دانشگاه شیخ بهایی
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی مالی

ارزش گذاری اختیار معاملات لوی توسط شبکه FFT

پژوهشگر
زینب فرهنگ کوپایی

استاد راهنما
دکتر مهدی تاتاری

استاد مشاور
دکتر محمد تقی جهاندیده

فروردین ماه ۹۱

فهرست مطالب

نشانه‌ها

ماتریس احتمال انتقال پایه	P_t
ماتریس احتمال انتقال اسپارس	Q_t
شناسه‌ی شبکه‌ی ارزش‌گذار FFT	$(S, P_{\triangle t}, \mathcal{T})$
اختیار خرید استاندارد (اروپایی) محاسبه شده توسط شبکه‌ی FFT	$C_N(S, t)$
اختیار خرید آمریکایی محاسبه شده توسط شبکه‌ی FFT	$C_N^A(S, t)$
اختیار خرید آمریکایی مانع محاسبه شده توسط شبکه‌ی FFT	$C_N^{AB}(S, t)$
شبکه‌ی پرتابی پیشرو	FSG
متغیر مسیر-وابسته در تکنیک شبکه‌ی پرتابی پیشرو	$\mathbf{Y_t}$
شناسه‌ی شبکه‌ی تعمیم یافته‌ی FFT	$(S, Q_{\triangle t}, \mathcal{T})$

فهرست نمودارها

فهرست جدول‌ها

چکیده

این پژوهش، به معرفی شبکه‌ایی ساده، برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات غیر استاندارد تحت فرآیند لوی، با استفاده از "تبدیل فوریه‌ی سریع" (FFT) می‌پردازد.سپس شبکه‌ی اصلی توسط تکنیک "شبکه‌ی پرتابی پیشرو" (FSG)، به منظور وفق دادن با متغیرهای "مسیر-وابسته" گسترش می‌یابد. از آنجایی که فرم بسته‌ی تابع مشخصه، برای تمام فرآیندهای لوی وجود دارد، این شبکه‌ی ارزش‌گذاری برای همه‌ی مدل‌های لوی قابل اجراست. با استفاده از قدرت محاسباتی FFT، شبکه‌ی پیشنهادی، بار محاسباتی اضافه‌ایی نسبت به روش درخت دوجمله‌ایی داراست. شیوه‌ی ارزش‌گذاری نیز، بسیار شبیه به روش شبکه‌ی معمولی (Lattice) است. مثال‌های عددی که بر نوع آمریکایی اختیارمعاملات مانع و گذشته‌نگر انجام شده است، حاکی از دقت و کارایی شبکه‌ی مذکور دارد.

کلید واژه: اختیارمعاملات آمریکایی، شبکه‌ی FFT،فرآیند لوی، اختیارمعاملات غیر استاندارد

مقدمه

این پژوهش اساساً به ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی غیراستاندارد تحت فرآیند لوی توجه دارد. اختیارمعاملات غیر استاندارد که عموماً در فرابورس [۱] مورد معامله قرار می‌گیرند، مشتقات مالی هستند که مؤلفه‌ها و ساختار جبرانی پیچیده‌تری نسبت به نوع استاندارد دارند، حال آنکه اختیارمعاملات مسیر-وابسته قراردادهایی هستند که ارزش اجرای آنها به ارزش تاریخی دارایی (قیمت دارایی در گذشته) وابسته است. از اختیارمعاملات مسیر-وابسته‌ی مشهور می‌توان به: اختیار معامله‌ی مانع، اختیار معامله‌ی گذشته‌نگر و همتای آمریکایی هر یک از آنها اشاره کرد. مدلی که در ادامه خواهید دید، شبکه‌ایی است که توسط آن اختیارمعاملات لوی مسیر-وابسته از نوع آمریکایی را ارزش‌گذاری خواهیم کرد.

