دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های تکراری AOR پیش‌حالت‌ساز شده برای M-ماتریس‌ها

استاد راهنما

دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهمراد

پژوهشگر

عباس بهزادی‌پور

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: بهزادی‌پور   نام: عباس

عنوان: روش‌های تکراری AOR پیش‌حالت‌ساز شده برای M-ماتریس‌ها

استاد راهنما: دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۹۰

واژگان کلیدی: دستگاه خطی، پیش‌حالت‌ساز، همگرایی، روش تکراری AOR، M-ماتریس

چکیده

دستگاه‌های خطی با ماتریس ضرایب M-ماتریس با بعد بزرگ در زمینه‌های مختلف علوم مانند فیزیک، مسائل عمران شبیه مقاومت مصالح، برق، زیست شناسی و... ظاهر می‌شوند. در این پایان نامه، حل دستگاه خطی $Ax = b$ با استفاده از روش تکراری دو پارامتری پیش‌حالت‌ساز شده با ماتریس پیش حالت ساز $P = I + L + U$ که در آن A یك M-ماتریس یا L-ماتریس است، ارائه می‌شود. سپس با ارائه قضایای مقایسه‌ای نشان داده می‌شود که ماتریس پیش‌حالت‌ساز جدید، سرعت همگرایی روش AOR را افزایش می‌دهد. سپس برای نشان دادن کارایی روش، نتایج حاصله را با نتایج حاصل از روش‌های پیش‌حالت‌ساز شده‌ی مطرح شده‌ی پیشین، مقایسه می‌کنیم.

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدرم، مادرم

و

برادرم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر قدرت عبادی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر کریم ایواز که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و این رساله را در کمال صبر و حوصله مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که همواره بهترین پشتیبان من هستند.

عباس بهزادی پور

۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر کارهای محاسباتی از همان اهمیت کارهای نظری و تجربی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی برخودار گشته است. از زمانی‌که روش‌های مستقیم برای حل دستگاه‌های خطی بزرگ غیرممکن به‌نظر رسید، حل دستگاه‌های خطی بزرگ توسط روش‌های تکراری مطرح شد و این ایده، ایده‌ی جدیدی نیست و حداقل به زمان گاوس[۱] برمی‌گردد. روش‌های تکراری برای حل دستگاه خطی عموماً توسط گاوس، لیویل[۲] و ژاکوبی[۳] با یک هدف کاملاً متفاوت از روش‌های مستقیم، مانند روش حذفی گاوس پدید آمد.

در این پایان‌نامه ضمن معرفی روش‌های تکراری، روش تکراری AOR[۴] که توسط حاجیدیموس[۵] در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای با همین عنوان منتشر شد، برای M-ماتریس‌ها و H-ماتریس‌ها مورد توجه و بررسی بیشتری قرار می‌دهیم.

در فصل اول پایان‌نامه به ارائه‌ی تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.
در فصل دوم، دستگاه‌های خطی را بررسی کرده و روش‌های مستقیم و تکراری را برای حل آن‌ها بیان می‌کنیم.
در فصل سوم، چند روش تکراری AOR پیش‌حالت‌ساز شده معرفی کرده و همچنین سرعت همگرایی آن‌ها باسرعت همگرایی روش تکرار معمول AOR با هم مقایسه می‌کنیم.
در فصل چهارم نیز روش‌های تکراری AOR پیش‌حالت‌ساز شده را با روش تکراری AOR، با شرایط در نظر گرفته شده در فصل سوم، با ارائه‌ی مثال‌هایی با هم مقایسه می‌کنیم.
این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی [۱۶] تهیه شده است.

[۱] Gauss(1823)
[۲] Liouville(1837)
[۳] Jacobi(1845)
[۴] Accelerated Overrelaxation Method
[۵] Apostólos Hadjidimos

۲.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش به تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم.

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه مرتب از اعداد حقیقی یک**بردار** نامیده می‌شود. خود اعداد **مؤلفه‌های** بردار نامیده می‌شوند، یک حرف کوچک معمولاً برای نشان دادن یک بردار استفاده می‌شود. یک بردار n مؤلفه‌ای v دارای شکل زیر است:

$$\mathrm{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۲.۲.۱. گردایه‌ای از n بردار در $\mathbb{R}^n$ و مرتب شده در یک آرایه مستطیلی m سطری و n ستونی یک **ماتریس** نامیده می‌شود. بنابراین یک ماتریس A دارای شکل زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس $A=(a_{ij})$را از مرتبه $m \times n$ را یک ماتریس **قطری**گوییم هرگاه برای $i \neq j$، $a_{ij}=0$ و با $A=diag(a_{11},\dots,a_{ss})$ نشان داده می‌شود که در آن $s=min(m,n)$.

