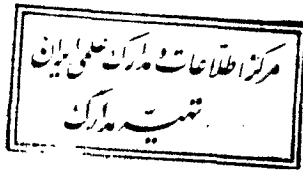




جمهوری اسلامی ایران

وزارت فرهنگ و آموزش عالی

دانشگاه سیستان و بلوچستان



کاربرد فرآیندهای نوسادفی در نظریه صف

علی دلاور خطعی

۱۳۷۲

۱۷۵۳۹

"بسمہ تعالیٰ"

این پایان نامه (پیشکار) بعینہ ان قسمتی از برنامه آموزشی دورہ کارشناسی ارشد ریاضی
 گرایش **تحقیق در عملیات** توسط دانشجو **دلاور خلیفی** تحت راهنمایی
 استاد پایان نامه آقای دکتر **عباسعلی نورانی** ... تهیه شده است. استناد از
 مطالب آن بمنظور اهدا اف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به جوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه
 سیستان و بلوچستان مجاز میباشد.

امضاء دانشجو

علی دلاور خلیفی

این پایان نامه ... و احداثی شناخته میشود و در تاریخ **۲۰۰۹/۰۷/۰۷** توسط هیئت
 داوران بررسی، و شماره **۱۹۰۰** با درجه عالی به آن تعلق گرفت.

۱- استناد راهنما **دکتر عباسعلی نورانی**

۲- داور ۱ **دکتر حبیب الله دهره**

۳- داور ۲ **دکتر سمانه بانو تانا**

۴- ناظر معاونت تحصیلات تکمیلی **دکتر میرزا عطی**

علی

تقدیم به :

پدر بزرگوار و مادر مهربانم که با
تلاش و بردباری ، مشکلات زندگی را بردوش
کشیدند .

چکیده

نظریه صف یکی از مهمترین کاربردهای نظریه احتمالات و فرآیندهای تصادفی است با توجه به اهمیت اجتماعی و اقتصادی صف در زمینه های مهندسی ، مخابرات ، سیستمهای حمل و نقل و کامپیوتر و سیستمهای اجتماعی ، بسیاری از ریاضیدانان از سالهای قبل در این زمینه به تحقیق پرداخته اند و هم اکنون با توجه به توسعه و گسترش روز افزون آن ، تحقیقات گسترده ای در نظریه صف انجام می گیرد .

در این رساله ، یک سیستم صف با چند سرویس دهنده که در آن مشتریها به تعداد تصادفی سرویس دهنده نیاز دارند ، به تفصیل شرح داده شده است . این سیستم صف از مطالعه بر روی سیستم گشت زنی پلیس شهر نیویورک در سال ۱۹۸۰ توسط آل گرین پدید آمد .

شهربانی ممکن است به یک یا چند گشت پلیس نیاز داشته باشد که مدلهای صف ، زمان تاخیر برآورد نیاز را دقیقاً در اختیار می گذارند . گرین در سال ۱۹۸۴ برای نمایش دقیقتر عملیات گشت زنی ، دسته های شامل مشتری با الویت را در مدل خود گنجانید . مدل گرین در سیستمهای کامپیوتری ، ارتباط تلفنی و سرویس اضطراری نیز دارای کاربرد است .

گرین در مقاله دیگری در سال ۱۹۸۰ روشهایی برای احتمال حالت پایدار طول صف و گشتاورهای توزیع زمان انتظار بدست آمد . این روشها بر اساس توابع مولد و تبدیلات لاپلاس استوار هستند . گرین در سال ۱۹۸۱ دیسیپلین سرویس دهی جدیدی را مطرح کرد که از کارائی بالاتری نسبت به FIFO برخوردار می باشد . پس از آن فدرگرن و گرین در سال ۱۹۸۴ مدلی را مورد بررسی قرار داده اند که زمان سرویس دهی در آن از قانون احتمال کلی پیروی می کرد .

روش ماتریس هندسی در سال ۱۹۸۰ توسط ژیلنت برای فرمول بدنی مدل گرین به کار گرفته

شد که در آن شاخصهای مختلف عملیات به صورت ماتریسهای هندسی فرمول بندی گردید .
ژیلنت و لاتک در سال ۱۹۸۳ برای یافتن ماتریس آهنگ R وابسته به مدل ، روش خاصی ارائه نمودند که محاسبات بردار احتمال حالت پایدار را به نحو قابل ملاحظه ای تسهیل نمود .
ایتیماکین و کاؤ در سال ۱۹۹۱ فرمول بندی ماتریس هندسی برای مسئله تدوین نمودند که محاسبات بردار ایستای احتمال را به نحو قابل ملاحظه ای ساده نموده و اساس این رساله نیز بر مبنای کار این دو دانشمند نهاده شده است .

