بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

رساله جهت دریافت دکتری تخصصی

آمار، گرایش استنباط آماری

تحت عنوان

ترتیب‌های تصادفی در محیط فازی

اساتید راهنما

دکتر عبدالحمید رضایی رکن آبادی

دکتر محمد امینی

نگارنده

رضا زارعی

اسفند ۱۳۹۲

هوالعلیم

زیباترین نام را بر زبان جاری می‌کنم ... که هر کس زبان به حمد تو گشود بی‌تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم.

در وادی معرفت نگنجد، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیافتد ...، گر گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی[1]، کوچک شمرده شود و تنها خاطره جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگِ صفحات زندگی باقی ماند.

تو علم را روشنی قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را، راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند، پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد، خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود و ... آری آنجاست که آدمی معنا یابد.

من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان...اما بار الها چشمِ طمع بر رحمتت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفتت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند.

اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبت قسم می‌دهم که..." هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من بازگیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای!"

و در آن روز که نوبت زندگانی به سر رسد و پیک مرگ حلقه بر در خانه تن بکوبد و دعوت واجب الاجابه تو از آسمان‌ها به گوش آید...پروردگارا! بر محمد (ص) و آل پاکش درود فرست و به حق ایشان عمر ما را با رستگاری به پایان آور و عاقبتمان را ختم به خیر فرمای...!

زبان قاصر است و مجال کوتاه...

تو خود قصیده‌ی مهر را از لوح نانوشته‌ی قلبم بخوان...!

---

[1] ن و القلمِ و ما یَسطُرونَ

تقدیم به:

مهربانی و شکیبایی بیکران

همسرم

و

روح پاک و خنده‌های مهربان

بیاران

سپاس‌گزاری...

روزی که دل پرنده شد، آمد به بام تو آغاز می‌کنم سخنم را به نام تو

انگار اولین روز و اولین کلمات است؛ این آخرین روزها و آخرین واژه‌ها....

حال و هوای این پایان، درست شبیه شروع ماجراست. اگرچه گام‌شمار ایام، راه پیموده‌ی درازی را نشان می‌دهد اما قدم‌های برنداشته، آن‌قدر بی‌شمارند که بهتر است از پایان چیزی نگفت.

دلگرم و پرامید، قدردان و شاکر، باعزمی راسخ و قلبی سرشار از آرزوهای روشن، یکی دیگر از دفترمشق‌هایم را می‌بندم و تشنه‌تر و مشتاق‌تر از پیش برای یادگیری و آموختن در مقابل معلمان ابدی‌ام زانو خواهم زد و اعلام می‌کنم در آغاز مسیری دشوار نیازمند روشنایی وجودشان خواهم بود تا پستی بلندی‌ها و ناهمواری‌های راه، مرا از پا در نیاورد و به فریب میانبرها، گرفتار کوره راه‌ها نشوم. این سیاهه، حاصل روزگار جوانی کسیست که تمام افتخارش، شاگردی و یادگیری و آموختن است تا پایان عمر.

در نهایت فروتنی و احترام، عالی‌ترین مراتب سپاس و قدردانی خود را به اساتید راهنمای بزرگوارم آقایان دکتر محمد امینی و دکتر عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی تقدیم می‌کنم که که مرشد راهم بودند در طریق دانش‌اندوزی.

از همسرم که با قلبی آکنده از عشق و معرفت در طول این دوره کمک‌گر راهم بود و محیطی آکنده از سلامت، امنیت، آرامش و آسایش را برای من فراهم آورد، سپاس‌گزارم و از خداوند مهربان می‌خواهم تا همیشه قدردان صبر و مهربانی ایشان باشم.

از داوران محترم رساله آقایان دکتر ماشین‌چی، دکتر نیلی ثانی، دکتر صادقپور گیلده و دکتر محتشمی برزادران که در نهایت حوصله و دقت رساله بنده را مطالعه نموده و با ارائه نظرات و پیشنهاداتی سازنده موجبات هرچه بهتر شدن کیفیت آن را فراهم نمودند، قدردانی می‌کنم.

