



ساخت نمودارهای ورونوی حساس به زاویه با قطب دور و نزدیک

نگارش

بهرام صادقی بی غم

رسالة دکتری تخصصی
رشته علوم کامپیوتر

استاد راهنما

دکتر علی محدث

تابستان ۱۳۸۷

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بسمه تعالی

تاریخ:

شماره:

فرم اطلاعات پایان نامه کارشناسی - ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: بهرام صادقی بی‌غم
شماره دانشجویی: ۸۳۱۱۳۹۱۰
دانشجوی آزاد ●
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر
بورسیه ○
رشته تحصیلی: علوم کامپیوتر
معادل ○
گروه: علوم کامپیوتر

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: دکتر علی محدث خراسانی
نام و نام خانوادگی:
درجه و رتبه: استادیار
درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: دکتر رامتین خسروی
نام و نام خانوادگی:
درجه و رتبه: استادیار
درجه و رتبه:

عنوان پایان نامه به فارسی: ساخت نمودارهای ورونوی حساس به زاویه با قطب دور و نزدیک

عنوان پایان نامه به انگلیسی: Angle sensitive Voronoi diagrams

نوع پروژه: کارشناسی ○
کاربردی ●
ارشد ○
بنیادی ●
دکترا ○
توسعه‌ای ●
سال تحصیلی: ۱۳۸۷
نظری ○

تاریخ شروع: ۱۳۸۶
تاریخ خاتمه: تابستان ۱۳۸۷
تعداد واحد:
سازمان تأمین کننده اعتبار: --

واژه‌های کلیدی به فارسی: دیاگرام ورونوی، دیاگرام قطبی، دیاگرام پویا.

واژه‌های کلیدی به انگلیسی: Polar diagram, Voronoi diagram, Dynamic diagram

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات	تصویر	جدول	نمودار	نقشه	واژه‌نامه	تعداد مراجع	تعداد صفحات ضمیمه
زبان متن	فارسی	●	○	○	○	●	فارسی	۲۳
یادداشت		●			○		انگلیسی	
							انگلیسی	

نظرها و پیشنهادهای به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه
استاد:

دانشجو: تخصیص اعتبار برای کاربردی کردن مطالعات تئوری

امضاء استاد راهنما: تاریخ:

۱: ارائه به معاونت پژوهشی به همراه یک نسخه الکترونیکی از پایان نامه و فرم اطلاعات پایان نامه بصورت PDF همراه چاپ چکیده (فارسی انگلیسی) و فرم اطلاعات پایان نامه

۲: ارائه به کتابخانه دانشکده (شامل دو جلد پایان نامه به همراه نسخه الکترونیکی فرم در لوح فشرده طبق نمونه اعلام شده در صفحه خانگی کتابخانه مرکزی) مرکزی

فهرست مطالب

۱	نمودار ورونوی	۱
۵	مثبت‌بندی دلونی و نمودار ورونوی	۱.۱
۷	خواص نمودار ورونوی	۲.۱
۸	الگوریتمهای ساخت نمودار ورونوی	۳.۱
۸	محورهای میانی	۴.۱
۱۱	تعمیم‌هایی از نمودار ورونوی	۵.۱
۱۲	فضای سه بعدی	۱.۵.۱
۱۲	نمودار ورونوی توابع فاصله محدب	۲.۵.۱
۱۵	نمودار ورونوی مراتب بالاتر	۳.۵.۱
۱۶	نمودار ورونوی وزندار	۴.۵.۱
۱۷	تشخیص نمودار ورونوی	۶.۱
۲۰	نمودار قطبی	۲

۲۰	مقدمات	۱.۲
۲۱	نمودار قطبی	۲.۲
۲۲	تعاریف	۱.۲.۲
۲۴	الگوریتم افزایشی	۳.۲
۲۹	نمودار قطبی اشیاء هندسی	۴.۲
۲۹	نمودار قطبی پاره خطها و چندضلعی ها	۱.۴.۲
۳۳	نمودار قطبی دایره ها	۲.۴.۲
۳۵	کاربردهای نمودار قطبی	۵.۲
۳۶	مسائل مربوط به رویت پذیری	۱.۵.۲
۳۸	مسیریابی	۲.۵.۲

