بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

ضربگرهای قاب‌های تعمیم یافته در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما:

دکتر اصغر رحیمی

استاد مشاور:

دکتر بیاض دارابی

پژوهشگر:

منصور باقرنژاد

اردیبهشت ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اصغر رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر بیاض دارابی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر پیری که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند تشکر می کنم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم، همسرم مهربانم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

منصور باقرنژاد

اردیبهشت ۱۳۹۲

نام خانوادگی: باقرنژاد نام: منصور

عنوان پایان‌نامه: ضربگرهای قاب‌های تعمیم یافته در فضاهای هیلبرت

استاد راهنما: دکتر اصغر رحیمی استاد مشاور: دکتر بیاض دارابی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: اردیبهشت ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۱۳۸

کلید واژه‌ها: قاب‌ها، g–قاب، g–بسل، g–پایه ریس، g–پایه متعامد یکه، ضربگر، قاب تلفیقی.

چکیده
در این پایان‌نامه، مفهوم ضربگرهای بسل تعمیم یافته را که تعمیمی از ضربگرهای بسل، برای دنباله‌های بسل تعمیم یافته هستند، مورد مطالعه قرار می دهیم. خواص این عملگرها را وقتی که شاخص m عضوی از ℓ^1، ℓ^p و ℓ^∞ می باشد، بررسی می کنیم. همچنین رفتار این عملگرها را وقتی که پارامترهای آنها تغییر می کند، مورد بررسی قرار می دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱
تعاریف و مقدمات

۱.۱ عملگرها [۱]

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی و بعضی از نمادهایی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند را معرفی کرده و سپس به معرفی قاب‌ها [۲] و ویژگی‌های آنها و عملگرهای مربوط به قاب‌ها در فضاهای هیلبرت [۳] می‌پردازیم. در سرتاسر این پایان‌نامه H و K فضاهای هیلبرت هستند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد تابع $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ یک نرم روی X نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $\| x \| = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$،

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$،

پ) به ازای هر $x, y \in X$، $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری مختلط H یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y, z \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$:

[۱] Operators
[۲] Frames
[۳] Hilbert Spaces

۱) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$،

۲) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$،

۳) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$،

۴) $\langle x, x\rangle \geq 0$،

۵) $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

تعریف ۳.۱.۱. برای فضای ضرب داخلی H و هر $x \in H$، $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ یک نرم است.

تعریف ۴.۱.۱. با متر حاصل از نرم بالا H به یک فضای متری تبدیل می‌شود هرگاه این فضای متری تام باشد یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد، H را فضای هیلبرت می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. یک خانواده P از توابع را جداپذیر [۴] گوییم اگر به ازای $x \neq 0$، $p \in P$ وجود داشته باشد طوری که $p(x) \neq 0$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعضای H باشد زیرفضای خطی تولید شده توسط $\{x_n\}$ عبارتست از مجموعه همه ترکیبات خطی متناهی از x_n ها. به عبارت دیگر:

$$\mathrm{span}(x_n) = \{\sum_{k=-N}^{N} c_k x_k ; N > 0, c_k \in \mathbb{C}\}.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعضای H باشد:

۱) دنباله $\{x_n\}$ دنباله متعامد [۵] است اگر به ازای هر $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\langle x_m, x_n\rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad m = n \\ 0 & \text{اگر} \quad m \neq n. \end{cases}$$

[۴] Separable
[۵] Orthonormal Sequence

۲) دنباله $\{x_n\}$ متعامد یکه است اگر اولا متعامد بوده و در ضمن به ازای هر $m \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم:

$$\| x_m \| = ۱.$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{E} \neq ۰$ زیر مجموعه‌ای از فضای هیلبرت H باشد $\mathcal{E}$ را مجموعه متعامد یکه گوییم اگر به ازای هر $e, f \in \mathcal{E}$ داشته باشیم:

۱) $e \perp f$،

۲) $\| e \| = ۱$.