تعریف ۴.۲.۱. **ترانهاده**ی یک ماتریس A از مرتبه‌ی $m \times n$ با A^T نشان داده می‌شود و آن، ماتریسی از مرتبه‌ی $n \times m$ است که با تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس A به‌دست می‌آید.

$$A^T=(a_{ji}) \quad i=1,2,3,\dots,n \quad j=1,2,3,\dots,m$$

تعریف ۵.۲.۱. ماتریس A **متقارن** نامیده می‌شود اگر $A^T=A$.

تعریف ۶.۲.۱. همواره برای دو ماتریس A ، $m \times n$ و B، $n \times p$ داریم:

$$(AB)^T=B^TA^T$$

تعریف ۷.۲.۱. اگر بتوان ماتریس A را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

افراز کرد، در این صورت گوییم A یک ماتریس **بلوکی** است.

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس $n \times n$، A را ماتریس **قطری بلوکی** گوییم هرگاه هر عنصر قطری آن، یک ماتریس مربعی باشد و سایر درایههای آن همگی برابر صفر باشند و به‌صورت

$$A = diag(A_{11}, \dots, A_{kk})$$

نشان داده می‌شود که در آن A_{ii}ها ماتریس‌های مربعی هستند.

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس A راماتریس **تنک** گوییم هرگاه بیشتر درایه‌هایش صفر باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. گوییم ماتریس A از مرتبه‌ی $n \times n$ **معکوس‌پذیر** است اگر یک ماتریس Bاز مرتبه‌ی $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$AB = BA = I$$

و آن را با A^{-1} نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. ماتریس A را **نامنفرد** گوییم هرگاه وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. برای هر ماتریس A از مرتبه‌ی $m \times n$ دو زیر فضای وابسته‌ی مهم وجود دارد: **برد** A که با R(A) و**فضای پوچ** A که با N(A) نشان داده می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m | b = AX, X \in \mathbb{R}^n\}$$
$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = 0\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید A ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ باشد. زیر فضای به‌وجود آمده توسط بردارهای سطری A **فضای سطری** A نامیده می‌شود. زیر فضای به‌جود آمده توسط ستون‌های A **فضای ستونی** A نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۴. **رتبه‌ی** ماتریس A بعد فضای ستونی A می‌باشد و با $rank(A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۵. ماتریس مربعی $n \times n$، A را **نامنفرد** گوییم اگر $rank(A) = n$ باشد. در غیر این صورت ماتریس A را منفرد گوییم.

تعریف ۱.۲.۱۶. گوییم ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با $m \geq n$ دارای **رتبه‌ی کامل** است اگر داشته باشیم $rank(A) = n$. در غیر این صورت گوییم ماتریس A دارای **رتبه‌ی ناقص** است.

تعریف ۱.۲.۱۷. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را یک ماتریس **بالامثلثی** گوییم اگر به ازای $i > j$، $a_{ij} = ۰$. ترانهاده‌ی ماتریس بالامثلثی، **پایین‌مثلثی** است، یعنی به ازای $i < j$، $a_{ij} = ۰$.

تعریف ۱.۲.۱۸. ماتریس $n \times n$، P را **جایگشتی** گوییم هرگاه در هر سطر و ستون آن فقط یک عنصر ۱ وجود داشته باشد و سایر درایه‌های آن صفر باشند.

تعریف ۱.۲.۱۹. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را یک ماتریس **بالاهسنبرگی** گوییم اگر به ازای $i > j + ۱$، $a_{ij} = ۰$. ترانهاده‌ی ماتریس بالاهسنبرگی، **پایین‌هسنبرگی** است، یعنی به ازای $j > i + ۱$، $a_{ij} = ۰$.

تعریف ۱.۲.۲۰. ماتریس مربعی را که هم بالاهسنبرگی و هم پایین‌هسنبرگی باشد ماتریس **سه‌قطری** گوییم.

تعریف ۱.۲.۲۱. ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را **غالب قطری سطری** گوییم هرگاه به ازای تمامی مقادیر i داشته باشیم:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

مشابهاً ماتریس A را **غالب قطری ستونی** گوییم هرگاه به ازای تمامی مقادیر j داشته باشیم:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} |a_{ij}|.$$

تعریف ۱.۲.۲۲. ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را **غالب قطری ضعیف** است اگر

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \quad j = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$$

تعریف ۲۳.۲.۱. ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را **غالب قطری قوی** گوییم هرگاه

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|, \quad j=1,2,3,\dots,n$$

تعریف ۲۴.۲.۱. ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را **مثبت معین** گوییم هرگاه

$$\forall x\in \mathbb{R}^n, x\neq 0 \Rightarrow x^TAx>0$$

تعریف ۲۵.۲.۱. ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را **نیمه مثبت معین** گوییم هرگاه

$$\forall x\in \mathbb{R}^n, x\neq 0 \Rightarrow x^TAx\geq 0$$

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. گوییم λ یک **مقدار ویژه‌ی** A است، اگر یک بردار مخالف صفر x یافت شود به طوری که

$$AX=\lambda x$$

یا

$$(A-\lambda I)x=0.$$

بردار xرا **بردار ویژه‌ی** A وابسته به مقدار ویژه‌ی λ گوییم. همچنین(λ, x) را یک جفت ویژه‌ی A نامیم.