۳ نمودار قطبی پویا ۴۲

۴۲	مقدمات	۱.۳
۴۳	دوگان نمودار قطبی	۲.۳
۴۴	رسم دوگان منقبض شده نمودار قطبی	۳.۳
۴۸	نمودار قطبی پویا	۴.۳
۴۸	حذف یک سایت	۱.۴.۳
۵۰	اضافه کردن یک سایت	۲.۴.۳
	کاربردی دیگر از دوگان منقبض شده نمودار قطبی:	۵.۳
۵۷	پوسته محذب	

۴ نمودار قطبی با قطب نزدیک ۶۰

۶۰	مقدمات	۱.۴
۶۰	نمودار قطبی با قطب نزدیک	۱.۱.۴
۶۶	نمودار قطبی اشیاء هندسی نسبت به قطب نزدیک	۲.۴
	نمودار قطبی پاره خطها و چند ضلعی	۱.۲.۴
۶۶	های ساده نسبت به قطب نزدیک	۲.۲.۴
	نمودار قطبی دایره ها نسبت به قطب	۲.۲.۴
۷۰	نزدیک	
۷۱	دوگان <i>NPPD</i>	۳.۴
۷۴	کاربردها	۴.۴
۷۵	طراحی اشکال زینتی	۱.۴.۴

۵ نتیجه گیری و کارهای آینده ۷۷

۶ ضمایم: الگوریتمهای رسم نمودار ورونوی ۸۰

۸۰	روش افزایشی	۱.۶
	رسم نمودار ورونوی با استفاده از تقاطع نیم صفحه ها	۲.۶
۸۲	در فضای با بعد بالاتر	
۸۴	روش تقسیم و غلبه	۳.۶
۸۶	ادغام دیاگرامهای ورونوی	۱.۳.۶

۸۸ محاسبه خط جداکننده ۲.۳.۶

۸۹ روش فرچون (جارو کردن صفحه) ۴.۶

قدردانی

اینک که به لطف خداوند متعال، نگارش این پایان نامه به اتمام رسیده است بر خود لازم می‌دانم تا از بزرگوارانی که در انجام و به پایان رساندن این پایان نامه مرا یاری نموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را نمایم.

از استاد بزرگوارم، جناب آقای دکتر محدث که در طول این مدت همواره مشوق بنده بوده و مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند کمال تشکر را دارم. از این استاد ارجمندم علاوه بر مباحث ارزنده علم شیرین هندسه محاسباتی، اخلاق و الفبای مدیریت نیز یاد گرفته‌ام و به خاطر این موارد و تمام فرصتهایی که در زندگی برایم ایجاد کرده است صمیمانه سپاسگذارم. از استاد مشاورم جناب آقای دکتر رامتین خسروی و اعضای محترم داوران آقایان پروفسور حجت کاشانی، دکتر رزازی، دکتر شفيعی، دکتر نوذری، دکتر دیده‌ور و سایر بزرگواران که قبول زحمت نموده، در جلسه دفاعیه شرکت کرده و مرا از راهنماییهای بزرگوارانه‌اشان برخوردار نموده‌اند نیز متشکرم.

از همکلاسی‌های گرامیم سرکار خانم دکتر اسکندری و سرکار خانم دکتر نیلفروشان نیز به خاطر همفکری‌های علمی و نیز راهنمایی‌هایشان تشکر می‌کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم که از تمام اعضای محترم گروه علمی الگوریتم و هندسه محاسباتی دانشگاه به دلیل فضای علمی صمیمی که به وجود آورده‌اند سپاسگذاری کنم و آرزو مندم همواره عضوی از این گروه که اولین جامعه رسمی این علم نوین و بانی سمینارهای مرتبط در ایران هست باقی بمانم.

از کلیه پرسنل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر که هر کدام به نوعی در تهیه این پایان نامه مرا مورد لطف خویش قرار داده‌اند نیز متشکرم.

ساخت نمودارهای ورونوی حساس به زاویه با قطب دور و نزدیک

چکیده

در این پایان نامه پس از بررسی مساله نمودار ورونوی به چند روش حل این مساله و همچنین به معرفی دوگان این مساله و کاربردهای آن می پردازیم. پس از معرفی نمودار ورونوی به ارایه تعمیم های مختلفی از آن پرداخته می شود و بحث را با تکیه بر تعمیم های خاص نمودار ورونوی پی می گیریم که زاویه در این تعمیم ها نقش دارد.

دو نوع تعمیم در رابطه مذکور قبلا مطالعه شده است که آنها را در ادامه رساله بررسی می کنیم و از این میان به بررسی دقیق و کامل یکی از آنها با نام نمودار قطبی می پردازیم. این نوع نمودار همان نمودار ورونوی است که در آن متر اقلیدسی فاصله با معیار زاویه جایگزین شده است و ملاک داشتن کمترین زاویه قطبی تعیین کننده شکل نمودار است.

