بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۳۷۳۶

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

برد ضربگرها روی جبر باناخ

توسط

مسلم عباسی

استاد راهنما:

دکتر غلامحسین اسلام زاده

مهر ماه ۱۳۸۶

به نام خدا

برد ضربگرها روی جبر باناخ

به وسیله‌ی:

مسلم عباسی

پایان نامه:

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی

از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض (آنالیز)

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : عالی

دکتر غلامحسین اسلام زاده دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر بهمن طباطبایی دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر محسن تقوی دانشیار بخش ریاضی ....

مهرماه ۱۳۸۶

تقدیم به :

ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج) ،

پدر ، مادر

و

همسرم

سپاسگزاری

خدای بزرگ را سپاس که به من توانایی تحصیل و تهذیب در راه خویش را عطا کرد . بر خویش واجب می دانم که مراتب تشکر و قدردانی ویژه خود را از دکتر غلامحسین اسلام زاده ابراز نمایم ، ایشان در تمام طول این دوره تحصیلی راهنمای علم و اخلاقم بوده و هستند . همچنین از اساتید مشاورم آقایان دکتر بهمن طباطبایی و دکتر محسن تقوی به خاطر راهنمایی های بی دریغشان سپاسگذارم .

اکنون که این دوره مهم از زندگی ام را پشت سر می گذارم لازم می دانم از همراهی و دلگرمی برادر و خواهر عزیزم و همچنین دوستان بزرگوار آقایان محمد امیدی ، امیر عسگری ، محسن آزاد بخت ، محمد ویسی ، رسول اکرمی و دیگر دوستانم نیز تشکر نمایم .

همچنین از خانواده محترم جلیلیان به ویژه دوست و برادرم مجید جلیلیان قدردانی می نمایم .

مسلم عباسی

مهر ۱۳۸۶

چکیده

برد ضربگرها روی جبرهای باناخ

به وسیله :

مسلم عباسی

پایان نامه حاضر بر اساس مقاله های

When is the range of multiplier on Banach Algebra closed? Math .Z. 254,(2006),715-72 .

A characterization of the closed unital ideals of the Fourier Stieljes algebra B (G) of a locally compact amenable group G ,J. Funct Anal. , 205, (2003), 90-106.

نگارش A . *Ulger* نوشته شده است .

فرض کنید A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار باشد به طوریکه هر ایده آل محض بسته A در یک ایده آل محض بسته با همانی تقریبی کراندار قرار گیرد . آنگاه ضربگر $T : A \longrightarrow A$ دارای برد بسته است اگر وتنها اگر T به حاصلضرب یک ضربگر خود توان و یک ضربگر معکوس پذیر تجزیه شود . همچنین به بیان نتایجی برای ایده آلهای اصلی برای برخی جبرهای باناخ می پردازیم .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۱– مقدمه

۱– مقدمه

۱–۱تاریخچه

در این پایان نامه ما به اثبات یک قضیه که در ذیل خواهد آمد می پردازیم . این قضیه راجع به نوع خاصی از عملگرها روی جبرهای باناخ است که ضربگر نامیده می شوند . اولین مجموعه منظم که ما درباره ضربگرها و قضایای مقدماتی آنها می شناسیم کتابی است که توسط $Larsen$ ازیک مجموعه کنفرانس تهیه شده است [۱۲] .

قضیه : " فرض کنید A یک جبر باناخ با $B.A.I$ باشد به طوریکه هر ایده آل محض بسته آن در یک ایده آل محض بسته با $B.A.I$ قرار گیرد . آنگاه ضربگر $T:A\longrightarrow A$ دارای برد بسته است اگر و تنها اگر T به حاصلضرب یک ضربگر خود توان و یک ضربگر معکوس پذیر تجزیه شود" .

اما اگر T بصورت حاصلضرب یک ضربگر خود توان و یک ضربگر معکوس پذیر باشد آنگاه به وضوح برد T بسته خواهد بود پس در واقع کار ما در این پایان نامه اثبات این مسأله است که تحت عنوان مسأله (M) از آن یاد می کنیم .

