تشکیل می دهند.

۲) $\{x \wedge y|y \in S, x \leq y\}$ که در این حالت عنصر x تنها عضو این مجموعه است .

بنابراین $\vee\{x \wedge y|y \in S\} = x$ و در این قسمت نیز تساوی قسمت (الف) کاملاً توزیع پذیری برقرار است .

ج)$x > \vee S$. در این حالت نیز $\vee\{y|y \in S\} = b$ و $x \wedge (\vee\{y|y \in S\}) = x \wedge b = b$. بنا به این که فرض کردیم $x > \vee S$ لذا مجموعه ی $\{x \wedge y|y \in S\}$ برابر همان مجموعه ی S است پس $\vee\{x \wedge y|y \in S\}$ همان $\vee S$ یعنی b می شود.

اثبات شرط (ب) کاملاً توزیع پذیری را مشابه شرط (الف) می توان اثبات کرد و بنابراین مشبکه کاملاً توزیع پذیر است .

لم ۴۴.۱ اگر L یک مشبکه براوری باشد ،آن‌گاه به ازای هر $a, b \in L$ داریم:

$$a \to b = a \to (a \wedge b).$$

اثبات.طبق تعریف $a \to b$، داریم $a \wedge (a \to b) \leq b$ و بنا به تعریف $\wedge$، $a \wedge (a \to b) \leq a$. در نتیجه $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$. پس بنابه لم ۳۹.۱

$$a \to b \leq a \to (a \wedge b) \qquad (۱-۱)$$

اگر قرار دهیم $x = a \to (a \wedge b)$، آن گاه بنا به تعریف ۳۸.۱، x بزرگترین مقداری است که در شرط $a \wedge x \leq a \wedge b$ صدق می کند لذا داریم: $a \wedge (a \to (a \wedge b)) \leq a \wedge b \leq b$ پس بنا بر لم ۳۹.۱ می توان نوشت:

$$a \to (a \wedge b) \leq a \to b \qquad (۱-۲)$$

پس با توجه به این دو نامساوی (۱-۱) و (۱-۲) داریم

$$a \to (a \wedge b) = a \to b. \qquad \square$$

تعریف ۴۵.۱ اگر L یک مشبکه کاملاً توزیع‌پذیر با بزرگ‌ترین عنصر ۱ و کوچک ترین عنصر ۰ باشد، آن گاه بنا بر لم ۴۱.۱ برای هر $a \in L$، $a \to ۰$ وجود دارد و قرار می‌دهیم $a' = a \to ۰$.

در یک مشبکه کاملاً توزیع‌پذیر، بنا بر لم ۴۱.۱ دو عنصر $a \to ۰$ و $a \pitchfork ۱$ موجودند. اگر قرار دهیم $x = a \to ۰$ و $y = a \pitchfork ۱$ آن گاه طبق تعریف عمل $\to$ و " $\pitchfork$ " داریم:

الف) $a \wedge (a \to ۰) = a \wedge x = ۰$

ب) $a \vee (a \pitchfork ۱) = a \vee y = ۱$

با توجه به این‌که‌در مشبکه‌های بولی هر عنصر دارای متمم است، لم بعد نشان می دهد که x بر y منطبق می‌شود.

لم ۴۶.۱ اگر L یک مشبکه بولی باشد، آن‌گاه $a \to ۰$ و $a \pitchfork ۱$ بر هم منطبق می‌شوند.

اثبات. چون L مشبکه‌ی بولی است طبق گزاره ۴۲.۱ داریم $\tilde{a} = a \to ۰$. بنابراین طبق تعریف عضو متمم $a \vee \tilde{a} = ۱$ و $a \wedge \tilde{a} = ۰$. حال اگر قرار دهیم $b = a \pitchfork ۱$، آن‌گاه $a \vee b = ۱$ و b کوچک ترین عضوی از مشبکه L است که در این شرط صدق می‌کند. می‌توان ثابت کرد که $\tilde{a} = b$.

بنا به فرض $a \vee \tilde{a} = ۱$، از طرفی b کوچک ترین عضوی از مشبکه است که $a \vee b = ۱$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$b \leq \tilde{a} \qquad (۱-۳)$$

با توجه به این‌که L توزیع‌پذیر است داریم:

$$b = b \vee ۰ = b \vee (a \wedge \tilde{a}) = (b \vee a) \wedge (b \vee \tilde{a}) = ۱ \wedge (b \vee \tilde{a}) = b \vee \tilde{a}.$$