مطالبی که در این مجموعه تدوین گردیده است به اختصار عبارتند از :

در فصل اول مفاهیم اولیه و اساسی سیستمهای صف مورد بررسی قرار می گیرد . در فصل دوم مقدمه ای بر فرآیندهای تصادفی شامل فرآیند مارکوف ، زنجیر مارکوف و قضایایی مربوطه مطرح گردیده است . فصل سوم به طراحی و کنترل صفها اختصاص دارد و شامل مدلهای اقتصادی سود یا هزینه ، بهینه سازی سیستمهای صف ، زمان بندی ورودیها به صف و برنامه ریزی تصادفی است .

زنجیرهای مارکوف با زمان پیوسته (CTMC) که حالت خاصی از فرآیند مارکوف هستند در فصل چهارم به طور کامل ارائه شده است . در فصل پنجم ، سیستم صف با مشتریهایی که به تعداد تصادفی سرویس دهنده نیاز دارند مورد مطالعه قرار می گیرد در این فصل ماتریس آهنگ و فرمول بندی ماتریس هندسی بیان گردیده است و سپس مدل سیستم صف بالا ، به صورت فرآیند شبه تولد - مرگ (QBD) فرمول بندی شده است .

فرمول بندی یک بندر با مفروضات معین و بر حسب هزینه های زمان انتظار و سرویس دهنده ، مثالی از این سیستم صف است که در پایان آورده شده است . برنامه کامپیوتری آن نیز به انضمام نتایج ارائه گردیده است .

پیشگفتار

بسیاری از مدل‌های واقعی که در زمینه «تحقیق در عملیات» مورد مطالعه قرار می‌گیرد، اساساً احتمالی است. بنابراین مطالعه این مدل‌ها از دیدگاه نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی، لازم و ضروری است.

در رساله حاضر «نظریه صف» که یکی از مهمترین زمینه‌های کاربرد نظریه «احتمالات و فرآیندهای تصادفی» است، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

امید آنکه مطالب تدوین شده در این رساله، مورد استفاده علاقمندان به تحقیق در زمینه مذکور قرار گیرد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از کلیه سرورانی که این حقیر را در تهیه مقالات و نگارش مطالب، یاری نموده‌اند علی‌الخصوص جناب آقای دکتر عباسعلی نورا که زحمت تقبل استاد راهنمایی بنده را بر عهده داشته‌اند و همچنین از مرکز محاسبات دانشگاه یزد، بخاطر فراهم نمودن امکان استفاده از بخش کامپیوتر آن مرکز، کمال تشکر و سپاسگذاری را داشته باشم.

علی دلاور خلفی

آذر ۱۳۷۲

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل اول: مفاهیم اولیه نظریه صف
۶	۱-۱ مقدمه
۸	۱-۲ سیستم صف
۸	۱-۲-۱ مشخصات سیستم صف
۱۱	۲-۲-۱ معیارهای ارزیابی
۱۲	۳-۲-۱ نماد صف

فصل دوم: مقدمه ای بر فرآیند تصادفی

۱۳	۱-۲ فرآیند تصادفی
۱۴	۲-۲ فرآیند مارکوف و زنجیر مارکوف
۱۴	۱-۲-۲ فرآیند مارکوف
۱۶	۲-۲-۲ زنجیر مارکوف
۲۲	۳-۲ سیستم صف $M/B(s)/1$
۲۶	۱-۳-۲ میانگین طول صف
۲۶	۳-۲-۲ زمان انتظار
۲۷	۳-۳-۲ تابع توزیع زمان انتظار
۲۸	۴-۳-۲ زمان انتظار صف
۲۸	۴-۲ سیستم صف $E_k/(s)/1$