مجموعه متعامد یکه ماکسیمال را پایه متعامد یکه (ONB) می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X, Y دو فضای برداری توپولوژیک روی $\mathbb{C}$ باشند نگاشت $T : X \to Y$ یک عملگر خطی است اگر به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

مجموعه همه عملگرهای خطی پیوسته از X به Y را با $\mathfrak{B}(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند نگاشت خطی $T : X \to Y$ را کراندار گوییم اگر وجود داشته باشد $M \in \mathbb{R}^+$ به طوریکه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\| Tx \|_Y \leq M \| x \|_X .$$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرم دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر کراندار باشد در این صورت عملگر الحاقی T را با T^* نشان داده و عبارتست از $T^* : Y^* \to X^*$ به طوریکه به ازای هر

$f \in Y^*$ و $x \in X$،

$$\langle x, T^* f\rangle = \langle Tx, f\rangle.$$

برای هر $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ داریم:

$$N_T = \ker T = \{x : Tx = ۰\},$$

$$R_T = \mathrm{rang} T = \{Tx : x \in X\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۲. اگر $T \in \mathfrak{B}(H)$:

۱) عملگر T را یکانی [۶] گوییم اگر $TT^* = T^*T = ۱$ یا $T^* = T^{-۱}$.

۲) عملگر T را نرمال [۷] گوییم اگر $T^*T = TT^*$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ [۸] باشند عملگر خطی $T : X \to Y$ را فشرده گوییم اگر $\overline{TB_۱}$ در Y فشرده باشد به طوریکه:

$$B_۱ = \{x \in X : \| x \| \leq ۱\}.$$

مجموعه عملگرهای فشرده از X به Y را با نماد $\mathbb{K}(X,Y)$ نشان می‌دهیم و اگر $X = Y$ باشد آنرا با نماد $\mathbb{K}(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد عملگر $T \in \mathfrak{B}(X)$ را معکوس‌پذیر گوییم اگر $S \in \mathfrak{B}(X)$ وجود داشته باشد عملگر $S \in \mathfrak{B}(X)$ به طوریکه $ST = TS = I$ و می‌نویسیم $S = T^{-۱}$.

[۶] Unitary
[۷] Normal
[۸] Banach spaces

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر $T: X \to Y$ یک عملگر خطی باشد داریم:

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup\Big\{\|T(h)\| : \| h \|= ۱\Big\} \\ &= \sup\Big\{\frac{\|Th\|}{\| h \|} : h \in H, h \neq ۰\Big\} \\ &= \inf\Big\{k > ۰, \|T(h)\| \leq k \| h \| : h \in H\Big\}. \end{aligned}$$

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد عملگر خطی $P: X \to X$ تصویر X نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $P^۲x = P(P(x)) = Px$. اگر $\mathcal{R}(P) = N(P)^\perp$، آنگاه P را تصویر متعامد گوئیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید $T \in \mathfrak{B}(H, K)$ باشد در این صورت T را خودالحاق [۹] گویند اگر $H = K$ و $T = T^*$.

برای هر عملگر خودالحاق $T \in \mathfrak{B}(H, K)$ داریم

$$\| T \|_{op} = \sup_{\|f\| \leq ۱} |\langle Tf, f\rangle|.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. عملگر $T: H_۱ \to H_۲$ را در $x_۰ \in H_۱$ پیوسته گویند اگر $x_n \to x_۰$ نتیجه دهد $Tx_n \to Tx_۰$. به عبارت دیگر T در $x_۰$ پیوسته است اگر وتنها اگر برای هر $\epsilon > ۰$ وجود داشته باشد $\delta > ۰$ به طوریکه اگر $\|x - x_۰\| < \delta$ آنگاه $\|Tx - Tx_۰\| < \epsilon$.

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرض کنید $T: H_۱ \to H_۲$ یک عملگر خطی باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱) T *در هر نقطه‌ای پیوسته است،*

[۹] Self-Adjoint

۲) T روی H_1 پیوسته یکنواخت است،

۳) T کراندار است.