پس از مطالعه کامل نمودار قطبی و ارایه الگوریتم رسم و کاربردهای آن به معرفی و بررسی مسایل جدید در این رابطه می پردازیم که حاصل مطالعه و نتایج اصلی این رساله دکتری هستند. نتایج جدیدی که در این رساله بدست آمده و معرفی می شوند به صورت زیر هستند.

در ابتدا دوگان نمودار قطبی تعریف می شود و سپس حالت خاصی از دوگان با نام دوگان منقبض شده معرفی می گردد. سپس با ارایه الگوریتمی برای رسم دوگان منقبض شده نمودار قطبی کار را پی می گیریم. از این مفهوم و الگوریتم مرتبط با آن در بخش بعدی استفاده می کنیم که به مساله نمودار قطبی پویا معروف است. از آنجایی که در این مساله جدید پس از رسم نمودار قطبی اولیه سایتهای جدیدی به آن اضافه و یا از آن حذف می شد بنابراین می توان این مساله را مساله نمودار قطبی لحظه ای (یا در لحظه) نامید. پس از معرفی مساله ضمن بررسی راه های مختلف حل آن، الگوریتم قابل قبولی برای مساله نمودار قطبی پویا ارایه می کنیم.

در فصل بعدی این رساله تعمیمی به مفهوم نمودار قطبی ارایه می‌شود و در آن سعی می‌کنیم نمودار قطبی را به صورتی کلی‌تر تعریف کنیم که نمودار قطبی که قبلاً مطرح شد حالت خاصی از آن است. در نمودار قطبی جدید قطب در هر موقعیتی می‌تواند قرار داشته باشد. محدودیت قبلی که در آن قطب در سمت چپ سایتها و در $-\infty$ قرار دارد حذف می‌شود. در این رساله نمودار قطبی با قطب نزدیک تعریف می‌شود و سپس الگوریتمی بهینه برای رسم این نمودار برای نقاط در صفحه ارایه می‌کنیم. در قسمت دیگر به معرفی چند کاربرد مهم این نمودار می‌پردازیم. این کاربردها عمدتاً به مسایل مختلفی در بینایی، رویت پذیری و تولید برخی اشکال تزئینی مربوط می‌شود. نحوه حل مساله پوسته محدب با استفاده از این نوع نمودار قطبی نیز در این رساله مطرح می‌شود که می‌توان آن را روش بهینه دیگری برای حل مساله پوسته محدب دانست.

در ادامه موضوع دوگان و دوگان منقبض شده را برای نمودار قطبی با قطب نزدیک تکرار می‌کنیم و ضمن تعریف این مسایل، الگوریتم‌های رسم آنها را نیز ارایه می‌نماییم. در قسمت نهایی رساله مساله نمودار قطبی با قطب نزدیک در مورد برخی اشیا مهم هندسی مانند پاره‌خطها، چند ضلعی‌های ساده و دایره‌ها بررسی می‌شود.

مقدمه

مسئله نمودار ورونوی بدلیل کاربردهای پراهمیت و ملموس خود از دیرباز مورد توجه پژوهندگان بوده است و در جهت افزایش کاربردهای آن تعاریف دیگری به صورت تعمیم‌های نمودار ورونوی ارایه شده است. در این رساله سعی می‌شود به معرفی تعمیم‌های خاصی از این مساله پرداخته شود که زاویه اصلی ترین معیار آن است. همچنین بهبودهایی در آن زمینه‌ها و معرفی نوع جدیدی از آنها از اهداف اصلی این رساله است.

مطالعاتی در این زمینه در حدود سالهای ۱۹۹۷ میلادی توسط اُسوین آیچولزر^۱ و همکارانش صورت گرفت که نتیجه پژوهش ایشان ابتدا در سال ۱۹۹۷ در سیزدهمین کنفرانس هندسه محاسباتی با نام «نمودار ورونوی برای فواصل حساس به جهت» ارائه شد و این کار پس از نهایی شدن با عنوان «نمودارهای ورونوی کج^۲» در سال ۱۹۹۹ به چاپ رسید [۸]. در آن مقاله نمودار ورونوی در صفحه‌ای شیبدار بحث شده است. هر نقطه از صفحه دارای ارتفاع خاص خود است و فواصل بین نقاط با استفاده از متر اقلیدسی بدست نمی‌آید. تعمیم دیگری از نمودار ورونوی که در آن زاویه نقش اساسی داشت با نام نمودار قطبی^۳ ارائه شده است. لیدیا اُرتگا^۴ و همکارانشان پس از مطالعات اولیه به ارائه چند سخنرانی و بیان مساله و کاربردهای آن در چند کنفرانس پرداختند که برخی از آنها در اسپانیا و

