بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

ساختار فضاهای تحت انتقال پایا روی یک گروه آبلی موضعاً فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا میری

استاد مشاور:

دکتر رجبعلی کامیابی گل

نگارش:

مهدی ابراهیمی فرد

زمستان ۸۷

به نام خدا

فرم شماره ۵

دانشگاه بیرجند
مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ تحصیلی دورهٔ کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال جلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ تحصیلی کارشناسی ارشد **آقای مهدی ابراهیمی فرد**

به شماره دانشجویی: **۸۵۱۳۱۱۲۰۹۱** رشته: **ریاضی** گرایش : **آنالیز** دانشکده: **علوم** دانشگاه بیرجند

تحت عنوان : **" ساختار فضاهای تحت انتقال پایا روی یک گروه آبلی موضعاً فشرده "**

به ارزش: ۶ واحد درساعت: ۱۰:۳۰ روز: **چهار شنبه** مورخ: ۸۷/۱۱/۲۳

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
استاد راهنما	آقای دکترمحمدرضا میری	استادیار	
استاد مشاور	آقای دکتر رجبعلی کامیابی گل	دانشیار	
داور اول	آقای دکترامان ا... اسدی	استادیار	
داور دوم	آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر حسین اقدامی	استادیار	

نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تأیید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: ۱۸/۷۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶) ۳- خوب (۱۵/۹۹ – ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ – ۱۲)

۱۳۸۸/۱۲/۲۶

تقدیم به

تمام کسانی

که در آموختن ریاضی مرا یاری کرده اند.

سپاسگذاری

اکنون که با یاری حضرت حق توفیق آن را یافتم تا راه پیش گرفته در مسیر دانش را با موفقیت بپیمایم، بر خود واجب می دانم تا از تمامی کسانی که مرا در این راه چه از نظر فکری و چه به لحاظ علمی یاری رساندند کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

از استاد راهنمای محترم دکتر محمد رضا میری به خاطر راهنمایی ها و محبت هایشان کمال تشکر را می نمایم وآرزوی موفقیت در تمام طول زندگی را برای ایشان دارم.

تشکر و قدردانی ویژه دارم از استاد گرانقدر دکتر رجبعلی کامیابی گل که بی شک راهنمایی های بی دریغ ایشان در کمال صبر و شکیبایی در پیشبرد مراحل این پایان نامه نقش به سزایی ایفا کرد.

از دکتر اسدی و دکتر محمدی نژاد که داوری این کار را بر عهده داشتند و همچنین دکتر اقدامی، دکتر فضایلی و آقای علی آبادی نیز نهایت تشکر را به خاطر همکاری و کمک های ارزنده شان دارم.

در نهایت از تمامی دوستان به ویژه آقایان محمد رضا مهدور، حسین حسینی گیو، زنگویی ، زین الدینی و اسدی که در مراحل مختلف کار پشتیبان من بودند تقدیر و تشکر می نمایم.

مهدی ابراهیمی فرد

۱۳۸۷/۱۱/۲۳

چکیده

در این پایان نامه روی زیر فضاهای پایا تحت انتقال در$L^{۲}(G)$ وقتی که G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد، بررسی می شود.

در ضمن می خواهیم نشان دهیم که می توان هر فضای تحت انتقال پایا را به یک جمع متعامد از فضاهایی که به وسیله یک تابع که دارای انتقالی به شکل یک قاب پارسوال است، تولید شده، تجزیه کرد.

فهرست مندرجات

تاریخچه و مقدمه

یک زیرفضای تحت انتقال پایای $L^2(\mathbb{R}^n)$، عبارتست از زیرفضایی مانند V از $L^2(\mathbb{R}^n)$ که برای آن داریم

$$T_k f(x) = f(k^{-1}x); \quad f \in V,\ T_k f \in V, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

تئوری زیرفضاهای تحت انتقال پایای $L^2(\mathbb{R}^n)$ در زمینه های مختلف از جمله آنالیز چند ریزگی، سیستمهای گابر، سیستمهای اسپلاین و موجکها و نظریه تقریب کاربرد دارد [۴]. در دهه اخیر این زیرفضاها توسط افراد مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند (به [۲۵، ۱۹، ۸، ٦، ۴، ۳، ۲، ۱] مراجعه کنید). این نظریه در حل یک مسأله باز در مورد موجکها بکار گرفته شد [۲۵، ٦، ۱۹، ۱۸].
همچنین در نشان دادن یک خاصیت مشخصه جدید برای موجک های متعامد توسط ویس [1] مورد استفاده قرار گرفته است.[۲۳]
بعد از معرفی تعاریف و گزاره های مقدماتی در فصل اول، در فصل های بعدی به بررسی زیرفضاهای تحت انتقال پایای $L^2(G)$ می پردازیم که در آن G یک گروه موضعاً فشرده آبلی است.
به علاوه ما در صدد آن هستیم که یک مشخصه از اعضای فضاهای اساسی تحت

[1] Weiss

انتقال پایا در $L^2(G)$ بر حسب تبدیل فوریه بیابیم. و نیز ما به دنبال آن هستیم که یک شرط لازم و کافی برای انتقال یک تابع φ در $L^2(G)$ به یک دستگاه متعامد یکه بیابیم.