فصل سوم: طراحی کنترل صفها

۴۰	۱-۳ مقدمه
۴۱	۲-۳ مدل‌های اقتصادی سود یا هزینه
۴۶	۳-۳ بهینه سازی سیستمهای صف

۴۷	۱-۳-۳ تابع هزینہ
۴۹	۴-۳ زمان بندی ورودیها به صف
۵۰	۱-۴-۳ فرمول بندی هدف برای یک سرویس دهنده
۵۱	۳-۴-۳ مدل $S(n)/M/1$
۵۷	۵-۳ برنامه ریزی تصادفی
۶۰	۱-۵-۳ برنامه ریزی تصادفی خطی

فصل ۴: زنجیرهای مارکوف با زمان پیوسته

۷۱	۱-۴ تعاریف
۷۳	۲-۴ تابع و زمان بین گذرها
۸۲	۳-۴ فرآیند تولد و مرگ
۸۴	۴-۴ معادلات پیشرو و پسرو کولموگرف

فصل ۵: سیستم صف با مشتریهای که به تعداد تصادفی سرویس دهنده نیاز دارد

۸۸	۱-۵ مقدمه
۹۰	۲-۵ ماتریس آهنگ و فرمول بندی ماتریس هندسی
۹۸	۳-۵ معرفی مدل
۱۰۹	۴-۵ کار انجام شده
۱۱۳	۵-۵ اجرای کامپیوتری

ضمائم

۱۱۸	ضمیمه ۱: توابع توزیع خانواده نمائی
۱۲۳	ضمیمه ۲: تبدیلات و نماد لیتل
۱۲۶	فهرست منابع
۱۳۰	واژه نامه فارسی-انگلیسی
۱۳۵	واژه نامه انگلیسی-فارسی

فصل اول

مفاهیم اولیه نظریه صف

۱-۱ مقدمه

نظریه صف در زمینه کاربرد احتمالات و فرآیندهای تصادفی از اهمیت خاصی برخوردار است . در سال ۱۹۰۹ که ترافیک تلفنی مشکل آفرین بود ، ارلانگ ریاضیدان دانمارکی مقاله ای با عنوان « تئوری احتمالات و مکالمات تلفنی » انتشار داد . وی در تحقیقات بعدی خود مشاهده کرد که سیستم تلفن به یکی از دو صورت زیر امکان پذیر است :

۱ - سیستم صف با چند سرویس دهنده که در آن فرآیند ورودی به صورت پواسن و زمان سرویس دهی به گونه نمایی است .

۲ - سیستم صف با یک سرویس دهنده که فرآیند ورودی به صورت پواسن و زمان سرویس دهی ثابت است .

مولینا در سال ۱۹۲۷ مقاله ای در زمینه کاربرد احتمالات در خطوط اصلی تلفن منتشر کرد . سال بعد تورونتن فری مقاله ای درباره بسط بیشتر تحقیقات ارلانگ و با عنوان « احتمال و کاربردهای مهندسی آن » انتشار داد . در اوایل سال ۱۹۳۰ پلاک تحقیقات بیشتری پیرامون سیستمهای صف با چند سرویس دهنده ، انجام داد که در آن ورودی به صورت فرآیند پواسن و زمان سرویس دهی از تابع توزیع کلی پیروی می کرد . در این زمان تحقیقات بیشتری نیز در روسیه توسط کولموگورف و خین چین ، در فرانسه به وسیله کراملین و در سوئد توسط پالم به عمل آمد .