¹Oswin Aichholzer

²Skew Voronoi diagram

³Polar Diagram

⁴Lidia Ortega

به زبان اسپانیایی است. سپس در سال ۲۰۰۵ در مقاله‌ای با عنوان کشف برخورد‌ها با استفاده از نمودار قطبی^۵ به طور کامل به تشریح مساله، ارایه الگوریتمی بهینه ($O(n \log n)$) برای حل آن و کاربردهایی از آن پرداختند [۹]. آنها در این مقاله در مورد نمودار قطبی پاره‌خط‌ها و چندضلعی‌ها نیز بحث کردند. این گروه کاربردهای دیگری نظیر یافتن پوسته محدب برای n نقطه داده شده در صفحه و برخی مسائل بینائی را در مقاله دیگری در سال ۲۰۰۶ با عنوان یک کاشیکاری جدید دو بعدی برای مسایل مربوط به زاویه: نمودار قطبی^۶ ارائه کردند [۱۰].

کاربردهای این مساله در مسائل مربوط به رادار و مخابرات ما را برآن داشت که صورت مساله واقعی تری طرح و معرفی کنیم. با توجه به خرابی و از کار افتادن یکباره برخی آنتن‌های مخابراتی و یا رادارها و یا ظهور ناگهانی یک شی و یا حذف آن مساله‌ای را طراحی می‌کند که در این رساله سعی می‌کنیم گامی به طرف آن برداریم. مساله مورد نظر ما مساله نمودار قطبی پویاست. این مساله را می‌توان مساله نمودار قطبی لحظه‌ای^۷ نیز نامید که در هر لحظه یک سایت جدید به آن اضافه شده و یا از آن حذف می‌شود و بیشتر پس از رسم نمودار قطبی اولیه جلوه می‌کند. منظور ما از این مساله این است که چگونه می‌توان یک نمودار قطبی موجود را پس از حذف شدن یک سایت و یا اضافه شدن سایتی جدید، در زمان کوتاهی بهنگام سازی کرد؟ توجه داشته باشید که روش ارائه شده در اینجا در حالتیکه چندین سایت اضافه یا حذف شوند مستقیماً کار نمی‌کند و در چنین شرایطی، این روش باید چندین بار جداگانه روی سایتها اجرا شود.

برای حالت حذف یک سایت مطالعات قبلی وجود ندارد ولی از [۱۰] می‌توان روشی را استنتاج کرد که به حالت اضافه شدن یک سایت جدید پاسخ دهد. ما در روش جدید خود از دوگان منقبض شده نمودار قطبی استفاده خواهیم کرد. این مفهوم مشابه با مباحث نظریه گراف تعریف می‌شود. ما در این رساله قبل از پرداختن به مساله نمودار قطبی پویا

⁵Collision Detection Using Polar Diagrams

⁶A new 2D tessellation for angle Problems: The Polar Diagram

⁷On time

الگوریتمی بهینه برای رسم دوگان منقبض شده نمودار قطبی ارائه می‌کنیم. پس از تعریف و ارائه الگوریتم ترسیم دوگان منقبض شده نمودار قطبی در پی حل مساله نمودار قطبی پویا برآمدیم و این مساله را در زمان قابل قبولی حل کردیم. در مورد روش منتج از [۱۰] و روش جدید با نویسندگان مقاله [۱۰] مکاتبه شد. پس از دریافت نظرات و اعمال نظرات آنها این الگوریتم نهایی شد. پیچیدگی زمانی الگوریتم جدید کمتر از روشهای قبلی است.

در نمودار قطبی، قطب در نقطه‌ای بسیار دور ($-\infty$) و در سمت چپ صفحه قرار دارد. به سادگی و با یک تغییر کوچک در همان مساله و روش حل آن می‌توان مساله را طوری حل کرد که قطب در سمت راست، بالا، پائین و یا هر جهت دیگر باشد. همانطور که ملاحظه خواهد شد این موضوع در یافتن کاربردهای نمودار قطبی کمک می‌کند. اما در تمام حالات مذکور، قطب باید بسیار دور (در بینهایت) باشد تا روش مذکور جواب دهد. چرا که اگر قطب در $-\infty$ نباشد خطوط افقی مذکور در الگوریتم، قسمتی از نمودار نخواهد بود. در ادامه رساله به تعریف کلی‌تر نمودار قطبی می‌پردازیم که نمودار قطبی مذکور در [۱۰] حالت خاصی از آن خواهد بود. سپس به ارائه الگوریتم حل آن پرداخته و در مورد آن بحث می‌کنیم.