تاکنون مطالعات عددی بسیاری در ارزش‌گذاری اختیارمعاملات غیر استاندارد توسط مدل بلک-شولز یا تقریب‌های گسسته‌ی آن صورت گرفته است، که شاید بهترین روش معروف آن درخت دوجمله‌ایی CRR[۲] با پیاده‌سازی آسان و محاسبه‌ی مؤثر برای اختیار معامله‌ی آمریکایی می‌باشد. درخت سه‌جمله‌ایی، روش معروف دیگری است که برای نرخ بازدهی با توزیع نرمال مورد استفاده قرار می‌گیرد. "هال" و "وایت"[۳] (۱۹۹۳) و "باراکوند" و "پودت"[۴] (۱۹۹۶) این روش شبکه‌ایی را برای برآمدن بر مشکل معاملات مسیر-وابسته

---

[۱] Over the counter

[۲] Cox-Ross-Rubinstein

[۳] Hull and White

[۴] Barraqund and Pudet

توسط تکنیک FSG[۵]، تعمیم دادند.
از آن‌جایی که مطالعات تجربی، قویاً مدل بلک-شولز را رد می‌کند، مدل‌های لوی برای توصیف بهتر توزیع دارایی توصیه می‌شوند. اولین مدل ارزش‌گذاری اختیار معامله‌ی لوی مدل "انتشار جهشی"[۶] متعلق به "مرتون"[۷] است که برای آن، یک فرم بسته‌ی ارزش‌گذاری اختیار معامله را به دست آورده، و نیز ارزش گسسته‌ی آن از فرآیند پواسون مرکب به دست می‌آید.
تحلیل فوریه، ارزش‌گذاری اختیار معاملات لوی را آسان می‌کند. "کار" و "مادان"[۸] (۱۹۹۹) عبارت ساده‌ای را برای ارزش اختیار معامله‌ی اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه، که بر پایه‌ی لگاریتم قیمت انقضاء بود به‌دست آوردند. سپس از "تبدیل فوریه‌ی سریع"[۹] برای به‌دست آوردن ارزش عددی اختیار معامله، که آن هم توسط "معکوس تبدیل فوریه"[۱۰] به‌دست می‌آید، استفاده کردند. گذشته از خود فرآیندهای لوی، تحلیل فوریه و "روش تبدیل فوریه سریع" برای سایر دارایی های پویا، مثل مدل های میانگین بازگشتی و مدل‌های تلاطم تصادفی، کاربردی هستند.
"لام" و "وانگ"[۱۱] (۲۰۰۹) روش پیشنهادی خود را برای ارزش گذاری معاملات لوی توسط تبدیل فوریه تعمیم دادند. در راه تلاش برای به‌دست آوردن یک پیاده سازی عملی برای مدل‌های انتشار جهشی "هیلارد" و "شوارتز"[۱۲] (۲۰۰۵) یک روش شبکه‌ایی، که مرکب از دو درخت دو جمله‌ای مستقل، که یکی مربوط به بخش انتشار و دیگری مربوط به فرآیند پواسون مرکب است را توسعه دادند. به هر حال این درخت با افزایش زمان به‌سرعت