مسأله (M) : تحت چه شرایطی ضربگر $T:A\longrightarrow A$ با برد بسته را می توان به حاصلضرب یک ضربگر خود توان و یک ضربگر معکوس پذیر تجزیه کرد ؟

مساله (M) در حالت خاص اولین بار توسط بیورلینگ (*Beurling*) در نهمین کنگره ی ریاضیدانهای اسکاندیناوی در سال ۱۹۳۸ در هلسینکی به صورت زیر طرح شد[۳] .

اگر G یک گروه آبلی موضعا فشرده و $M(G)$ جبر اندازه هایش باشد ، اندازه μ در $M(G)$ را مشخص کنید که برای آن ایده آل $\mu * L^1(G)$ در جبرگروه $L^1(G)$ بسته است .

در اوایل سال ۱۹۷۰ هویت (*Hewitt*) این مساله را به گلیکسبرگ (*Glicksberg*) پیشنهاد داد و گلیکسبرگ طی یک مقاله [۹] علی رغم اینکه مساله را حل نکرد ولی تحلیل خوبی از آن ارائه کرد .

این مسأله در حالتهای خاص برای ضربگرها در سال ۱۹۹۲ توسط لارسن و نیومن (*Newmann*) [۱۴] و نیز در سال ۱۹۹۳ توسط لارسن و مبختا (*Mbekhta*) [۱۳] و در سال ۱۹۹۴ توسط اینا (*Aiena*) و لارسن[۱] مورد مطالعه قرار گرفته است . در سال ۲۰۰۰ تمام نتایج مرتبط با این مسأله در کتابی که توسط لارسن و نیومن نوشته شد ، جمع آوری گردید [۱۵].

اولگر (*Ulger*) در سالهای ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳ مسأله بیورلینگ را برای ضربگرها روی جبرهای باناخ مورد مطالعه قرار داد [۱۹] و [۲۰] و تحت شرایط خاص جوابهایی برای مسأله ارائه نمود . در ژوئن ۲۰۰۶ اولگر طی یک مقاله مفصل به اثبات قضیه ای که در بالا به عنوان مسأله (M) از آن یاد کردیم ، پرداخت و این مسأله را برای یک جبر باناخ در حالت کلی حل کرد [۲۱] . اما برای حل این مسأله به بررسی دو مسأله زیر می پردازیم که هر کدام جداگانه در یک فصل این پایان نامه بررسی شده و نهایتاً برای حل مسأله (M) به کار گرفته شده است .

مسأله (A) : فرض کنید $T : A \longrightarrow A$ یک ضربگر با برد بسته باشد . چه موقع ایده آل $T(A)$ دارای $B.A.I$ است ؟

این مسأله را در فصل دوم این پایان نامه مورد مطالعه قرار می دهیم و ثابت می کنیم برای یک جبر باناخ با $B.A.I$ و ضربگر $T:A \longrightarrow A$ با برد بسته $T^{2}(A)$ در $T(A)$ چگال است اگر و تنها اگر $T^{2}(A)=T(A)$ اگر و تنها اگر $T(A)$ دارای $B.A.I$ باشد . این مهمترین نتیجه این فصل خواهد بود .

مسأله (B) : جبرهای باناخ A با $B.A.I$ را مشخص کنید که در آن ها برای ضربگر $T:A \longrightarrow A$ با برد بسته $T^{2}(A)$ در $T(A)$ چگال باشد .

این مسأله را در فصل سوم بررسی کرده و تحت یک فرض که آن را فرض (H) خواهیم نامید ، ثابت می کنیم که برای یک ضربگر A با برد بسته $T^{2}(A)$ در $T(A)$ چگال خواهد شد . در پایان این فصل مسأله (M) را از حل دو مسأله A و B حل خواهیم کرد .

در فصل آخر این پایان نامه به بیان برخی نتایج که از بررسی این دو مسأله و نتیجه اصلی بدست آمده خواهیم پرداخت .