گزاره ۲۷.۲.۱. *دستگاه همگن $(A-\lambda I)x=0$ دارای جواب غیر بدیهی است اگر و فقط اگر*

$$det(A-\lambda I)=0.$$

تعریف ۲۸.۲.۱. چندجمله‌ای $P_A(\lambda)=det(A-\lambda I)$ را که یک چندجمله‌ای بر حسب λ و از درجه‌ی n می‌باشد، **چندجمله‌ای مشخصه‌ی** A گوییم. بنابراین n مقدار ویژه‌ی A، n ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن هستند.

تعریف ۲۹.۲.۱. مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A،**طیف** A نامیده می‌شود.

قضیه ۳۰.۲.۱. *فرض کنید λ_1، λ_2، ...، λ_n مقادیر ویژه‌ی ماتریس A باشند. آن‌گاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس A^m عبارتند از λ_1^m، λ_2^m، ...، λ_n^m.*

برهان. رجوع شود به [۴]. □

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. آن‌گاه نرم برداری که به صورت $||x||$ نشان داده می‌شود، یک تابع پیوسته از مؤلفه‌های x_1، x_2، ...، x_n از x با مقدار حقیقی تعریف شده بر روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که دارای خواص زیر است:

$$||.|| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

(۱) $||x|| \geq 0$ ، $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(۲) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

(۳) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که توابع زیر، نرم‌های برداری هستند.

(۱) $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n|$ (نرم مجموع یا نرم یک)

(۲) $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$ (نرم اقلیدسی یا نرم دو)

(۳) $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم)

درحالت کلی، اگر p عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، p-نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||x||_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد، مشابه با نرم برداری، نرم ماتریسی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||.|| : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

(۱) $||A|| \geq 0$ ،$||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(۲) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$

(۳) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $x \in \mathbb{R}^{n}$ باشد، نرم القایی ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A||_p = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p}$$

تعریف ۳۴.۲.۱. دو p-نرم که از لحاظ محاسبه ساده‌ترین هستند، عبارتند از:

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(نرم مجموع ستونی ماکزیمم)}$$

$$||A||_\infty = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(نرم مجموع سطری ماکزیمم)}$$

تعریف ۳۵.۲.۱. گوییم دنباله‌ی $\{V^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ (که $V^{(k)}$ها بردارند) به بردار V همگراست هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} V_i^{(k)} = V_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

که در آن V_i مؤلفه‌ی iام بردار V می‌باشد. مشابهاً گوییم دنباله‌ی ماتریسی $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$، به ماتریس $A = (a_{ij})$ همگراست هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

قضیه ۳۶.۲.۱. *دنباله‌ی ماتریسی* $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ *همگرا به ماتریس صفر است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار ویژه‌ی* λ_i *از* A *،* $|\lambda_i| < 1$ *.*

برهان. [۴] برای هر ماتریس A از مرتبه‌ی $n \times n$ یک ماتریس منفرد T وجود دارد به قسمی که:

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix} \tag{۲.۱}$$

که در آن J_i به شکل زیر می‌باشد:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

با محاسبه‌ی ساده داریم:

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

بنابراین $J_i^k \to 0$ اگر و تنها اگر $|\lambda_i| < 1$. از طرف دیگر با توجه به روابط بالا

$$T^{-1}AT = J \Leftrightarrow A = TJT^{-1} \Leftrightarrow A^2 = TJ^2T^{-1} \Leftrightarrow A^k = TJ^kT^{-1}$$

حال اگر $k \to \infty$ داریم:

$$J^k \to 0 \Leftrightarrow A^k \to 0.$$

□

قضیه ۳۷.۲.۱. *فرض کنید* A *یک ماتریس مربعی و* $||.||$ *نرم القایی باشد. هم‌چنین* λ *یک مقدار ویژه‌ی دلخواه* A *باشد. آن‌گاه* $\lambda \leq ||A||$ *.*

برهان. [۴] فرض کنید λ مقدار ویژه‌ی دلخواه A و x بردار ویژه‌ی متناظر آن باشد. داریم:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow ||Ax|| = ||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$$