در این حالت کلی‌تر قطب در نزدیک سایتها است. در کاربردهای این مساله قطب را در لابلائی سایتها در نظر خواهیم گرفت اما در اینجا بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم قطب در سمت چپ سایتها باشد. در نمودار قطبی مجموعه‌ای از سایتها نسبت به قطب q ، نمودار پیچیده خواهد بود نواحی قطبی غیره‌بند خواهند شد و مرز بین دو ناحیه لزوماً خط راست نیست. تا کنون نتوانسته‌ایم در این مورد پیشرفتی داشته باشیم و آنرا در زمان چندجمله‌ای حل کنیم. برای ساده‌تر شدن مساله یک فرض دیگر به آن اضافه می‌کنیم. این فرض مساله را ساده‌تر می‌کند و با وجود غیرواقعی‌تر شدن مساله، در برخی موارد کاربردهای دیگری به آن می‌افزاید.

فرض: پاره‌خط مستقیم از هر سایت تا قطب مانع دید سایتها دیگر است.

با اضافه کردن این فرض به صورت مساله می‌توان نمودار قطبی n

سایت در صفحه را نسبت به قطب p در زمان $\Theta(n \log n)$ رسم کرد که در این رساله به ارائه این روش می پردازیم. در ادامه این مساله را با روشی پویا حل و در مورد پیچیدگی زمانی آن بحث می کنیم. در این روش یک نیم خط (اشعه) که از قطب به سمت بالای صفحه (شمال) رسم شده است در جهت حرکت عقربه های ساعت چرخیده و به مرور صفحه را پیمایش می کند. در هر مرحله ناحیه جدیدی (برای سایت جدید که اشعه به آن می رسد) رسم می شود. پس از ارایه الگوریتم در مورد پیچیدگی الگوریتم بحث خواهد شد.

در ادامه، مفهوم نمودار قطبی با قطب نزدیک را به حالتی گسترش می دهیم که سایتها بصورت مجموعه ای از اشکال هندسی روی صفحه هستند. این کار را در خصوص پاره خطها، چندضلعی های ساده و دایره انجام خواهیم داد. اشکال پیچیده تر را در مطالعات بعدی می توان مورد بحث و بررسی قرار داد. همانطور که در مورد نقاط هم بحث شد این زمان بهینه است و نمی توان این مساله را در مورد نقاط (و در نتیجه پاره خطها، چندضلعی ها و دایره ها) در زمان کمتری حل کرد. بنابراین این زمان بهینه است.

در قسمت نهایی رساله ضمن بسط موضوع دوگان در مورد نمودارهای قطبی با قطب نزدیک سعی می شود با تغییراتی در مباحث مذکور آنرا برای $NPPD$ بیان کنیم.

تعاریف این قسمت تفاوتی با دوگان نمودار قطبی و دوگان منقبض شده آن ندارد و تفاوتها در الگوریتم رسم دوگان منقبض شده آن می باشد که به بیان این الگوریتم خواهیم پرداخت.

برای n سایت داده شده در صفحه و قطب p در سمت چپ آنها می توان دوگان منقبض شده نمودار قطبی با قطب p را در زمان بهینه $\Theta(n \log n)$ بدست آورد و هر گاه $NPPD$ داده شده باشد این زمان به زمان بهینه $\Theta(n)$ کاهش می یابد.

محاسبه دوگان و دوگان منقبض شده $NPPD$ برای اشیاء هندسی به سادگی میسر نمی شود و تا اینجای تحقیق موفق به این کار نشده ایم و به عنوان مساله باز مطرح است. اما کاربردهای جالبی از این مساله برای اشیاء

هندسی موجود است که سعی می‌شود در فصلهای مربوطه به آنها پرداخته و معرفی شوند.