[۵] Forward Shooting Grid

[۶] Jump Diffusion

[۷] Merton

[۸] Carr and Madan

[۹] Fast Fourier Transform

[۱۰] Inversion Fourier Transform

[۱۱] Lam and Wong

[۱۲] Hillard and Schwards

گسترش می‌یابد ولی قابل اجرا برای فرآیندهای لوی "فعالیت نامتناهی" نیست.
از آن‌جایی که ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی و مسائل "پوشش"[۱۳] در علوم مالی مطرح هستند، این پژوهش مدلی ساده اما کارا، برای ارزش‌گذاری عددی اختیار معاملات آمریکایی "مسیر- وابسته" تحت فرآیند لوی ارائه می دهد. این مدل، شبکه‌ایی از "احتمالات انتقال" است که مستقیماً توسط تابع مشخصه‌ی دارایی بنیادین، محاسبه می‌شود . محاسبه‌ی "احتمالات انتقال" توسط "تبدیل فوریه‌ی سریع" مدل را کارآمد ساخته است. پس از ساخت یک مدل پایه برای اختیار معاملات آمریکایی بدون خصوصیت وابسته به مسیر، یک تکنیک FSG[۱۴] برای ذخیره‌ی متغیرهای وابسته به مسیر معرفی می‌شود. چون دامنه و تعداد گره‌های شبکه در هر مرحله از زمان، ثابت هستند، با گذشت زمان شبکه‌ی مذکور گسترش نمی‌یابد. تقریب مارکف متعلق به "داون" و "سیموناتو"[۱۵] (۲۰۰۱) بسیار شبیه به روش پیشنهادی این پژوهش است. با این تفاوت که آنها به قدرت FFT برای محاسبه تابع چگالی احتمال توجهی نکردند.
ساختار این پژوهش به این صورت است: در فصل اول به معرفی تبدیل فوریه پرداخته، سپس فرآیند لوی را معرفی کرده و به دو مدل از این فرآیند می‌پردازیم. در فصل دوم مدل پیشنهادی "کار- مادان" CM معرفی می‌شود، و در فصل سوم شبکه‌ی FFT پایه را می سازیم و آن را برای اختیار خرید و فروش آمریکایی مهیا می‌کنیم . آنگاه در فصل چهارم شبکه اصلی را باتکنیک FSG برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات مسیر- وابسته مجهز می‌کنیم. مثال‌های عددی در فصل پنجم برای معرفی کارآیی شبکه ارائه می‌شوند.

[۱۳] Hedging

[۱۴] Forward Shooting Grid

[۱۵] Duan and Simonato

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

این فصل به ارائه مفاهیم اولیه‌ی فرآیندهای تصادفی اختصاص یافته است. در ادامه به زمینه نظری فرآیندهای لوی پرداخته و دو مدل از آن را معرفی خواهیم کرد.

۱.۱ مروری بر فرآیندهای تصادفی

فرض کنید Ω یک مجموعه دلخواه بوده و $\mathcal{F}$ یک σ-جبر از زیر مجموعه‌های Ω و $\mathcal{P}$، یک نگاشت از $\mathcal{F}$ به $\mathbf{R}$ باشد. در این صورت $\mathcal{P}$ را یک اندازه‌ی احتمال گویند هر گاه در شرایط زیر صادق باشد: [۲۳]

۱- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

۲- $\mathcal{P}(\varnothing) = 0$ و $0 \leq \mathcal{P}(\mathcal{A}) \leq 1$

۳- اگر $\mathcal{A}_n \in \mathcal{F}$ برای $n = 1 \ldots$ و $\mathcal{A}_n$ها مجموعه‌هایی جدا از هم باشند یعنی: ($\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \varnothing$ برای $n \neq m$)، آنگاه $\mathcal{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathcal{A}_n)\big)$

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را یک فضای احتمال گوییم.

۱.۱.۱ فرآیند تصادفی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال و I یک مجموعه‌ی دلخواه است. در این صورت خانواده‌ی $\{X_t\}_{t\in I}$ که در آن هر X_t یک متغیر تصادفی است را یک فرآیند تصادفی می‌نامند. در این پژوهش $\Omega = \mathcal{R}^n$ و $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$ (یعنی σ-جبر زیر مجموعه‌های بورل از $\mathcal{R}^n$) در نظر گرفته می‌شود.