۱-۲- فضاهای باناخ ،تعاریف و قضایا

تعریف ۱-۲-۱ : فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان F باشد ، تابع $P:A\to[0,\infty)$ را یک نیم نرم روی A گوییم هر گاه دارای خواص زیر باشد :

۱) $P(x+y)\le P(x)+P(y) \qquad \forall x,y\in X$

۲) $P(\alpha x)=|\alpha|P(x) \qquad \forall\alpha\in F\ ,\ x\in X$

وآنرا نرم گوییم هرگاه :

$$P(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0\ .$$

تعریف۱-۲-۲ : یک فضای برداری با یک توپولوژی که نسبت به این توپولوژی دو نگاشت زیر پیوسته باشند را یک فضای برداری توپولوژیک $(T.V.S)$ گوییم .

$$\begin{array}{c} F\times X\longrightarrow X\\ (\alpha,x)\to\alpha x\end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{c} X\times X\longrightarrow X\\ (x,y)\to x+y\end{array}\ .$$

تعریف۱-۲-۳ : یک $T.V.S$ که توپولوژی آن با خانواده p از نیم نرمها با شرط $\bigcap_{p\in \mathrm{p}}\{x:p(x)=0\}=\{0\}$ تولید می شود را یک فضای موضعاً محدب $(L.C.S)$ گوییم .

تعریف۱-۲-۴ : فرض کنید Xیک $L.C.S$ باشد . توپولوژی تعریف شده روی X بوسیله خانواده ی نیم نرمهای $\{P_{x^*}:x^*\in X^*\}$ به طوری که $P_{x^*}(x)=|\langle x,x^*\rangle|$ را توپولوژی ضعیف روی X گوییم .

توجه : تور $\{x_i\}_{i\in I}$ در X به طور ضعیف به $x_\circ$ همگراست اگر و تنها اگر :

$$\forall x^* \in X^* \qquad \langle x_i, x^*\rangle \longrightarrow \langle x, x^*\rangle \ .$$

تعریف ۱-۲-۵ : فرض کنید X یک $L.C.S$ باشد . توپولوژی تعریف شده روی X^* بوسیله خانواده $\{P_x : x\in X\}$ از نیم نرمها که $P_x(x^*) = |\langle x, x^*\rangle|$ را توپولوژی $*$- ضعیف گوییم .

توجه : تور $\{x_i^*\}_{i\in I}$ در X^* به طور $*$- ضعیف همگرا به x^* است هرگاه :

$$\forall x \in X \qquad \langle x, x_i^*\rangle \longrightarrow \langle x, x^*\rangle \ .$$

تعریف ۱-۲-۶ : اگر X یک TVS باشد و $A\subseteq X$ و $B\subseteq X^*$ آنگاه :

$$A^{\perp} = \{x \ \in X^* : \ \langle a, x^*\rangle = \circ \ , \ \forall a \in A\}$$

$$^{\perp}B = \{x \in X \ : \ \langle x, b^*\rangle = \circ \ , \ \forall b^* \in B\}$$

تعریف ۱-۲-۷ : فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیک باشد . زیر فضای بسته F از E را در E مکمل دار گوییم هر گاه زیر فضای بسته G از E موجود باشد که $E = F \oplus G$.

تعریف ۱-۲-۸ : فرض کنید E یک فضای نرم دار باشد و F یک زیر فضای خطی بسته از آن باشد ، آنگاه F را در E به طور ضعیف مکمل دار گوییم هر گاه $F^{\perp}$ در E^* مکمل دار باشد .

قضیه ۱ – ۲ – ۹ : اگر F در E مکمل دار باشد ، آنگاه F در E به طور ضعیف مکمل دار است .

برهان : به مرجع شماره [۶] صفحه ۸۲۱ مراجعه کنید .

تعریف ۱ – ۲ – ۱۰ : فرض کنید F یک زیر فضای خطی از فضای E و $\frac{E}{F}$ فضای خارج قسمت باشد آنگاه F دارای هم بعد n در E است هر گاه $\dim(\frac{E}{F}) = n$.

تعریف ۱ – ۲ – ۱۱ : دو تایی $(A, \|.\|)$ را یک فضای نرم دار گوییم هر گاه A یک فضای برداری و $\|.\|$ یک نرم روی A باشد .

تعریف ۱ – ۲ – ۱۲ : یک فضای نرم دار که نسبت به نرمش کامل باشد را یک فضای باناخ گوییم .