بطور خلاصه این رساله شامل ۵ فصل اصلی است. در فصل اول نمودارهای ورونوی معرفی شده‌اند و کلیاتی از تعمیم‌های مختلف آن بیان شده است. در فصل دوم تعمیم خاصی از نمودارهای ورونوی به نام نمودار قطبی معرفی شده است و در دو فصل بعدی کارهای جدیدی که در این کار تحقیقی بدست آمده‌اند ارائه می‌گردند. در فصل سوم نمودارهای قطبی پویا و در فصل چهارم نمودارهای قطبی با قطب نزدیک معرفی شده‌اند. در هر مورد الگوریتم رسم آن نیز بیان شده و در خصوص پیچیدگی و صحت الگوریتم بحث شده است. در فصل پنجم نتایج بدست آمده و پیشنهادهایی برای کارهای آینده ارائه شده است.

نتایج بدست آمده:

در رابطه با مطالعات انجام شده در مراحل فوق، مقالات زیر منتشر شده و سه مقاله دیگر نیز به مجلات مرتبط ارسال شده است که لیست آنها نیز در فصل آخر رساله آمده است:

Accepted and published papers:

1. B. Sadeghi Bigham, A. Mohades, Lidia Ortega, *Dynamic Polar Diagram*, Accepted for "Information Processing Letters" Elsevier.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ipl.2008.09.018>
2. B. Sadeghi Bigham, A. Mohades, *Polar Diagram with respect to a Near Pole*, in: 23rd European Workshop on Computational Geometry EWCG07, Austria, (2007) 206-209.
3. B. Sadeghi Bigham, A. Mohades, *The Dual of Polar Diagrams and its Extraction*, in: International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering (ICCMSE) volume 7, Greece, (2006), 451-454.

فصل ۱

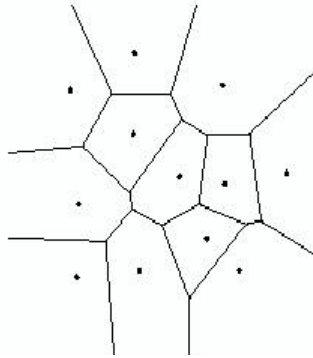
نمودار ورونوی

یکی از مشهورترین و پرکاربردترین مسائل هندسه محاسباتی مساله نمودار ورونوی است. برای اینکه راحتتر بتوانیم این مساله را معرفی کنیم با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. شهری (ناحیه‌ای از صفحه) را در نظر بگیرید که در چند نقطه آن مراکز آتش‌نشانی (سایت) قرار گرفته باشد. در ساده‌ترین حالت فاصله بین هر دو نقطه از این صفحه را همان فاصله اقلیدسی در نظر بگیرید و فرض کنید که هیچ ترافیکی و پستی و بلندی و مانعی در شهر وجود نداشته باشد!! این مراکز آتش‌نشانی یا هر مرکز امدادسانی دیگر را سایت می‌نامیم و توجه داریم که سایت با نقطه تفاوت دارد. در واقع هر موقعیت در صفحه که به منظور سرویسدهی به نقاط دلخواه دیگر انتخاب شده باشد سایت نامیده می‌شود. چرا که منظور از نقطه هر محلی از صفحه (خانه‌های مسکونی و ...) می‌باشد. در صدد هستیم این صفحه را طوری افراز کنیم که حیطة وظیفه هر آتش‌نشانی مشخص شود. اگر نقاط صفحه را با p و n سایت موجود در صفحه را با s_1, s_2, \dots, s_n نشان دهیم در اینصورت ملاک تقسیم بندی به این صورت است که هر نقطه p از صفحه متعلق به ناحیه سایت s_i است اگر و فقط اگر فاصله اقلیدسی p و s_i کمتر از فاصله اقلیدسی p تا هر $s_j; j \neq i$ باشد. نمونه‌ای از این نوع تقسیم بندی را می‌توان در شکل ۱.۱ دید. دو نقطه p و q را در صفحه در نظر بگیرید. همانطور که می‌دانید فاصله اقلیدسی این دو نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

این فاصله همان فاصله متری هست که با آن سر و کار داریم. اکنون مجموعه نقاط

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

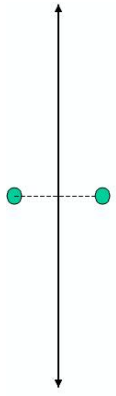


شکل ۱.۱: نمونه‌ای از نمودار ورونوی

در صفحه را در نظر بگیرید. در ادامه بحث به این نقاط سایت خواهیم گفت. جهت درک راحتتر مطلب، بهتر است این نقاط را مانند مراکز آتش‌نشانی، مراکز پلیس، دکلهای مخابرات و یا سایر سرویس‌دهنده‌ها در نظر بگیرید چرا که کار نهائی این سایتها مشابه این مراکز خواهد بود.