۲.۱.۱ فیلتراسیون (شارش اطلاعات)

تعریف ۲.۱.۱. یک خانواده‌ی صعودی از σ-جبر $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$، به طوریکه $\forall t \geqslant s \geqslant 0$: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ یک فیلتراسیون یا جریان اطلاعات روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ است. ما می‌توانیم $\mathcal{F}_t$ را به عنوان اطلاعات معلوم در زمان t تفسیر کنیم. $\mathcal{F}_t$ با گذشت زمان رشد می کند.[۲۳]

تعریف ۳.۱.۱. یک فرآیند تصادفی $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ را نسبت به فیلتراسیون $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ غیر قابل پیش بینی یا $\mathcal{F}_t$ - سازگار گوییم اگر مقدار X_t در زمان t برای $t \in [0,T]$ معلوم باشد. به عبارت دیگر $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ یک فرآیند سازگار است، اگر برای هر $t \in [0,1]$ در شرایط زیر صادق باشد:[۲۳]

۱- حد چپ فرآیند وجود داشته باشد $X(t^-) = \lim_{s\to t, s<t} X(s)$

۲- حد راست فرآیند وجود داشته باشد$X(t^+) = \lim_{s\to t, s>t} X(s)$

۳- $X(t) = X(t^+)$

۳.۱.۱ مارتینگل

مفهوم کلی

سری‌های زمانی متعلق به یک فرآیند تصادفی را در نظر می‌گیریم. یک فرآیند تصادفی را "مارتینگل" گوییم، اگر سری‌های زمانی‌اش بدون "روند" باشد. یک فرآیند با یک روند افزایشی را "زیر مارتینگل" و فرآیندی با روند کاهشی را "فوق مارتینگل" گوییم.[۲۳]

تعریف ۴.۱.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ با یک فیلتراسیون $\mathcal{F}_t$ در دست است. یک فرآیند کادلاگ (پیوسته از راست ودارای حد چپ) $\{X_t; t \in [0,T]\}$ را نسبت به فیلتراسیون $\mathcal{F}_t$ و اندازه‌ی احتمال $\mathbb{P}$، مارتینگل گوییم:

۱- اگر X، $\mathcal{F}_t$ - سازگار باشد.

۲- $E[|X|]$ برای $t \in [0,T]$ متناهی باشد.

۳- برای هر $s > t$ داشته باشیم: $E[X_s|\mathcal{F}_t] = X_t$

بهترین پیش‌بینی از یک مقدار آینده‌ی مارتینگل، مقدار فعلی آن است.تعریف بالا وقتی مارتینگل را نتیجه می‌دهد که تنها اندازه‌ی احتمال و شارش اطلاعات(فیلتراسیون) $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ معلوم باشد.

خاصیت بنیادین یک فرآیند مارتینگل آن است که تغییرات آینده توسط جریان اطلاعات $\mathcal{F}_t$ کاملاً غیر قابل پیش‌بینی باشد:[۲۳]

$$\forall u > 0 \; ; \; E[X_{t+u} - X_t|\mathcal{F}_t] = E[X_{t+u}|\mathcal{F}_t] - [X_t|\mathcal{F}_t] = X_t - X_t = 0$$

۴.۱.۱ اندازه‌ی مارتینگل معادل

تعریف ۵.۱.۱. گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ یک فیلتراسیون برای آن و $\mathbb{Q}$ اندازه‌ی احتمال دیگری روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد. در این صورت $\mathbb{Q}$ را یک اندازه‌ی مارتینگل معادل گوییم اگر:

۱ - $\mathbb{Q}$ معادل (هم‌ارز) $\mathbb{P}$ باشد، به این معنی که هر دو مجموعه‌های پوچ یکسان داشته باشند.(منظور از مجموعه‌های پوچ، پیشامدهایی است که تحت اندازه‌ی $\mathbb{P}$ و اندازه‌ی $\mathbb{Q}$ نمی‌توانند اتفاق بیفتند.)

$$\mathbb{P} \ll \mathbb{Q} \;\; ,\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$$

۲ - فرآیند تنزیل یافته‌ی قیمت سهام $\{e^{-rt}S_t\}_{t\geq 0}$، تحت اندازه‌ی $\mathbb{Q}$، یک مارتینگل باشد.