در پایان وظیفه خود می‌دانم از خانواده محترم همسرم بابت مهر و محبت‌های تمام نشدنی‌شان در طول این دوره، از پدر و مادرم برای تلاش بی‌دریغشان در راه کسب علم و تحصیل من و دوستان عزیزم آقایان حامد احمدزاده، مجید چهکندی، علی دست‌برآورده به پاس دوستی خالصانه‌شان تشکر کنم.

رضا زارعی

علائم و نمادها

ترتیب تصادفی معمولی	$\leq^{st}$
ترتیب تصادفی معمول فازی	$\preceq^{st}$
ترتیب تصادفی معمول فازی انتقال یافته بالایی	$\preceq^{st\uparrow}$
ترتیب نرخ خطر	$\leq^{hr}$
ترتیب نرخ خطر فازی	$\preceq^{hr}$
ترتیب نرخ خطر فازی انتقال یافته بالایی	$\preceq^{hr\uparrow}$
ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده	$\leq^{mrl}$
ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده فازی	$\preceq^{mrl}$
ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده فازی انتقال یافته بالایی	$\preceq^{mrl\uparrow}$
ترتیب نسبت درستنمایی	$\leq^{lr}$
ترتیب نسبت درستنمایی فازی	$\preceq^{lr}$
ترتیب نسبت درستنمایی متناسب	$\leq^{plr}$
ترتیب نسبت درستنمایی متناسب فازی	$\preceq^{plr}$
ترتیب نرخ خطر معکوس	$\leq^{rhr}$
ترتیب نرخ خطر معکوس فازی	$\preceq^{rhr}$
ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده معکوس	$\leq^{rmrl}$
ترتیب میانگین طول عمر باقیمانده معکوس فازی	$\preceq^{rmrl}$

متغیر تصادفی فازی القاء شده	$\tilde{X}$
kامین آماره مرتب فازی در نمونه‌ای به حجم n	$\tilde{X}_{k:n}$
تابع توزیع تجمعی فازی	$\tilde{F}(.)$
تابع چگالی احتمال فازی	$\tilde{f}(.)$
متغیر تصادفی C-فازی	$\tilde{X}_c$
تابع توزیع تجمعی $\tilde{X}_c$	$\tilde{F}_c(.)$
تابع بقاء	$\bar{F}(t)$
تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$	$\mu_{\tilde{A}}(.)$
α-برش مجموعه فازی $\tilde{A}$	$\tilde{A}_\alpha$
تابع نرخ خطر	$r_F(\cdot)$
تابع نرخ خطر فازی	$\tilde{r}_F(\cdot)$
تابع نرخ خطر معکوس	$r_F^*(\cdot)$
تابع نرخ خطر معکوس فازی	$\tilde{r}_F^*(\cdot)$
تابع میانگین طول عمر باقیمانده	$m_F(\cdot)$
تابع میانگین طول عمر باقیمانده فازی	$\tilde{m}_F(\cdot)$
تابع میانگین طول عمر باقیمانده معکوس	$m_F^*(\cdot)$
تابع میانگین طول عمر باقیمانده معکوس فازی	$\tilde{m}_F^*(\cdot)$
تابع نرخ خطر فازی $\tilde{X}_c$	$\tilde{r}_{\tilde{F}_c}$
میانگین طول عمر باقیمانده $\tilde{X}_c$	$\tilde{m}_{\tilde{F}_c}$