مثال ۱ – ۲ – ۱۳ : برای فضای توپولوژیک فشرده ی X ، $C(X)$ ، فضای همه توابع پیوسته روی X ، با جمع و ضرب نقطه به نقطه و نرم زیر یک فضای باناخ است :

$$\|f\| = Sup\,\{|f(x)| : x \in X\} \ .$$

تعریف ۱ – ۲ – ۱۴ : فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد ، یک اندازه هار چپ روی G یک اندازه رادون غیر صفر μ روی G است که برای هر مجموعه بورل $E \subseteq G$ و $x \in G$ ، $\mu(xE) = \mu(E)$.

مثال ۱ – ۲ – ۱۵: فرض کنید G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد آنگاه $L^1(G)$، فضای همه توابع انتگرال پذیر نسبت به اندازه هار روی G ، با نرم زیر یک فضای باناخ است .

$$\|f\|_1 = \int_G |f| \; d\mu \quad .$$

برهان : به مرجع شماره [۷] صفحه ۱۸۳ مراجعه کنید .

قضیه ۱ – ۲ – ۱۶ : اگر X , Y فضاهای باناخ و $T : X \to Y$ تبدیل خطی باشد آنگاه گزاره های زیر معادلند :

۱) $T'(y^*) \subseteq X^*$

۲) T کراندار است .

۳) عملگر T به طور ضعیف - ضعیف پیوسته است .

برهان : به مرجع شماره [۵] صفحه ۱۶۷ مراجعه کنید .

قضیه ۱ – ۲ – ۱۷ : اگر X, Y فضاهای باناخ و $A, B \in B(X, Y)$ و $\alpha, \beta \in C$ آنگاه :

$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ و عملگر $T^* : Y^* \to X^*$ به طور $*$- ضعیف - $*$- ضعیف پیوسته است .

برهان : به مرجع شماره [۵] صفحه ۱۶۷ مراجعه کنید .

تعریف ۱ – ۲ – ۱۸ : فرض کنید X یک فضای برداری باشد . نگاشت خطی $P : X \to X$ را یک تصویر در X گوییم اگر $P^2 = P$. یعنی :

$$\forall x \in X \qquad PP(x) = x \quad .$$

قضیه۱–۲–۱۹ : فرض کنید P یک تصویر در X باشد که دارای هسته $Ker(P)$ و برد $Ran(P)$ باشد آنگاه شرایط زیر برقرارند :

۱) $Ran(P)=Ker(I-P)=\{x\in X : P(x)=x\}$

۲) $Ker(P)=Ran(I-P)$

۳) $Ran(P)\cap Ker(P)=\{0\}$, $X=Ran(P)\oplus Ker(P)$.

۴) اگر A, B زیرفضاهای X باشند به طوریکه $A\cap B=\{0\}$ و $X=A\oplus B$ آنگاه نگاشت تصویر یکتای P در X وجود دارد که :

$$A=Ran(P) \quad , \quad B=Ker(P) \quad .$$

برهان : به مرجع شماره [۱۸] صفحه ۱۲۶ مراجعه کنید .

قضیه۱–۲–۲۰ : اگر P یک نگاشت تصویر پیوسته در فضای برداری توپولوژیک X باشد آنگاه :

۱) $X=Ran(P)\oplus Ker(P)$

۲) اگر X یک فضای باناخ باشد و اگر $X=A\oplus B$ آنگاه نگاشت تصویر P با برد A و هسته B پیوسته است .

برهان : به مرجع شماره [۱۸] صفحه ۱۲۶ مراجعه کنید .

قضیه ۱–۲–۲۱ : فرض کنید E فضای باناخ باشد . آنگاه برای هر $\Phi \in E^{**}$ تور (x_ν) در E وجود دارد که برای هر ν و $\|x_\nu\| \le \|\Phi\|$ و $x_\nu \longrightarrow \Phi$ در توپولوژی $*$- ضعیف ، در واقع فضای E با توپولوژی $*$- ضعیف در فضای E^{**} چگال می باشد . یعنی :

$$\overline{E}^{*} = E^{**} \ .$$

برهان : به مرجع شماره [۶] صفحه ۸۱۸ مراجعه کنید .

قضیه نگاشت بسته ۱–۲–۲۲ : اگر Y, X فضاهای باناخ و $T \in B(X,Y)$ باشد آنگاه حالات زیر معادلند :

۱) $Ran(T)$ بسته است .