وجود یک اندازه‌ی مارتینگل معادل، به مفهوم آربیتراژ برمی‌گردد و یکتایی آن به مفهوم

بازار کامل وابسته است. به دیگر سخن، اگر با اندازه‌ی $\mathbb{Q}$ کار کنیم، اغلب منظورمان این است که در یک فضای " ریسک-خنثی " هستیم. یعنی بازدهی مورد انتظار سهام برابر است با بازدهی بدون ریسک یک دارایی کم‌خطر:[۲۸] $E^{\mathbb{Q}}[S_t|\mathcal{F}_0] = e^{rt}S_0$

۵.۱.۱ فرآیند لوی

یک فرآیند تصادفی با مقدار حقیقی مثل $\{X_t\}_{0\leq t<\infty}$ که دارای خاصیت کادلاگ و سازگار با فیلتراسیون $\mathcal{F}_t$ روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ باشد، را یک فرآیند لوی می‌نامند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- نموهای این فرآیند، مستقل از گذشته باشد. به این معنا که $X_u - X_t$مستقل از $\mathcal{F}_t$ $0 \leq t < u < \infty$ باشد:

$$\mathbb{P}(X_u - X_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_u - X_t)$$

۲- نموها مانا باشد، یعنی توزیع $X_{t+h} - X_t$ همان توزیع X_h است. به دیگر سخن توزیع نموها به t بستگی ندارد. (توزیع همگن است)

۳- تقریباً به طور مطمئن $X_0 = 0$.

۴- X_t در احتمال پیوسته باشد، به این معنا که :

$$\forall\epsilon > 0\ ,\lim_{h\to 0}\mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0$$

فرآیندهایی که در شرط های (۱) و (۲) و (۳) صدق می کنند، فرآیندهای با نموهای مستقل مانا نام دارند. شرط (۴) وقتی صادق است که شرایط (۱) تا (۳) برقرار باشد. شرط (۴) به معنای پیوستگی مسیرهای نمونه نیست. در حقیقت بیشتر فرآیندهای لوی، دارای مسیرهای نمونه‌ی ناپیوسته هستند(به جز یکی و آن هم حرکت براونی است). شرط (۴) به این معنا است که اگر ما در زمان tباشیم احتمال جهش در زمان t، صفر است. زیرا هیچ چیز نامعلومی در زمان حال وجود ندارد(همه چیز مشخص است). در واقع جهش‌ها در زمان‌های تصادفی رخ می‌دهند. طبق اطلاعات ما یک فرآیند تصادفی دارای چپ و پیوسته از راست (کادلاگ در زبان فرانسه)، یک فرآیند تصادفی غیر قابل پیش بینی است و نیز

یک فرآیند تصادفی سازگار همان مفهوم فرآیند غیر قابل پیش بینی را نتیجه می‌دهد.[۲۳] فرآیندی که دارای مسیرهای پیوسته باشد، $\mathcal{F}_t$ - سازگار است امّا فرآیندهای $\mathcal{F}_t$ - سازگار می توانند ناپیوسته باشند. فرض کنید t یک نقطه‌ی انفصال باشد. جهش X در زمان t برابر است با:

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t^-)$$

یک فرآیند $\mathcal{F}_t$-سازگار مثل $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ می تواند تعداد متناهی جهش‌های بزرگ و تعداد شمارش پذیر جهش‌های کوچک داشته باشد. اکنون $X(t)$ را به عنوان قیمت سهام در نظر بگیرید. $X(t^-)$ قیمت سهام در یک لحظه قبل و $X(t^+)$ قیمت سهام در یک لحظه بعد است. در کاربردها فرآیند قیمت سهام X بایستی به صورت یک فرآیند $\mathcal{F}_t$-سازگار مدل شود. زیرا در لحظه t^- نمی توانیم $X(t)$ را پیش بینی کنیم. (که به آن مقدار آینده گفته می شود) اما در لحظه t^+ از قبل $X(t)$ را می شناسیم (که به آن مقدار گذشته هم می گویند).[۲۳]