پیش‌گفتار

روش‌های مقایسه دو توزیع از مهم‌ترین مسائلی است که طی چهار دهه اخیر مورد توجه و مطالعه محققین بسیاری قرار گرفته است. ساده‌ترین روش مورد استفاده در این زمینه، مقایسه میانگین توزیع‌های تحت بررسی و در حالتی که میانگین‌ها برابر باشند، مقایسه شاخص‌های پراکندگی آنان بوده است. آن‌چه مسلم است، در هردو مورد مقایسه تنها بر اساس دو عدد صورت می‌پذیرد که حاوی تمام اطلاعات موجود در مسئله نخواهد بود. علاوه بر آن، کماکان در برخی مسائل عدم وجود میانگین و حتی واریانس برخی از توزیع‌ها از جدی‌ترین مشکلات پیش‌رو است. در جهت رفع چنین مشکلاتی، مان و ویتنی[۲] (۱۹۴۷) با مطرح کردن مبحث ترتیب‌های تصادفی که به‌طور خاص از توابع توزیع در جهت مقایسه آن‌ها استفاده می‌کرد، رویکردی جدید و سودمند را در این زمینه معرفی نمودند که در بسیاری از شاخه‌های آمار و احتمال از جمله نظریه قابلیت اعتماد، نظریه صف، تحلیل بقاء و نیز در دیگر علوم همانند اقتصاد، بیمه، مدیریت و زیست‌شناسی به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از آن زمان تاکنون شاخص‌های رتبه‌بندی مختلفی در این رابطه معرفی و در زمینه‌های گوناگون به‌کار گرفته شده‌اند. تمامی روش‌های یاد شده دارای یک فرض مشترک که همان دقیق بودن متغیرهای تحت بررسی است، می‌باشند. به‌عبارتی دیگر، این روش‌ها برای مقایسه متغیرهای تصادفی کلاسیک و یا سیستم‌هایی که بر اساس آن‌ها مدل‌بندی شده‌اند، معرفی گردیده‌اند.

با این حال، در مطالعات واقعی ممکن است با وضعیت‌هایی مواجه شویم که در آن‌ها به سبب شرایط حاکم بر آزمایش و یا اشتباهات انسانی یا آزمایشگاهی، محقق قادر به جمع‌آوری و ثبت دقیق اطلاعات به‌دست آمده از سیستم تحت بررسی خود نباشد. در چنین وضعیت‌هایی نمی‌توان از متغیرهای تصادفی معمولی که بر فرض دقیق بودن مشاهدات استوار هستند، استفاده کرد.

[۲] Mann and Whitney

پس از معرفی نظریه مجموعه‌ها و منطق فازی در سال ۱۹۶۵، با توجه به ابزار سودمندی که این نظریه در زمینه صورت‌بندی مفاهیم نادقیق فراهم نموده است، بسیاری از محققین توجه خود را معطوف به‌کار گیری این نظریه در زمینه‌های مختلف علوم از جمله علم احتمال و آمار نموده‌اند که متغیرهای تصادفی فازی از آن جمله‌اند. مفهوم متغیرهای تصادفی فازی به منظور تجزیه، تحلیل و استنباط‌های آماری در وضعیت‌هایی که در آن‌ها عدم اطمینان موجود در آزمایش به‌وسیله مجموعه‌های فازی مدل‌بندی می‌شود، مشابه با تعریف متغیرهای تصادفی کلاسیک ارائه شده است. بنابراین، به‌نظر می‌رسد با توجه به اهمیت و جنبه‌های کاربردی ترتیب‌های تصادفی در علوم مختلف، موضوع ترتیب تصادفی متغیرهای تصادفی فازی یکی از مباحث مهم است که می‌تواند در وضعیت‌های یاد شده برای مقایسه عملکرد سیستم‌های تحت بررسی به‌کار گرفته شود.

در این رساله موضوع ترتیب تصادفی در محیط فازی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و در چهار فصل به شرح زیر تدوین گردیده است:

- در فصل اول، با مروری کوتاه بر نظریه مجموعه‌های فازی، مفاهیم کلیدی در این نظریه که در طی رساله و در فصل‌های پیش‌رو به تناوب به آن‌ها نیاز داشته‌ایم، به کوتاهی بیان شده‌اند. همچنین، روشی برای ساختن یک عدد فازی در ادامه فصل اول ارائه شده است که از ابزارهای مهم در جهت معرفی شاخص‌های رتبه‌بندی در این رساله به‌شمار می‌آید.

- در فصل دوم، ضمن مرور تعاریف و مفاهیم مربوط به متغیرهای تصادفی فازی، تعریف تابع توزیع تجمعی فازی بیان و با ذکر مثال‌هایی تشریح شده است. سپس، با معرفی یک سیستم رتبه‌بندی کلی که مبتنی بر مقایسه فواصل است، ابتدا شاخص ترتیب تصادفی معمولی را برای متغیرهای تصادفی فازی توسعه داده‌ایم. در ادامه، با تکیه بر مفهوم دو تابع کلیدی در نظریه قابلیت اعتماد، شاخص‌های رتبه‌بندی جدیدی برای مقایسه متغیرهای تصادفی فازی و نیز مقایسه عملکرد سیستم‌هایی که بر پایه این متغیرها مدل‌بندی می‌شوند، پیشنهاد گردیده است. در پایان با مروری اجمالی بر برخی مفاهیم قابلیت اعتماد ساختاری سیستم‌ها، دو مثال کاربردی در رابطه با مقایسه سیستم‌های پرکاربرد در این زمینه، ارائه شده است.