برای n سایت داده شده P ، نمودار ورونوی افزای از صفحه است بطوریکه این افزاز شامل n سلول خواهد بود. هر سایت یک سلول منحصر به خود را خواهد داشت با این خاصیت که نقطه دلخواه q از صفحه متعلق به سلول سایت p_i است اگر و تنها اگر $d(p_i, q) \leq d(p_j, q); \forall j \neq i$. سلول متناظر با سایت p_i را با $\mathcal{V}(p_i)$ نشان می‌دهیم و به آن ناحیه ورونوی p_i می‌گوییم. همچنین افزای از صفحه که توسط سایتهای مجموعه P ایجاد می‌شود افزاز ورونوی متناظر با P است و با $\mathcal{V}(P)$ نشان داده می‌شود. بدیهی است که نقاطی از صفحه وجود دارند که فاصله آنها تا دو سایت (و یا بیشتر) مساوی است. مکان هندسی این نقاط همان مرز بین سلولها خواهد شد و این مرزها بصورت پاره‌خطهایی در صفحه هستند که به آنها یال ورونوی می‌گوییم و محل برخورد یالهای ورونوی، راس ورونوی نامیده می‌شود. مجموعه این خطوط شکلی در صفحه پدید می‌آورند که به آن نمودار ورونوی متناظر با P می‌گوییم. ناحیه ورونوی مربوط به سایت p_i را به طور خلاصه می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{V}(p_i) = \{x | d(p_i, x) \leq d(p_j, x) : \forall j \neq i\}$$



شکل ۲.۱: نمودار ورونوی مربوط به دو سایت

حالت خاصی را در نظر بگیرید که فقط دو سایت q و p در صفحه باشند. در اینصورت نمودار این دو سایت همان عمود منصف پاره خط pq خواهد بود (شکل ۲.۱).

عمود منصف پاره خط pq صفحه را به دو نیم صفحه تقسیم می کند که یکی از نیم صفحه ها شامل p و دیگری شامل q است. نیم صفحه ای که شامل سایت p است با $h(p, q)$ و نیم صفحه شامل q با $h(q, p)$ نمایش داده می شود. با این نمادها می توان به نکته قابل لمس زیر رسید.

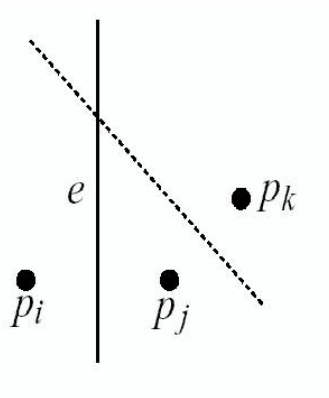
نکته: برای سایت p_i ناحیه ورونوی مربوطه بصورت زیر مشخص می شود.

$$V(p_i) = \bigcap_{i \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j)$$

این نکته بیان می کند که ناحیه ورونوی مربوط به سایت p_i اشتراک $n-1$ نیم صفحه پدید آمده شامل p_i است. لازم به ذکر است که ناحیه ورونوی هر سایت محدب است و این مطلب از نکته اخیر قابل استنتاج است چرا که اشتراک نیم صفحه ها محدب است.

در حالتی که سایتها هم راستا (یعنی سایتها همگی روی یک خط راست) نباشند، هیچ کدام از خطوط نمودار ورونوی خط کامل نخواهند بود و به یکی از دو حالت پاره خط یا نیم خط در می آیند (شکل ۳.۱). این موضوع را در قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه ۱.۰.۱ فرض کنید \mathcal{P} مجموعه ای از n سایت در صفحه باشد. اگر تمام نقاط هم خط باشند آنگاه $V(\mathcal{P})$ شامل $n-1$ خط موازی است. در غیر اینصورت $V(\mathcal{P})$ شامل قطعات بهم متصلی است که هر قطعه آن یک پاره خط یا یک نیم خط است.