همچنین مابه دنبال یافتن یک شرط لازم و کافی برای انتقال تابع $\varphi \in L^2(G)$ به یک قاب پارسوال هستیم. و در نهایت نشان خواهیم داد که هر فضای تحت انتقال پایا دارای تجزیه ای به شکل یک جمع متعامد از فضاهایی است که توسط تابعی که دارای انتقالی به شکل یک قاب پارسوال است تولید شده باشد.

تذکر. در این پایان نامه منظور از $|A|$ که در آن A یک مجموعه ی اندازه پذیر است، اندازه مجموعه A است.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

۱—۱ مباحثی از توپولوژی

تعریف ۱.۱ فرض کنیم $X \neq \emptyset$ مجموعه ای دلخواه باشد و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی X یعنی گردایه ی تمام زیر مجموعه های X باشد. اگر $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ دارای ویژگی های زیر باشد:

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

ب) اگر $\{S_\alpha\ ;\ \alpha \in I\} \subseteq \tau$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \in \tau$$

ج) اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $S_i \in \tau$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i \in \tau$$

در این صورت τ را یک توپولوژی روی X می نامیم.

فضای توپولوژیک شامل دو شیء است، یکی مجموعه غیر تهی X و دیگری توپولوژی τ روی X. که آن را به صورت (X,τ) نمایش می دهیم.

مثال ۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\tau = \{\emptyset, X\}$ در نظر گرفته شود، در این صورت τ یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی یکپارچه یا بدیهی می گوییم.

مثال ۳.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\tau = \mathcal{P}(X)$ در نظر گرفته شود، در این صورت τ یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی گسسته [1] می گوییم.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ را یک پایه برای توپولوژی τ می گوییم، هرگاه هر عضو مخالف تهی از τ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد. به عبارت دیگر $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ یک پایه برای توپولوژی τ است اگر و تنها اگر

$$\tau = \{S: \ S = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha, \{B_\alpha; \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{B}\} \cup \ \{\emptyset\}$$

تعریف ۵.۱ فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد و $x \in X$. خانواده $\mathcal{B}_x$ از اعضای τ را که شامل x هستند یک پایه موضعی در x می گوییم، هر گاه به ازای هر S متعلق به τ که $x \in S$، $B \in \mathcal{B}_x$ی موجود باشد، به طوری که $B \subseteq S$.

تعریف ٦.۱ اگر فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد آنگاه (X,τ) را:

الف) فشرده[فشرده شمارا] نامیم، اگر هر پوشش [پوشش شمارا] باز از X شامل زیر پوشش متناهی باشد.

ب) موضعاً فشرده [موضعاً فشرده شمارا] گوییم، هر گاه هر نقطه، یک همسایگی با بستار فشرده [فشرده شمارا] داشته باشد.

---
[1] Discrete topology

ج) T_1 گوییم [یا در اصل T_1 صدق می کند] اگر برای هر $a, b \in X$ هر یک از آنهایک همسایگی داشته باشد که شامل دیگری نباشد.

د) هاسدورف گوییم هر گاه برای هر x, y که $x \neq y$،مجموعه های باز و مجزای U, V موجود باشند که $x \in U \;\;,\;\; y \in V$.

ه) شمارای اول گوییم، هرگاه در هر نقطه مانند x، یک پایه موضعی شمارا برای τ وجود داشته باشد.

و) شمارای دوم گوییم، هرگاه τ یک پایه شمارا داشته باشد.

ز) σ—فشرده نامیم، اگر اجتماع شمارایی از زیر فضاهای فشرده باشد.

تذکر: فضای هاسدورف را فضای T_2 نیز می گوییم.

تعریف ۷.۱ فضای توپولوژیک (x, τ) را تفکیک پذیر می گوییم هرگاه X دارای زیر مجموعه چگال شمارا مانند D باشد (یعنی D شمارا باشد و $\overline{D} = X$).

مثال ۸.۱ الف) فضای توپولوژیک $(\mathbb{R}, \tau)$ تفکیک پذیر است، زیرا مجموعه اعداد گویا یک زیر مجموعه شمارا و چگال در $(\mathbb{R}, \tau)$ است.

ب) هیچ مجموعه ی ناشمارایی با توپولوژی گسسته تفکیک پذیر نیست.

قضیه ۹.۱ الف) هر فضای شمارای دوم تفکیک پذیر است.

ب) هر فضای متریک تفکیک پذیر، شمارای دوم است.

ج) هر زیر فضای باز یک فضای تفکیک پذیر، تفکیک پذیر است.

اثبات. به [۵] مراجعه کنید.