۲) $Ran(T^*)$ $*$- ضعیف بسته است .

۳) $Ran(T^*)$ نرم بسته است .

برهان : به مرجع شماره [۵] صفحه ۱۶۹ مراجعه کنید .

قضیه برد بسته ۱–۲–۲۳ : فرض کنید Y, X فضاهای باناخ و $T : X \to Y$ عملگر خطی از X به داخل Y باشد آنگاه شرایط زیر معادلند .

۱) $Ran(T)$ بسته است .

۲) $Ran(T^*)$ $*$- ضعیف بسته است .

۳) نگاشت $T : X \to Ran(T)$ باز است .

۴) $Ran(T^*) = (Ker(T))^{\perp}$

۵) $(Ran(T))^{\perp} = Ker(T^*)$.

برهان : به مرجع شماره [۱۵] صفحه ۵۴۳ مراجعه کنید .

تعریف ۱–۲–۲۴ : نگاشت $T: X \to Y$ از یک فضای باناخ به فضای باناخ دیگر را بسته گوییم اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوریکه $x_n \longrightarrow x$ و $T(x_n) \longrightarrow y$ آنگاه $T(x_n) = y$.

قضیه ۱–۲–۲۵ : فرض کنید X , Y فضاهای باناخ باشند آنگاه نگاشت خطی $T: X \to Y$ بسته است اگر و تنها اگر پیوسته باشد .

برهان : به مرجع شماره [۵] صفحه ۹۲ مراجعه کنید .

قضیه ۱–۲–۲۶ : اگر P یک تابعک زیر خطی روی فضای برداری V و $\rho_\circ$ یک تابعک خطی روی زیر فضای $V_\circ$ از V باشد و $|\rho_\circ(y)| \le P(y)$ برای $y \in V_\circ$ ، آنگاه تابعک خطی ρ روی V وجود دارد به طوری که $|\rho(x)| < P(x)$ برای $x \in V$ و $|\rho(y)| = P_\circ(y)$ برای $y \in V_\circ$.

برهان : به مرجع شماره [۱۱] قضیه ۱–۱–۶ مراجعه کنید .

قضیه ۱–۲–۲۷ : اگر Z یک زیر فضای بسته از فضای موضعاً محدب V باشد و $y \in V \setminus Z$ آنگاه تابعک خطی پیوسته ρ روی V وجود دارد به طوری که $\rho(y) \neq \circ$ و $f(z) = \circ \quad \forall z \in Z$.

برهان : به مرجع شماره [۱۱] قضیه ۱–۲–۱۳ مراجعه کنید .

قضیه ۱–۲–۲۸ : اگر X یک فضای باناخ و $T : X \longrightarrow X$ یک عملگر خطی پیوسته با برد بسته باشد آنگاه حالات زیر معادلند:

۱) $Ker(T^{۲}) = Ker(T)$

۲) $\overline{T^{*}(X^{*}) + Ker(T^{*})} = X^{*}$

۳) $\overline{T^{*۲}(X^{*})} = T^{*}(X^{*})$.

برهان : به مرجع شماره [۲۰] قضیه ۳–۲ مراجعه کنید .

۱–۳- جبرهای باناخ و خواص آنها

تعریف۱–۳–۱ : فضای برداری A روی میدان مختلط F با یک ضرب که در شرایط زیر صدق می کند را یک جبر می گوییم :

۱) $(x+y)z = xy + yz$

۲) $x(y+z) = xy + xz$

۳) $x(yz) = (xy)z$

۴) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

تعریف ۱–۳–۲ : جبر A با نرم $\|.\|$ را که در شرط $\underset{\forall x,y\in A}{\|xy\| \le \|x\|\|y\|}$ صدق می کند را یک جبر نرم دار گوییم .

تعریف۱–۳–۳ : یک جبر نرم دار که نسبت به نرم ، یک فضای باناخ باشد را یک جبر باناخ گوییم .

مثال۱–۳–۴ : فرض کنید X یک فضای فشرده باشد آنگاه $C(X)$ ، فضای همه توابع $f : X \to C$ ، با جمع و ضرب نقطه ای و نرم تعریف شده یک جبر باناخ است :

۱) $(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \forall x \in X$

۲) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$