بسم الله الرحمن الرحيم

٢٤٥٩١

دانشکده علوم ـ گروه ریاضی

۳۰ /۳/ ۱۳۷۸

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

حل مسایل جریان در محیطهای متخلخل به روش عناصر متناهی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر کرایه‌چیان ـ استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

داور رساله:

جناب آقای دکتر بابلیان ـ دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تهران

جناب آقای دکتر وحیدیان ـ دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیر گروه:

جناب آقای دکتر نیکنام ـ استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مؤلف:

نوید قهرمان ـ شهریورماه ۱۳۷۴

1642/2

۲۴۵۹۱

۶

بسمه تعالی

No: شماره:

Date: تاریخ:

پیوست:

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775, Mashhad
Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای نوید قهرمان دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۹ صبح روزِ ۷۴/۶/۱۶ دراتاقِ شمارهٔ ۳۳ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ ۱۹/۵ (نوزده و نیم) موردتأیید قرارگرفت.ت

عنوان رساله: " حل مسائل جریان سیال درمحیط های متخلخل به روش عناصر متناهی "

تعداد واحد: ۶ واحد

داور رساله: آقای دکتر اسماعیل بابلیان
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم تهران

داور رساله: آقای دکتر علی وحیدیان
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما: آقای دکتر اصغر کرایه چیان
استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی: آقای دکتر اسداله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

بلوار وکیل آباد - سه راه کوکا - خیابان شهیدباهنر - دانشکده علوم ۲ - صندوق پستی ۱۱۵۹-کد ۹۱۷۷۵ تلفن: ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱
فاکس ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱ ، پست الکترونیکی e-mail:math.sci@toos.um.ac.ir , Tel : 0098-51-817749 , Fax : 051-817749

تقدیم به :

مادرم که سایه‌اش بر سرم بپایاد

و

پدرم که روان پاک او آسوده باد

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه ابتدا مسأله مرتبه دوم خطی بیضوی نویمن که معادلات حاکم بر:

الف) رفتار سیالات در محیطهای متخلخل

ب) توزیع پتانسیل الکتریکی یا مغناطیسی

ج) جریان غیر دوار درسیالهای ایده‌آل

د) هدایت گرمایی

را بیان می‌کند معرفی می‌شود و سپس روش حل دستگاه خطی حاصل از گسسته‌سازی آمیخته مسألهٔ فوق را بررسی می‌کنیم. همان طور که میدانیم دستگاه حاصل از گسسته سازی مسألهٔ بیضوی به وسیله عناصر متناهی استاندارد یک دستگاه خطی بزرگ معین است ولی در اینجا باید یک دستگاه خطی بزرگ که الزاماً معین مثبت نیست حل شود.

تکنیکی راکه مورد بررسی قرار خواهیم داد تجزیه حوزه[1] نامیده می‌شود و آن را می‌توان به عنوان یک روش پیش شرط شده گرادیان مزدوج در نظر گرفت و با توجه به همگرایی سریع و استقلال از پارامترهای شبکه (H ,h)، روش فوق اخیراً درکانون تحقیقاتی که برروی روشهای مختلف حل عددی معادلات انجام می‌گیرد قرار گرفته است و برای حل دستگاههای بسیار بزرگ

1 - Domain Decomposition

حاصل از گسسته سازی (عناصر متناهی[۱] تفاضلات متناهی[۲]) مسایل فیزیکی برروی کامپیوترهای موازی بسیار مناسب است. برای مطالعه نمونه مسایلی که به کمک این تکنیک قابل حل هستند. [۲۰] ، [۲۱] ، [۲۲] ، [۲۳] ملاحظه شود.

این روش را بر اساس تقسیم حوزه مسأله به قسمتهای کوچکتر که آنها را زیر ساختار[۳] (زیر ناحیه[۴]) می‌نامیم پایه ریزی شده است و الگوریتم معمولاً مسأله را برروی همه زیر ساختارها به طور همزمان حل می‌نماید و بر مبنای تداخل[۵] یا عدم تداخل زیر ساختارها به دو دسته اصلی تقسیم می‌شود. دسته اول الگوریتمهایی هستند که بر اساس زیر ناحیه‌های غیر متداخل پایه‌ریزی شده‌اند و روشهای تکراری زیر ساختاری[۶] نامیده می‌شوند. ([۳,۴,۵])

دسته دیگر الگوریتمهای مبتنی بر زیر ناحیه‌های متداخل راشامل می‌شود. این روشها که شوارتز[۷] نامیده می‌شوند در فصل سوم مورد بحث قرار می‌گیرند.