- در ادامه بحث ترتیب‌های تصادفی در محیط فازی، چند شاخص جدید برای رتبه‌بندی متغیرهای تصادفی فازی در فصل سوم معرفی شده است. در این راستا، ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی فازی و نسبت درستنمایی متناسب فازی به انضمام رابطه‌ای که بین این دو شاخص رتبه‌بندی وجود

دارد، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش بعدی، با تکیه بر مفاهیم سالخوردگی در نظریه قابلیت اعتماد، شاخص‌های ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس فازی و میانگین طول عمر باقیمانده معکوس فازی برای مقایسه متغیرهای تصادفی فازی پیشنهاد شده‌اند. همچنین ارتباط بین شاخص‌های نرخ خطر معکوس فازی با نسبت درستنمایی فازی و میانگین طول عمر باقیمانده معکوس فازی مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان شاخص‌های ترتیب تصادفی فازی معمول، نرخ خطر فازی و نرخ خطر معکوس فازی را برای رتبه‌بندی آماره‌های ترتیبی فازی به‌کار گرفته و در رابطه با حفظ این ترتیب‌ها در آماره‌های مرتب فازی بحث و بررسی صورت گرفته است.

- با وجود این‌که نظریه مجموعه‌های فازی ابزاری مفید و توانمند برای مدل‌بندی کمیت‌های نادقیق موجود در مطالعات و بررسی‌هایی که در آن‌ها به سبب شرایط حاکم بر مسئله قادر به جمع‌آوری دقیق اطلاعات نیستیم را در اختیار ما قرار می‌دهد، در علوم مختلف (بویژه در علوم مهندسی و تحلیل داده‌های طول عمر) ممکن است برای مثال با عبارت‌هایی نظیر «طول عمر قطعه دور از ۱۰۰۰ ساعت است» و یا «طول عمر بسیار کمتر از ۱۰۰۰ ساعت است» مواجه شویم که به‌نظر کمی متفاوت‌تر از عبارت‌هایی نظیر «طول عمر قطعه حدوداً ۱۰۰۰ ساعت است» به‌نظر می‌رسند. در حقیقت چنین نیز هست و همان‌طور که در فصل چهارم رساله خواهیم دید، سه عبارت بیان شده دارای ساختارهایی متفاوت چه از نظر کاربرد و چه از نظر مبانی تئوری هستند. از این‌رو، در فصل چهارم و در ادامه بحث ترتیب‌های تصادفی در محیط فازی، این موضوع را برای نوعی خاص از متغیرهای تصادفی که برای صورت‌بندی مفاهیمی از این‌دست مناسب به‌نظر می‌رسند، مورد بررسی قرار گرفته است.

در این راستا، ابتدا نوع خاصی از اعداد فازی تحت عنوان اعداد C-فازی مطالعه و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، مفهوم متغیرهای تصادفی C-فازی پیشنهاد و با تکیه بر شاخص‌های رتبه‌بندی معرفی شده در فصل دوم رساله، شاخص‌هایی مشابه برای رتبه‌بندی این متغیرها پیشنهاد و با ذکر مثال‌هایی تشریح خواهند شد. در بخش پایانی، رتبه‌بندی متغیرهای تصادفی C-فازی بر اساس شاخص‌های ترتیب تصادفی فازی انتقال یافته بالایی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

مقالات مستخرج از رساله

1. Zarei, R., Amini, M., Rezaei Roknabadi A.H., and Akbari, M.G. (2012). Some fuzzy stochastic orderings for fuzzy random variables. *Fuzzy Optimization & Decision Making*, 11, 209–225.

2. Zarei, R., Amini, M., and Rezaei Roknabadi A.H. (2014). Fuzzy stochastic ordering for C-fuzzy random variables and its applications. *Soft Computing*, *DOI 10.1007/s00500-014-1241-9*.