از طرف دیگر داریم:

$$||Ax|| \leq ||A||\, ||x||$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$|\lambda|\, ||x|| = ||Ax|| \leq ||A||\, ||x|| \Rightarrow |\lambda| \leq ||A||.$$

□

تعریف ۱.۲.۳۸. مقدار $\rho(A)$ را که به صورت

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

تعریف می‌شود **شعاع طیفی** ماتریس A گوییم که در آن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

تعریف ۱.۲.۳۹. **نرم طیفی** ماتریس A عبارت است از

$$||A||_2 = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2},$$

که داریم:

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

قضیه ۱.۲.۴۰. *فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی یک ماتریس A باشد. آن‌گاه برای هر نرم القایی وابسته داریم:*

$$|\lambda| \leq ||A||.$$

برهان. مراجعه کنید به [۴]. □

نتیجه ۱.۲.۴۱. *به عنوان یک حالت خاص از قضیه‌ی ۱.۲.۴۰ داریم:*

$$\rho(A) \leq ||A||$$

حال با توجه به قضیه‌ی ۴۰.۲.۱ و نتیجه‌ی ۴۱.۲.۱ می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را بیان کنیم.

لم ۴۲.۲.۱. *اگر* $||A|| < 1$*، که در آن* $||.||$ *نرم القایی می‌باشد، آن‌گاه ماتریس* A *همگراست.*

برهان. رجوع شود به [۴]. □

قضیه ۴۳.۲.۱. ***قضیه‌ی اول گرشگورین:*** *فرض کنید* $A = (a_{ij})$ *یک ماتریس از مرتبه‌ی* $n \times n$ *باشد. تعریف می‌کنیم:*

$$\Lambda_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

آن‌گاه هر مقدار ویژه‌ی λ *از* A *حداقل در یکی از نامساوی‌های*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \Lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

صدق می‌کند.

یعنی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A *را می‌توان در اجتماع دایره‌های* $\{z : |z - a_{ii}| \leq \Lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$ *پیدا کرد.*

برهان. مراجعه کنید به قضیه‌ی ۱.۱۱ در [۱۵] . □

با توجه به قضیه‌ی اول گرشگورین می‌توان لم زیر را بیان کرد.

لم ۴۴.۲.۱.

$$\rho(A) \leq min\{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\}.$$

برهان. (نتیجه‌ی ۴.۶ صفحه‌ی ۱۲۹ از [۱]).

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \Rightarrow |\lambda| \leq |a_{ii}| + \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

□

تعریف ۴۵.۲.۱. برای $n \geq ۲$، یک ماتریس مختلط $n \times n$ مانند A را **تحویل‌پذیر** گوییم هرگاه یک ماتریس جایگشت $n \times n$ مانند P وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$\mathrm{PAP}^T = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{bmatrix} \tag{۳.۱}$$

که در آن $A_{۱۱}$ یک زیر ماتریس $r \times r$ و $A_{۲۲}$ یک زیر ماتریس $(n-r) \times (n-r)$ هستند که در آن‌ها $۱ \leq r \leq n$ می‌باشد. اگر چنین ماتریس جایگشتی وجود نداشته باشد، آن‌گاه گوییم ماتریس A **تحویل‌ناپذیر** است.

تعریف ۱. ۲. ۴۵ را با توجه به [۸] می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

تعریف ۴۶.۲.۱. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ **تحویل‌پذیر** است اگر اندیس‌های $۱, ۲, \ldots, n$ را بتوان به دو مجموعه‌ی مجزای $i_۱, i_۲, \ldots, i_\mu$ و $j_۱, j_۲, \ldots, j_\nu$ $(\mu + \nu = n)$ تقسیم کرد به طوری که

$$a_{i_\alpha j_\beta} = ۰, \quad \beta = ۱, ۲, \ldots, \nu, \quad \alpha = ۱, ۲, \ldots, \mu$$

به عنوان مثال، ماتریس A را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نظر بگیرید. برای اینکه نشان دهیم این ماتریس تحویل‌پذیر است دو مجموعه مجزا را طوری در نظر می‌گیریم که $i_۱ = ۱$، $i_۲ = ۳$، $j_۱ = ۲$ و $j_۴ = ۴$ باشند. آن‌گاه

$$a_{۱۲} = a_{۱۴} = a_{۳۲} = a_{۳۴} = ۰.$$

قضیه ۴۷.۲.۱. *اگر A تحویل‌ناپذیر و غالب قطری ضعیف باشد آن‌گاه $detA \neq ۰$ و هیچ یک از درایه‌های قطری آن صفر نیستند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۲.۵.۳ در [۱۸]. □

قضیه ۴۸.۲.۱. *اگر ماتریس A غالب قطری قوی باشد $detA \neq ۰$.*