در فصل اول ابتدا به تعریف مسأله و بیان فرم آمیخته[۸] آن می‌پردازیم و سپس کاربردهای فیزیکی مسأله در هدایت گرمایی، محیطهای متخلخل و الکترومغناطیس را بیان و معادلات حاکم بر هر یک از مدلهای فوق را تشریح می‌نماییم.

در فصل دوم ابتدا قضیه وجود و یکتایی جواب فرم تغییراتی مسأله را اثبات می‌کنیم و شکل گسسته مسأله که به وسیله عناصر متناهی آمیخته به دست می‌آید بررسی نموده و آنگاه شرایط پایداری روش را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. سپس به معرفی یکی از فضاهای عناصر متناهی بنام Raviart − Thomas می‌پردازیم و خواص آن را به تفصیل بیان کرده و شرایط پایداری را در مورد آن تحقیق می‌کنیم و همچنین همگرایی روش را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در خاتمه به اجمال

1 - Finite Element
2 - Finite Difference
3 - Substructure
4 - Subregion
5 - Overlapping
6 - Iterative Substructuring
7 - Schwarz methods
8 - Mixed form

نحوه تبدیل دستگاه نه الزاماً معین مثبت حاصل از گسسته‌سازی مسأله به یک دستگاه معین مثبت مورد بحث قرار می‌گیرد.

در فصل سوم مقدمه‌ای در مورد روش‌شوارتزبیان کرده و سپس سرعت همگرایی روشهای جمعی و ضربی شوارتز را مورد بررسی قرار می‌دهیم و بر اساس آنها الگوریتمهای سری و موازی برای فضای Raviart−Thomas را به دست می‌آوریم و همگرایی آنها به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد و در آنجا خواهیم دید که سرعت همگرایی مستقل از پارامترهای شبکه (h,H) و تعداد زیر ناحیه‌ها است.

در فصل چهارم الگوریتمهای به دست آمده در فصل سوم را در مورد مسایلی که حوزه تعریف آنها زیر مجموعه‌ای از R است به کار برده و نتایج عددی مربوطه را به دست می‌آوریم و در آنجا ملاحظه خواهد شد که دقت نتایج عددی مستقل از پارامترهای شبکه و تعداد زیر ناحیه بوده و فقط ممکن است به میزان تداخل زیر ناحیه‌ها بستگی داشته باشد.

در ضمیمه به طور مختصر روشهای گرادیان مزدوج[1] معمولی و پیش شرط شده[2] را تشریح کرده و الگوریتمهای مربوطه را بیان می‌نماییم و نیز همگرایی آنها را مورد بررسی قرار داده و در ادامه دو نوع پیش شرط متداول به نامهای قطری[3] و چولسکی ناقص[4] که در حل مسایل فرعی به کار می‌روند به طور مختصر ارائه می‌گردد.

1 - Conjugate gradient method
2 - Preconditioned conjugate gradient method
3 - Diagonal
4 - Incomplete Cholesky

در خاتمه لازم می‌دانم صمیمانه ترین تشکرات خود را به حضور استاد معظم ، جناب آقای دکتر کرایه‌چیان که در طی تدوین این پایان نامه نظارت و راهنمایی لازم را مبذول فرمودند و اساتید محترم جناب آقای دکتر بابلیان و جناب آقای دکتر وحیدیان که نظرات سودمند ایشان موجب بهبود کیفیت رساله گردید تقدیم دارم.

نوید قهرمان

شهریور ماه ۱۳۷۴

فصل اول

تعریف مسأله و کاربردهای فیزیکی آن

در این فصل مسأله (۱) را که یک مسأله بیضوی[1] است و در پایان نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد تعریف می‌کنیم و سپس کاربردهای آن را در شاخه‌های مختلف فیزیک و مهندسی مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم.