3. Zarei, R., Amini, M., and Rezaei Roknabadi A.H. (2014). Ranking fuzzy random variables based on new fuzzy stochastic orders. *Journal of Uncertain Systems*, 8, 66–77.

4. Zarei, R., Amini, M., Rezaei Roknabadi A.H., and Akbari, M.G. (2012). Stochastic ordering for fuzzy random variables. *The 11th Iranian Conference on Fuzzy Systems*, University of Sistan and Balochestan, Zahedan, Iran.

5. Zarei, R., Amini, M., Rezaei Roknabadi A.H. (2013). New fuzzy Stochastic orders for ranking fuzzy random variables. *The 9th Seminar on Probability and Stochastic Processes*, University of Sistan and Balochestan, Zahedan, Iran.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مورد نیاز

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصل‌های مختلف رساله را بیان و در رابطه با برخی به کوتاهی و برخی دیگر به تفصیل توضیح خواهیم داد. در این راستا و در بخش دوم، با مروری کوتاه بر نظریه مجموعه‌های فازی مفاهیم کلیدی در این نظریه مانند α-برش‌ها، اعداد فازی، اصل توسیع، قضیه نمایش و اعداد فازی LR که در فصل‌های بعد به تناوب به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، به کوتاهی بیان شده‌اند. همچنین، روشی برای ساختن یک عدد فازی در بخش سوم بیان و مورد بحث و بررسی قرار گرفته است که از ابزارهای مهم برای معرفی شاخص‌های رتبه‌بندی در این رساله می‌باشد.

۲.۱ نظریه مجموعه های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده[۱] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا ارائه شد. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون گسترش یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.

در نظریه مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌ها به‌صورت گردآیه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود که با توجه به آن ویژگی، با قاطعیت می‌توان گفت که یک شی مفروض متعلق به مجموعه مورد نظر هست یا نه. مثلاً اگر مجموعه مرجع X، مجموعه اعداد حقیقی و P ویژگی «بزرگتر از ده بودن» فرض شود، آن‌گاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A هست یا نه. حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی مجموعه‌ای از اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در این‌جا با یک ویژگی ناخوش‌تعریف و مبهم یعنی بزرگ سروکار داریم. این‌که چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند بنابر نظر افراد مختلف فرق می‌کند. مثلاً آیا ۱۰۰ عدد بزرگی است و عضو گردآیه اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟

[۱] Zadeh

۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ بنابراین ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق[۲] نیست. در نتیجه نظریه مجموعه‌های معمولی برای صورت‌بندی این مفاهیم و ویژگی‌ها مناسب به‌نظر نمی‌رسد. در گفتگوهای روزمره کلمات مبهم بسیاری به‌کار گرفته می‌شوند. مثلاً «درخت سرو زیباست» و یا «قیمت نفت نسبتاً بالاست». مجموعه‌های فازی برای به‌کارگیری این نوع کلمات و گزاره‌های نادقیق ارائه شده است. نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز می‌باشد. قبل از معرفی ساختار ریاضی نظریه مجموعه‌های فازی، اساس کار زاده را با پیگیری مثال فوق درباره اعداد حقیقی «بزرگ» شرح می‌دهیم. بنابه پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چه عدد بزرگتر بود عدد متناظر برای عضویت آن در مجموعه «اعداد بزرگ» به یک نزدیک‌تر باشد و بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچکتر بود، عدد مربوط به عضویت آن در مجموعه «اعداد بزرگ» به صفر نزدیک‌ترباشد. به این ترتیب به جای آن‌که بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست می‌گوییم درجه بزرگی آن مثلاً ۰/۷ است. به عبارت دیگر به جای آن که بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو «اعداد بزرگ» هست یانه، می‌گوئیم عدد ۱۰۰۰ با درجه ۰/۷ عضو مجموعه «اعداد بزرگ» است. اساس کار تشریح شده در بالا چیزی جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{۰, ۱\}$ است، به یک تابع با برد $[۰, ۱]$. به این ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر[۳] هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰, ۱\}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد، این تابع را تابع عضویت[۴]

[۲] Crisp

[۳] Indicator Function

[۴] Membership Function

مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. اکنون $\tilde{A}$ یک مجموعه معمولی نیست، بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی یا به بیان دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از X می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می تواند به‌طور پیوسته از $I = [۰, ۱]$ اختیار شود. این مجموعه به‌طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن‌را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد از بازه $[۰, ۱]$ به‌عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. درحالت حدی اگر x کاملاً در $\tilde{A}$ عضو باشد آنگاه $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ و اگر x عضو $\tilde{A}$ نباشد در این صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند.