□

۱—۲ مباحثی مقدماتی از تئوری اندازه

تعریف ۱۰.۱ گردایه $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه های مجموعه ناتهی X را یک σ — جبر [۲] در X نامیم اگر $\mathcal{M}$ از خواص زیر بهره مند باشد:

الف) $X \in \mathcal{M}$.

ب) هرگاه $A \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $A^c \in \mathcal{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است .

ج) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, \ldots$ ، $A_n \in \mathcal{M}$ آنگاه $A \in \mathcal{M}$

به عنوان یک مثال ساده از σ—جبر ها می توان $P(X)$ (مجموعه همه زیر مجموعه های X) را در نظر گرفت.

اگر X یک مجموعه و $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ یک σ—جبر باشد، آنگاه $(X, \mathcal{M})$ را فضای اندازه پذیر [۳] و عناصر M را مجموعه های اندازه پذیر [۴] می نامند.

σ-algebra [۲]

Measurable space [۳]

Measurable sets [۴]

تعریف ۱.۱۱ اگر X یک فضای توپولوژیک باشد،σ–جبر تولید شده به وسیله خانواده مجموعه های باز در X (یا به طور معادل به وسیله خانواده مجموعه های بسته در X) راσ–جبربورل [5] روی X نامند وبا β_X نشان داده می شود.

به عبارت دیگر ، این σ–جبر ، کوچکترین σ–جبر شامل زیر مجموعه های باز X می باشد ، اعضای این σ–جبر را مجموعه های بورل [6] می نامیم.
چون β_X یک σ – جبر است ، می توان فضای اندازه پذیر (X, β_X) را در نظر گرفت.

همچنین تمام اجتماع های شمارش پذیر از مجموعه های بسته و تمام اشتراک های شمارش پذیر از مجموعه های باز بورلی هستند، دو دسته مجموعه های اخیر را به ترتیب با نمادهای F_σ و G_δ نمایش می دهیم.
(مجموعه A در یک فضای توپولوژیک را یک F_σ نامیم اگر $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، F_n بسته است و A را یک G_δ گوییم اگر $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$، که برای هر $n \in \mathbb{N}$، G_n باز است.)

تعریف ۱.۱۲ فرض کنیم X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را اندازه پذیر گوییم، اگر برای هر مجموعه باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X اندازه پذیر باشد.

در این صورت توابع اندازه پذیر تعریف شده بر X نسبت به σ – جبر β_X ، توابع اندازه پذیر بورل یا به طور خلاصه توابع بورلی نامیده می شوند .

---

[5] Borel-σ-algebra
[6] Borel set

گزاره ۱۳.۱ الف) برای $A \subseteq X$ تابع مشخصه χ_A ، اندازه پذیر است اگر وتنها اگر A اندازه پذیر باشد.
(که در آن χ_A تابعی حقیقی مقدار روی X با ضابطه تعریف شده زیر:

$$\chi_A = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

می باشد).
ب) اگر $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ دو تابع اندازه پذیر باشند آنگاه $f + g$ و αf و $f.g$ و $|f|$ و $f/g (g \neq ۰)$ نیز اندازه پذیر هستند.

اثبات. به [۲۲] مراجعه کنید.

□

مثال ۱۴.۱ توابع ثابت و توابع پیوسته ، اندازه پذیر بورلی می باشند .

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید $\mathcal{M}$ یک σ — جبر در X و Y یک فضای توپولوژیک باشد همچنین f مجموعه X را به توی Y بنگارد.
الف) هرگاه f اندازه پذیر و E یک مجموعه بورل در Y باشد ، آنگاه $f^{-۱}(E) \in \mathcal{M}$
ب) هرگاه f اندازه پذیر ، Z یک فضای توپولوژیک و $g : Y \longrightarrow Z$ پیوسته باشد و $h = gof$ آنگاه $h : X \longrightarrow Z$ اندازه پذیر است.

ج) هرگاه f اندازه پذیر ، Z یک فضای توپولوژیک و $g : Y \longrightarrow Z$ یک نگاشت بورل بوده و $h = gof$ ، آنگاه $h : X \longrightarrow Z$ اندازه پذیر است.

اثبات. به قضیه ۱۲.۱ [۲۲] مراجعه کنید.

□

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید $(X, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه پذیر باشد، یک اندازه [۷] روی M تابعی است مانند $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ به طوری که:

الف) $\mu(\emptyset) = 0$.

ب) اگر $\{E_i\}_1^\infty$ دنباله ای از مجموعه های دو به دو جدا از هم در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه:

$$\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^n \mu(E_j)$$

خاصیت (ب) را خاصیت جمع پذیری شمارا می نامند که به طور وضوح جمع پذیری متناهی را نیز نتیجه می دهد به عبارت دیگر:

اگر $E_1, ..., E_n$ مجموعه های دو به دو جدا از هم در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه:

$$\mu(\bigcup_1^n E_j) = \sum_1^n \mu(E_j)$$

سه تایی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ را فضای اندازه [۸] می نامند.

Measure [۷]

Measure space [۸]