تعریف مسأله: زیر مجموعه باز Ω در R^N مفروض است و مرز Ω را به $\partial\Omega$ نمایش می‌دهیم. مسأله عبارت است از یافتن تابع حقیقی p، تعریف شده بر Ω که در دستگاه زیر صدق کند:

$$(۱)\begin{cases} \text{div} - (A(x) \,.\, \text{grad}(p(x))) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ n(x) \,.\, (A(x) \,.\, \text{grad}\,(p(x))) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

که در آن:

الف) n بردار نرمال خارجی[2] بر $\partial\Omega$ است،

ب) $A(x)$ یک ماتریس $N\times N$ معین مثبت با درایه‌هایی در $L^\infty(\Omega)$ است و در رابطه زیر صدق می‌کند (λ_{Min} کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A است).

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{S.t} \quad \lambda_{Min}(A(x)) \geq \alpha \qquad \text{a.e in } \Omega$$

1 - Elliptic propblem

2 - Outward normal

پ) g , f توابع حقیقی تعریف شده بر Ω هستند به طوری که:

$$f \in L^2(\Omega) \quad ; \quad g \in L^2(\partial\Omega) \quad ; \qquad \int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0$$

رابطه فوق شرط سازگاری[۱] نامیده می‌شود در بسیاری از مسایل فیزیکی علاوه بر p، تابع برداری شار[۲](u) که بر Ω تعریف شده و در رابطه زیر صدق می‌کند نیز باید تعیین شود.

$$u(x) = -(A(x) \,.\, \mathrm{grad}(p(x))) \quad \forall\, x \in \Omega$$

چنانچه تابع p به کمک مسأله (۱) مشخص شود و سپس به کمک مشتقگیری عددی تابع شاررابه دست آوریم. به علت ناپایداری مشتقگیری جواب حاصل به اندازه کافی دقیق نیست. بنابراین باید u و p همزمان تعیین نماییم و به این منظور دستگاه (۱) را به مسأله زیر تبدیل می‌کنیم:

$$(۲) \quad \begin{cases} u(x) = -(A(x) \,.\, \mathrm{grad}(p(x))) & \forall\, x \in \Omega \\ \mathrm{div}\,(u(x)) = f(x) & \forall\, x \in \Omega \\ n(x) \,.\, u(x) = g(x) & \forall\, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

مسئله فوق را جهت مراجعات بعدی، مسأله P نامگذاری می‌کنیم.

قبل از این که روش حل دستگاه (۲) را بیان کنیم برخی مدلهای فیزیکی که به وسیله دستگاه (۱) یا (۲) قابل توصیف هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دستگاه (۲) مبین بسیاری از مدلهاست که در اینجا بعضی از آنها را نام می‌بریم.

الف) هدایت گرمایی؛[۳]

ب) نشت[۴] جریان در محیطهای متخلخل؛[۵]

پ) جریان غیر چرخشی[۶] در یک سیال ایده‌آل؛

1 - Compatiblity condition
2 - Flux
3 - Heat conduction
4 - Seepage
5 - Porous media
6 - Irrotational

ت) توزیع پتانسیل الکتریکی یا مغناطیسی؛

ث) پیچش[1] یا خمش[2] یک میله.

و اینک به شرح مختصر هر یک از این مدلها و معادلات مفسر آنها می‌پردازیم.

الف) هدایت گرمایی

جسمی که حجم V را اشغال کرده و مرز آن S است مفروض است. جسم را تحت تأثیر شار گرمایی (f) که عمود بر مرز S در هر نقطه وارد آن می‌شود قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم یک منبع گرمایی درون جسم قرار دارد که اغلب موارد بر اثر واکنشهای شیمیایی، جذب تشعشعات و یا تأثیر مواد رادیواکتیو به وجود می‌آید این مولد حرارتی درونی، شارگرمایی را C را در واحد حجم بر جسم اعمال می‌کند. درجه حرارت جسم را در هر نقطه، $T(x,y,z)$ و مؤلفه‌های شار گرمایی را در هر نقطه q_z ، q_y ، q_x در نظر می‌گیریم. بر اثر شار گرمایی، تغییر درجه حرارتی در هر نقطه از جسم به وجود می‌آید. که با توجه قانون هدایت فوریه ۹ اسکالر به صورت: α_{zz} ، ... ، α_{xy} ، α_{xx} وجود دارند. به طوری که:

$$(۳)\quad \begin{cases} q_x = -(\alpha_{xx}T_x + \alpha_{xy}T_y + \alpha_{xz}T_z) \\ q_y = -(\alpha_{yx}T_x + \alpha_{yy}T_y + \alpha_{yz}T_z) \\ q_z = -(\alpha_{zx}T_x + \alpha_{zy}T_y + \alpha_{zz}T_z) \end{cases}$$