رومانی در سال ۱۹۵۷ دسته مدل‌های صف ، مربوط به سیستم‌هایی که دارای آهنگ سرویس دهی متغیر بودند را در نظر گرفت . مودر و فیلیپس در سال ۱۹۶۲ مدل رومانی را تعمیر دادند . در مدل آنها تعداد معینی سرویس دهنده که همیشه در دسترس است در نظر گرفته شده بود و چنانچه طول صف از مقدار بحرانی تجاوز می کرد ، سرویس دهنده های دیگر به سیستم افزوده می شدند . یادین و نئور در سال ۱۹۶۷ مدل مودر - فیلیپس را با فرض اینکه آهنگ سرویس دهی با نظارت تصمیم گیرنده قابل تغییر است ، تعمیر دادند . هیمان در سال ۱۹۶۸ مدل وابسته - حالت M/G/1 (سیستم صف با یک سرویس دهنده که در آن فرآیند ورودی به صورت پواسن و زمان سرویس دهی از تابع توزیع کلی پیروی می کند) را مورد بررسی قرار داد و دو آهنگ سرویس دهی صفر و $\frac{1}{2}$ را در نظر گرفت . سوبل در سال ۱۹۶۹ مدل هیمان را به سیستم GI/G/1 (سیستم صف با یک سرویس دهنده که در آن فرآیند ورودی و زمان سرویس دهی از تابع توزیع کلی پیروی می کند) تعمیر داد . بعلاوه یک ساختار کلی تر برای هزینه فرض نمود . براس در سال ۱۹۷۰ مدل دو آهنگی برای سرویس دهی را مورد مطالعه قرار داد ، در این مدل ، سیستم در بازه های زمانی با فاصله کوچک مساوی ، مشاهده می گردد و در هر بازه زمانی پس از مشاهده اندازه سیستم ، در رابطه با استفاده از آهنگ سرویس دهی برای بازه زمانی بعدی تصمیم گیری می شود . کاربیل در سال ۱۹۷۲ سیستم صف M/M/1 (سیستم صف با یک سرویس دهنده که در آن فرآیند ورودی به صورت پواسن و زمان سرویس دهی به صورت نمایی است) را با K آهنگ سرویس دهی متمایز که در آن K متناهی است ، مورد بررسی قرار داد .

روند تحقیقات پیرامون نظریه صف همچنان ادامه دارد با وجود این نظریه صف در آغاز به صورت یک موضوع

بسیار کاربردی مطرح شد اما در مقالات اخیر بیشتر جنبه نظری دارند .

۱-۲ سیستم صف

آنچه در سرویس دهی آزار دهنده است ، انتظار در صف و اتلاف وقت مشتریها است . متأسفانه این پدیده روز به روز در مراکز شهری فراگیر تر می شود . از آنجمله می توان از صفهای ترافیک شهری و همچنین صفهای که در فرودگاهها ، بنادر و موسسات مخابراتی تشکیل می گردند ، نام برد .

از بین بردن نتایج رنج آور انتظار در صف ، بدون شناخت خصایص این پدیده امکان پذیر نیست . نظریه صف که به مطالعه صفها از دیدگاه ریاضی می پردازد ، عوامل ایجاد صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می کند . اگر چه هیچگاه نمی توان صف را کاملاً از میان برد اما می توان ضایعات ناشی از آنرا کاهش داد .

۱-۲-۱ مشخصات سیستم صف

مشخصه های مهم سیستم صف عبارتند از :

- ۱- نحوه ورود مشتریها .
- ۲- نحوه سرویس دهی سرویس دهنده ها .
- ۳- دیسپلین صف .
- ۴- ظرفیت صف .
- ۵- تعداد سرویس دهنده های موازی .
- ۶- تعداد سرویس دهنده های سری .

این شش مشخصه به طور کامل سیستم صف را تشریح می کند و از اینرو به طور جداگانه هر کدام را مورد

بحث قرار می دهیم .

نحوه ورود مشتریها :

نحوه ورود مشتریها به یک سیستم صف اغلب بر حسب متوسط ورودیها در واحد زمان یا بر حسب متوسط زمان بین دو ورودی متوالی اندازه گیری می گردد . چون این مقادیر کاملا با هم در ارتباط هستند از اینرو با داشتن یکی از ایندو می توان نحوه ورود مشتریها را توصیف نمود . حال با توجه به اینکه زمان ورود مشتریها معمولا ماهیت تصادفی دارد ، بدیهی است که زمانهای بین دو ورود متوالی نیز متغیرهای تصادفی هستند .

برای بررسی دقیق رابطه های ریاضی حاکم بر سیستم صف ، ابتدا فرض می کنیم که زمان بین دو ورود

متوالی T باشد و تابع توزیع این متغیر تصادفی با $A(t)$ نشان می دهیم پس

$$A(t) = P(T \leq t)$$

یک کمیت مفید برای بررسی نحوه ورود مشتریهای به صف تعیین آهنگ ورود آنها است که میانگین تعداد

مشتریهایی می باشد که در واحد زمان وارد سیستم می شوند و معمولا آنرا با λ نشان می دهند .

مشتریها ممکن است به صورت انفرادی یا گروهی وارد شوند . زمانی که مشتریها به صورت گروهی وارد

سیستم می شوند نه تنها ممکن است زمان بین ورود دو گروه متوالی ، تصادفی باشد بلکه تعداد مشتریها در هر گروه نیز تصادفی است .