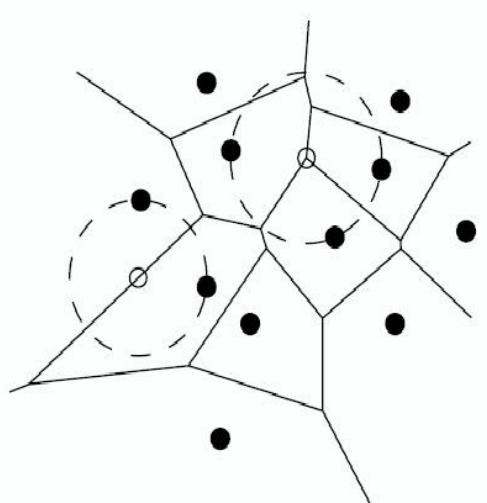
شکل ۳.۱: نمودار ورونوی سایت‌های غیر همخط

برهان. بخش اول قضیه واضح است و بنابراین کافیت فرض کنیم که تمام سایتها P هم خط نیستند. می‌دانیم که خطوطی که در نمودار ورونوی وجود دارند همگی قسمتی از عمود منصف‌ها هستند. حال به عنوان فرض خلف، فرض کنید که یال e از نمودار ورونوی وجود دارد که یک خط کامل است. فرض کنید e همان مرز دو سلول $\mathcal{V}(p_1)$ و $\mathcal{V}(p_2)$ ، باشد و نیز فرض کنید $p_k \in P$ سایتی باشد که با p_j و p_i همخط نیست عمود منصف $p_j p_k$ با e موازی نخواهد بود و در نتیجه در جایی آن را قطع خواهد کرد. قسمتی از e که در داخل $h(p_k, p_j)$ قرار دارد نمی‌تواند روی مرز $\mathcal{V}(p_j)$ قرار گیرد زیرا این قسمت به p_k نزدیکتر است تا به p_j و در نتیجه به یک تناقض می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که e نمی‌تواند یک خط کامل باشد. اکنون کافیت نشان دهیم که $\mathcal{V}(P)$ همبند است. اگر اینگونه نباشد می‌توان گفت که یکی از سلولها مانند $\mathcal{V}(p_i)$ صفحه را به قسمت مجزا تقسیم می‌کند. چون نواحی ورونوی محدب هستند، در اینصورت سلول مربوط به $\mathcal{V}(p_i)$ باید بین دو خط کامل در نمودار ورونوی قرار گیرد ولی در قسمت قبل نشان دادیم که وجود خط کامل در چنین دیاگرامی متغی است. □

شکلی که نهایتاً عنوان نمودار ورونوی n سایت تولید می‌شود بیچیدگی زیادی ندارد و برای $\mathcal{O}(n)$ نقطه داده شده، $\mathcal{O}(n)$ رأس و $\mathcal{O}(n)$ یال ورونوی ایجاد می‌شود. این مطلب را به طور دقیقتر در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۰.۱ برای $n \geq 3$ ، تعداد رئوس نمودار ورونوی n نقطه داده شده در صفحه حداکثر $2n - 5$ و تعداد یالهای ورونوی حداکثر $3n - 6$ است.

در ادامه به تعریف نوعی دایره می‌پردازیم که این دایره ارتباط نزدیکی با نمودار ورونوی نقاط دارد. برای یک نقطه q از نقاط مجموعه P ، بزرگترین دایره تهی



شکل ۴.۱: بزرگترین دایره تهی

متناظر با q را با $C_P(\Pi)$ نشان می‌دهیم. این دایره بزرگترین دایره به مرکز q است که شامل هیچ سایت دیگری از P نباشد. قضیه زیر موارد بیشتری در مورد ارتباط این دایره و نمودار ورونوی مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۰.۱ در یک نمودار ورونوی $\mathcal{V}(P)$ مجموعه نقاط P موارد زیر صحیح هستند:

I: نقطه q یک راس $\mathcal{V}(P)$ است اگر و فقط اگر بزرگترین دایره تهی آن $C_P(q)$ شامل ۳ نقطه یا بیشتر روی مرز خود باشد.

II: قطعه‌ای از عمود منصف بین p_i ، p_j یک یال نمودار ورونوی $\mathcal{V}(P)$ است اگر و فقط اگر نقطه q روی عمود منصف طوری باشد که $C_P(q)$ هم شامل p_i و هم شامل p_j روی کران خود شود و نیز شامل هیچ سایت دیگری نشود. (شکل ۴.۱)

اکنون به جمع‌بندی چند خاصیت مهم نمودار ورونوی می‌پردازیم و به طور خلاصه آنها را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مثلث‌بندی دلونی و نمودار ورونوی

فرض کنید مجموعه نقاط S در صفحه داده شده است. هرگاه تمام پاره‌خط‌های ممکن بین این نقاط را طوری رسم کنیم که هیچ دو پاره‌خطی همدیگر را بجز