که در آن T_x و T_y و T_z به ترتیب تغییرات (گرادیان) درجه حرارت در جهت محورهای x , y , z هستند و برای اجسام غیر همگن اسکالرهای فوق در هر نقطه متغیرند و چنانچه رابطه فوق را به شکل برداری بنویسیم، داریم:

$$q(x) = -(\alpha(x).\mathrm{grad}(T(x))) \qquad \forall x \in V$$

---

1 - Torsion　　2 - Bending

که ماتریس ۳×۳ " $\propto(x)$ " نشان دهنده هدایت گرمایی جسم است. بر اثر ورود شار گرمایی که از مرز S وارد جسم می‌شود درجه حرارت جسم تغییر می‌کند که مقدار این تغییر برابر است با:

$$\int_S (n.q)ds$$

و با توجه به اصل بقای حرارت داریم:

$$\int_S (n.q)ds = \int_V Cdv$$

و چنانچه قضیه دیورژانس را برای سمت چپ تساوی فوق به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\int_V div(q)dv = \int_V Cdv$$

آنگاه $div(q) = C$ (۴)

و با توجه به این که جسم تحت تأثیر شار گرمایی f که عمود بر S (مرز جسم) اعمال می‌گردد قرار گرفته است داریم:

$$n(x).q(x) = f(x) \qquad \forall x \in S \qquad (۵)$$

بنابراین با توجه به روابط (۳) و (۴) و (۵)، توابع درجه حرارت و شار گرمایی جسم، جواب مسأله زیر هستند:

$$\begin{cases} q(x) = -(\propto(x) \,.\, grad(T(x))) & \forall x \in V \\ div\,(q(x)) = C(x) & \forall x \in V \\ n(x) \,.\, q(x) = f(x) & \forall x \in S \end{cases}$$

که با دستگاه (۲) یکسان است.

ب) نشت جریان در محیط متخلخل

حرکت سیال در محیطهای متخلخل یکی از مسایل بسیار مهمی است که از مدتها قبل نظر مهندسین و

محققین را به خود معطوف داشته است . این مسأله در بسیاری از پروژه‌های بزرگ که در آن سیال در مجاورت محیط متخلخل قرارگرفته و در آن حرکت می‌نماید مطرح است که به چند مورد از آنها در ذیل اشاره می‌شود:

۱- زهکشی راهها و فرودگاهها

زهکشی[1] عبارت از عملی است که به وسیله آن آبهای زاید را جمع‌آوری می‌شوند. در مناطقی که سطح آبهای زیرزمینی بالاست. نفوذ آب زیرزمینی از تپه‌های مجاور به زیر جاده‌ها مشکلاتی بوجود می‌آورد. در بزرگراهها و فرودگاهها باید سطح آب زیرزمینی راتا بدان حدکه آسیبی به ساختمانها و سطح جاده نرساند پایین نگاه داشت.

۲- فشار نشست آب بر سطوح شیبدار خاکی و دیوارهای حائل

۳- نشست آب در داخل سدهای خاکی

۴- فشار بالادهنده[2] زیر سدهای بتونی و ساختمانهایی که زیر سطح آب قرار دارند.

۵- حجم و نحوه توزیع نفت در ذخایر زیرزمینی و تعیین محل چاه به منظور استحصال نفت.

به منظور انجام اعمال فوق باید فشار و سرعت سیال درهر نقطه تعیین گردد.

معادلات جریان سیال در محیطهای متخلخل به کمک دو رابطه زیر به دست می‌آیند:

الف) قانون دارسی[3] ب) معادله پیوستگی[4]

که به شرح مختصر هر یک از آنها می‌پردازیم:

قانون دارسی

هنری دارسی دانشمند فرانسوی در سال ۱۸۵۶ با آزمایشهای متعدد ثابت نمود که سرعت سیال در

1 - Drainge
2 - Uplift
3 - Darcy law
4 - Continuity equation