مشتری در لحظه ورود به سیستم ممکن است بدون توجه به طول صف وارد آن گردد و یا اینکه صف به اندازه ای

طولانی باشد که از ورود به آن منصرف گردد . اگر مشتری در لحظه ورود ، از داخل شدن به صف منصرف گردد به

وی مشتری انصرافی گویند . درحالت دیگر مشتری وارد صف می گردد و پس از مدتی حوصله اش به سر می آید و

سیستم را ترک می کند که به وی مشتری تارک می گویند هنگامی که چند صف به صورت موازی باشند ،

مشتریها به منظور کاهش زمان انتظار ، ممکن است از یک صف به صف دیگر بروند که به این ها مشتریهای عجول

گویند .

نحوه سرویس دهی سرویس دهندگان

اغلب مباحث مربوط به نحوه ورودی را می توان در مورد نحوه سرویس دهی نیز بیان نمود تفاوت عمده بین نحوه ورودی و نحوه سرویس دهی در زمان سرویس دهی و آهنگ سرویس دهی است. زیرا این دو مشخصه هنگامی که سیستم خالی نباشد، با معنی است. مدت زمان سرویس دهی معمولاً ماهیت تصادفی دارد و لذا برای محاسبه معیارهای ارزیابی سیستم، تابع توزیع آنها باید معلوم باشد. فرض کنید متغیر تصادفی X مدت زمان سرویس دهی و $B(x)$ تابع توزیع آن باشد. پس

$$B(x) = P(X \leq x)$$

ضمناً سرویس دهی به صورت انفرادی یا گروهی نیز انجام می گیرد. گاهی آهنگ سرویس دهی به تعداد مشتریهای صف بستگی دارد یعنی سرویس دهنده با مشاهده طولانی بودن صف، سریعتر کار می کند. چنین وضعیتی را سرویس دهی وابسته - حالت گویند.

دیسپلین صف

دیسپلین صف الگوریتم تخصیص مشتریها از صف به سرویس دهنده است. دیسپلینهای متداول، عبارتند از « هر کس زودتر آمد زودتر سرویس دریافت می کند »، « هر کس دیرتر آمد زودتر سرویس دریافت میکند »، « انتخاب مشتری به صورت تصادفی و مستقل از زمان ورود به صف ».

الویت در سرویس دهی به بعضی از مشتریها، یکی از مباحث مهم نظریه صف است. با توجه به اهمیت مشتریهای متفاوت سیستم، الویت های گوناگونی در نظر گرفته می شود. بعضی مشتریها ممکن است دارای الویتی باشند که با ورود به سیستم، سرویس دهی آنها آغاز گردد حتی اگر لازم باشد سرویس دهی مشتری فعلی متوقف شود. الویت بعضی دیگر ممکن است به این صورت باشد که مشتری ورودی در صورت مشغول بودن سرویس دهنده، منتظر می ماند و سپس سرویس دریافت می کند.

ظرفیت صف

ظرفیت صف حداکثر تعداد ممکن مشتری های است که در صف قرار می گیرد . ظرفیت صف متناهی یا نامتناهی است . محدودیت فضای داخل سیستم ایجاب می کند که ظرفیت صف محدود باشد و فرآیند ورود مشتریهای به صف تا زمانی که طول صف کمتر از ظرفیت آن باشد ، ادامه خواهد یافت .

تعداد سرویس دهنده های موازی

تعداد سرویس دهنده در کارآئی سیستم موثر است این سرویس دهنده ها به صورت موازی و مستقل از یکدیگر به مشتریها سرویس می دهند . بعضی سیستمها دارای یک صف و چند سرویس دهنده و بعضی دیگر برای هر سرویس دهنده یک صف مجزا دارند .

تعداد سرویس دهنده های متوالی

بعضی سیستمهای صف دارای چند سرویس دهنده متوالی هستند به طوری که هر کدام از آنها سرویس متفاوتی انجام می دهد و مشتری باید از هر کدام آنها سرویس دریافت کند .

۱-۲-۲ معیارهای ارزیابی سیستم صف

بررسی عملکرد سیستم صف بر اساس معیارهای زیر انجام می گیرد .

۱- طول صف یا تعداد مشتریهایی که داخل سیستم هستند .

۲- زمان انتظار مشتری در صف یا سیستم

۳- در صد زمانی که سیستم به علت نبودن مشتری بی کار است .