برهان. به مرجع [۲۳] قضیه ۱.۳ رجوع شود. ■

تعریف ۲۰.۱.۱. عملگر $T \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ را با رتبه متناهی گوییم اگر برد T دارای بعد متناهی باشد به عبارت دیگر $\dim T(H_1) < \infty$.

قضیه ۲۱.۱.۱. *(قضیه نمایش ریس): فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $f \in H^*$ در این صورت بردار منحصر به فرد $k_0 \in H$ وجود دارد به طوریکه برای هر $h \in H$،*

$$f(h) = \langle h, k_0 \rangle.$$

برهان. به مرجع [۲۳] قضیه ۲.۵ رجوع شود. ■

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنید $K \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ با رتبه متناهی n باشد بردارهای $V_1, ..., V_n$ در H_1 و بردارهای $\varphi_1, ..., \varphi_n$ در H_2 وجود دارد به طوریکه برای هر $x \in H_1$،*

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, V_i \rangle \varphi_i.$$

بردارهای $\varphi_1, ..., \varphi_n$ ممکن است پایه متعامد یکه برای $\mathrm{Im}K$ باشند.

برهان. فرض کنید $\varphi_1, ..., \varphi_n$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathrm{Im}K$ باشند در این صورت برای هر $x \in H_1$ داریم:

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle Kx, \varphi_i \rangle \varphi_i \qquad (1.1)$$

حال برای هر i، $f_i(x)=\langle Kx,\varphi_i\rangle$ یک تابعک خطی کراندار روی $H_۱$ می‌باشد بنابراین طبق قضیه نمایش ریس وجود دارد $V_i\in H_۱$، به طوریکه برای هر $x\in H_۱$

$$\langle Kx,\varphi_i\rangle=f_i(x)=\langle x,V_i\rangle,\qquad ۱\leq i\leq n$$

بنابراین از رابطه (۱.۱) داریم:

$$Kx=\sum_{i=۱}^{n}\langle x,V_i\rangle\varphi_i.$$

■

قضیه ۲۳.۱.۱. *اگر $T,S\in\mathfrak{B}(H_۱,H_۲)$ آنگاه:*

۱) $(T+S)^*=T^*+S^*$.

۲) *برای هر* $\alpha\in\mathbb{C}$، $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$.

۳) $T^{**}=T$.

۴) *اگر $H_۳$ فضای هیلبرت باشد و $U\in\mathfrak{B}(H_۲,H_۳)$ آنگاه،* $(UT)^*=T^*U^*$.

برهان. به مرجع [۲۳] قضیه ۳.۱۱ رجوع شود. ■

قضیه ۲۴.۱.۱. *اگر $T\in\mathfrak{B}(H)$، عملگر T فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.*

برهان. به مرجع [۲۳] قضیه ۲.۱۶ رجوع شود. ■

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ فضاهای هیلبرت باشند عملگر T با دامنه $D(T)\subseteq H_۱$ و برد $\mathrm{Rang}(T)\subseteq H_۲$ را یک عملگر بسته گویند اگر دارای این خاصیت باشد که هر وقت $\{x_n\}$ دنباله‌ای در

$D(T)$ باشد که $x_n \to x$ در $H_۱$ و $Tx_n \to y$ در $H_۲$ آنگاه به ازای $x \in D(T)$، $Tx = y$.

به طور واضح یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت بسته است.

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید $T \in \mathfrak{B}(H_۱, H_۲)$ وارون‌پذیر باشد در این صورت T یک عملگر بسته است.*

برهان. فرض کنید $x_n \to x(x_n \in D(T))$ و $Tx_n \to y$ چون $T^{-۱}$ روی $H_۲$ کراندار است پس داریم:

$$x_n = T^{-۱}Tx_n = T^{-۱}y \Rightarrow x = T^{-۱}y \in D(T), \quad Tx = TT^{-۱}y = y.$$

■

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر S و T دو عملگر از X به Y باشند به طوریکه $D(S) \subseteq D(T)$ و برای هر $u \in D(S)$، $Su = Tu$ در این صورت T را توسیع S و S را تحدید T می‌نامند و می‌نویسیم:

$$S \subset T \quad \text{یا} \quad T \supset S.$$

اگر $D(T)$ در X چگال باشد گوییم T به طور چگال تعریف شده است.