مثال ۱.۱. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. یک زیرمجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچکتر از چهار به صورت $A = \{۱, ۲, ۳\}$ است و تابع نشانگر آن عبارت است از

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳ \\ ۰ & x = ۴, ۵ \end{cases}$$

برای مثال $I_A(۲) = ۱$ یعنی عدد دو عضو مجموعه A است و $I_A(۴) = ۰$، یعنی عدد چهار عضو مجموعه A نیست. به‌عبارت دیگر، عدد دو ویژگی کوچکتر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد.
اکنون زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از X به معنای ویژگی «کوچک بودن» را می‌توان توسط تابع عضویت زیر بیان کرد

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۶ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در این مثال برای نمونه $\mu_{\tilde{B}}(۲) = ۰/۶$ یعنی عدد دو با درجه ۰/۶ عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است، $\mu_{\tilde{B}}(۵) = ۰$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ نیست و $\mu_{\tilde{B}}(۱) = ۱$ یعنی عدد ۱ کاملاً

عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی «کوچک بودن» (به بیان بالا) را با درجه ۰/۶ داراست و عدد پنج اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً داراست.

قبل از ادامه بحث همین‌جا متذکر می‌شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و مانند این‌ها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیرمجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشد، در نظر بگیرند. بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیرمجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار موثر هستند.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$، تکیه‌گاه[۵] $\tilde{A}$ نامیده شده و با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱. مقدار $M = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$، ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود و در غیر اینصورت $\tilde{A}$ را زیر نرمال می‌گوییم. بدیهی است که هرمجموعه فازی زیر نرمال $\tilde{A}$ رامی‌توان با تقسیم درجات عضویت بر ارتفاع $\tilde{A}$ نرمال کرد.

مثال ۲.۱. برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ در مثال ۱.۱ به‌سادگی می‌توان دید که $supp\tilde{B} = \{1, 2, 3, 4\}$. همچنین $M = \sup_X \mu_{\tilde{B}}(x) = 1$ یعنی ارتفاع $\tilde{B}$ برابر ۱ است و بنابراین $\tilde{B}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال است.

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت زیر است

$$\tilde{A} = \left\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x));\ x \in X\right\} \tag{1.1}$$

اصولاً برخی مولفین، یک مجموعه فازی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت فوق تعریف کرده‌اند. هنگامی که مجموعه مرجع X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به‌صورت

[5]Support

$x_1, x_2, ..., x_n$ باشد، یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ از X به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\tilde{A} = \left\{\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2}, \cdots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\right\}.$$

مثال ۳.۱. فرض کنید $X = \{1, 2, ..., 10\}$. در این‌صورت تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X را که نشان دهنده ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» است را می‌توان با تابع عضویت زیر مدل‌بندی کرد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0/1 & x = 2 \\ 0/3 & x = 3 \\ 0/5 & x = 4 \\ 0/8 & x = 5 \\ 0/8 & x = 6 \\ 0/5 & x = 7 \\ 0/3 & x = 8 \\ 0/1 & x = 9 \\ 0 & x = 1, 10 \end{cases}$$

با استفاده از نماد معرفی شده در رابطه ۱.۱، $\tilde{A}$ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\tilde{A} = \left\{(1, 0), (2, 0/1), (3, 0/3), ..., (9, 0/1), (10, 0)\right\}.$$

تعریف ۳.۱. زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α، $(\alpha > 0)$ باشد، α-برش[۶] (یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$\tilde{A}_\alpha = \left\{x \in X | \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}.$$

مثال ۴.۱. فرض کنید $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ و زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X که نشان دهنده ویژگی «حدوداً سه» است، این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A} = \left\{\frac{0/3}{1}, \frac{0/7}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{0/3}{5}\right\}$$

[۶] α-Cuts