تعریف ۲۸.۱.۱. عملگر $T \in \mathfrak{B}(H)$ را متقارن گوییم اگر T به طور چگال تعریف شده باشد و $T \subset T^*$.

تعریف ۲۹.۱.۱. عملگر $T \in \mathfrak{B}(H_۱, H_۲)$ را ایزومتری جزئی [۱۰] نامند اگر زیرفضای خطی بسته M از $H_۱$ وجود داشته باشد طوریکه به ازای $x \in M$،

$$\| Tx \| = \| x \|,$$

جائیکه برای هر $x \in M^{\perp}$، $Tx = ۰$.

[۱۰] Partial Isometry

M را مجموعه آغازین [۱۱] و $M' = TM$ را مجموعه نهایی [۱۲] T گوییم.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشد. و $T \in \mathfrak{B}(H)$، ماتریس (a_{ij}) متناظر با T و $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_{ij} = \langle T\varphi_i, \varphi_j \rangle.$$

مثال ۳۱.۱.۱. *فرض کنید $S_r \in L(\ell_2)$ به صورت زیر باشد:*

$$S_r(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...).$$

اگر $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه استاندارد برای ℓ_2 باشد در این صورت داریم:

$$\langle S_r e_j, e_i \rangle = \langle e_{j+1}, e_i \rangle = \delta_{j+1,i}.$$

بنابراین ماتریس نمایش S_1 و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ماتریس زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots \\ 1 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 1 & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \end{pmatrix}.$$

تعریف ۳۲.۱.۱. عدد مختلط λ را مقدار ویژه از ماتریس A نامند اگر وجود داشته باشد بردار x (بردار ویژه) به طوری که،

$$Ax = \lambda x.$$

[۱۱] Initial Set

[۱۲] Finally Set

۱.۱.۱ عملگرهای شبه معکوس [۱۳]

لم ۳۳.۱.۱. *فرض کنید $A \in \mathfrak{B}(H_۱, H_۲)$ با برد بسته باشد در این صورت عملگر کراندار $A^\dagger : H_۲ \to H_۱$ وجود دارد به طوری که به ازای $f \in R_A$،*

$$AA^\dagger f = f.$$

برهان. به مرجع [۳] لم A.۴۵.۴ رجوع شود. ■

تعریف ۳۴.۱.۱. $A^\dagger$ را در لم قبل عملگر شبه معکوس A می‌نامند. اگر A وارون‌پذیر باشد آنگاه:

$A^\dagger = A^{-۱}$.

اگر U و V وارون‌پذیر باشند در این صورت داریم:

$$(UAV)^\dagger = V^{-۱} A^\dagger U^{-۱}.$$

اما در حالت کلی $(A \circ B)^\dagger \neq B^\dagger \circ A^\dagger$ (حتی اگر فضاها با بعد متناهی باشند).

لم ۳۵.۱.۱. *فرض کنید $T \in \mathfrak{B}(H_۱, H_۲)$ با برد بسته باشد در این صورت:*

۱) *$TT^\dagger$ تصویر متعامد از $H_۱$ به روی R_T می‌باشد.*

۲) *$T^\dagger T$ تصویر متعامد از $H_۲$ به روی $R_{T^\dagger}$ می‌باشد.*

۳) *T^* دارای برد بسته می‌باشد و $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$.*

۴) *عملگر $T^\dagger$ روی R_T به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$T^\dagger = T^*(TT^*)^{-۱}.$$

[۱۳] Pseudo-inverse operator

برهان. به مرجع [۱۳] لم ۲.۵.۲ رجوع شود. ■

قضیه ۳۶.۱.۱. *فرض کنید $U : K \to H$ یک عملگر کراندار و پوشا باشد فرض کنید $y \in H$ در این صورت معادله $Ux = y$ جواب منحصر به فردی به شکل $x = U^\dagger y$ دارد که دارای کمترین نرم است.*

برهان. به مرجع [۱۳] قضیه ۳.۵.۲ رجوع شود. ■

گزاره ۳۷.۱.۱. *فرض کنید $T : H_1 \to H_2$ و $U : H_2 \to H_1$ عملگرهای خطی کراندار با بردهای بسته باشند در این صورت $(U \circ V)^\dagger = V^\dagger U^\dagger$ اگر و تنها اگر:*

۱) *$(U \circ V)$ دارای برد بسته باشد،*

۲) *R_{U^*} تحت VV^* پایا باشد،*

۳) *$R_{U^*} \cap \ker(V^*)$ تحت U^*U پایا باشد.*

برهان. به مرجع [۳] گزاره A.۴۸.۴ رجوع شود. ■

نتیجه ۳۸.۱.۱. *فرض کنید $T : H_1 \to H_2$ یک عملگر خطی کراندار با برد بسته باشد در این صورت:*

$(U^*U)^\dagger = U^\dagger U^{*\dagger}$.

برهان. به مرجع [۳] نتیجه A.۴۹.۴ رجوع شود. ■

۲.۱.۱ طیف [۱۴] یک عملگر

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنید $T \in \mathcal{B}(H)$ باشد و $\lambda \in \mathbb{C}$. اگر $\lambda I - T$ وارون‌پذیر باشد، λ را یک نقطه منظم [۱۵] (عادی) T می نامند. مجموعه $\rho(T)$ متشکل از همه نقاط منظم را مجموعه حلال [۱۶] T می نامند.

تعریف ۴۰.۱.۱. ۱) اگر A یک ماتریس دلخواه باشد در این صورت مجموعه

$$\sigma(A) = \{\lambda | A \quad \text{مقدار ویژه } \lambda\}$$

را طیف A گویند.

عدد $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ را شعاع طیفی [۱۷] A گویند.

طیف $\sigma(T)$ از T متمم $\rho(T)$ می‌باشد.

۳.۱.۱ مقادیر منفرد [۱۸]

تعریف ۴۱.۱.۱. عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $h \in H$ داشته باشیم:

$$\langle Th, h \rangle \geq 0.$$

و آنرا با $T \geq 0$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۲.۱.۱. اگر H_1 و H_2 فضاهای هیلبرت باشند و $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ یک عملگر فشرده باشد عملگر T^*T فشرده و مثبت است زیرا داریم:

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \| Tx \|^2 \geq 0. \qquad (۲.۱)$$

[۱۴] Spectrum
[۱۵] Regular points
[۱۶] Resolvent set
[۱۷] Spectrum radius
[۱۸] Singular values

بنابراین دارای یک دستگاه پایه از مقادیر ویژه $\lambda_1(T^*T) \geq \lambda_2(T^*T) \geq \cdots > 0$ می‌باشد.

در این حالت بردارهای ویژه $\varphi_1, \varphi_2, ...$ متناهی هستند. حال مقادیر منفرد T را با $S_j(T)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_j(T) = [\lambda_j(T^*T)]^{\frac{1}{2}}.$$

به طوری که به ازای $j = 1, 2, ...$، $S_j(T) \geq S_{j+1}(T)$ و $S_j(T) \to 0$.

تعریف ۴۳.۱.۱. گوییم $f \in \operatorname{span}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ اگر بتوان f را به شکل ترکیب خطی از f_k ها نوشت یعنی:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k f_k.$$

تعریف ۴۴.۱.۱. اگر X یک فضای باناخ باشد یک دنباله از بردارهای $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ متعلق به X یک پایه برای X است اگر برای هر $f \in X$ دنباله $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ از اسکالر موجود باشد به طوریکه:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k.$$

تعریف ۴۵.۱.۱. فرض کنید $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشد و $T \in \mathcal{B}(H)$ در این صورت اثر [19] T را با $\operatorname{trac}(T)$ یا $\operatorname{tr}(T)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{trac}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle.$$

اثر T از انتخاب پایه متعامد یکه مستقل است.

قضیه ۴۶.۱.۱. *(نامساوی کوشی- شوارتز) اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد در این صورت به ازای*

[19] Trace