تعریف یک فرآیند لوی را در قبل آوردیم. در این قسمت تعریف خاصیت بی‌نهایت بخش‌پذیر (نامتناهی بخش‌پذیر) از یک توزیع را ارائه می دهیم. این خاصیت ما را به این نتیجه می رساند که نمی توان یک فرآیند لوی را توسط توزیع های نامتناهی بخش‌پذیر، تفکیک کنیم. زیرا فرآیند لوی خود توسط توزیع های نامتناهی بخش‌پذیر تولید می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. یک متغیر تصادفی Y را بخش‌پذیر گوییم، اگر بتواند توسط دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایش داده شود:[۲۳]

$$Y = Y_1 + Y_2$$

تعریف ۷.۱.۱. یک متغیر تصادفی Y را نامتناهی بخش‌پذیر گوییم، اگر بتواند توسط مجموع n متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان برای هر $n \geqslant 2$، نمایش داده شود:[۲۳]

$$Y = Y_1 + \ldots + Y_n$$

فرض کنید $\phi(z)$ تابع مشخصه‌ی توزیع نامتناهی بخش پذیر متغیر تصادفی Y و $\phi_n(z)$ تابع مشخصه‌ی توزیع n جمع‌وند بالا باشد. رابطه‌ی $\phi(z)$ و $\phi_n(z)$ به این صورت است:

$$\Phi(z) = \Phi_n(z)^n \text{ و } \Phi_n(z) = (\Phi(z)^{1/n})$$

مثال‌هایی از توزیع‌های نامتناهی بخش پذیر، توزیع نرمال،توزیع گاما، توزیع α-پایدار و توزیع پواسون است.

مثال ۱.۱.۱.۱ اگر Y یک متغیر تصادفی نرمال باشد به طوری که $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، تابع مشخصه آن به صورت:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izy}\mathbb{P}(Y)\mathrm{d}x = \exp(i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}) \qquad (۱.۱)$$

می‌باشد، لذا تابع مشخصه‌ی توزیع n جمع وند همگن Y می تواند با استفاده از رابطه‌ی (۱.۱) به این صورت محاسبه شود:

$$\Phi_n(z) = \{\Phi(z)\}^{\frac{1}{n}} = \{exp(i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2})\}^{\frac{1}{n}} = exp\{i(\frac{\mu}{n})z - \frac{(\frac{\sigma^2}{n})z^2}{2}\}$$

بنابراین تابع توزیع n جمع وند همگن Y نیز نرمال با میانگین $\frac{\mu}{n}$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است. (زیرا یک تابع مشخصه به طور یکتا یک توزیع احتمال را مشخص می کند)

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k \quad Y_k \sim i.i.d.N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$$

یک فرآیند لوی ،$\{X_t; t \geq 0\}$ خاصیت نامتناهی بخش‌پذیر را به این صورت داراست که برای هر t، نموهای یک فرآیند لوی $X_{t+h} - X_t$، یک توزیع نامتناهی بخش‌پذیر را دارد. بر عکس اگر P یک توزیع نامتناهی بخش‌پذیر باشد، آنگاه یک فرآیند لوی $\{X_t; t \geq 0\}$ وجود دارد که توزیع نمو $X_{t+h} - X_t$ ، توسط P تعیین می شود. این لم بسیار مهم است، زیرا به آن معناست که توزیع های نامتناهی بخش‌پذیر (گاما، نرمال،α-پایدار و پواسون) می‌توانند توسط فرآیند لوی تولید شوند و بالعکس.[۲۳]

۶.۱.۱ تابع مشخصه‌ی یک فرآیند لوی

فرض کنید $(X_t)_{t\geq 0}$ یک فرآیند لوی باشد. یک تابع پیوسته‌ی $\psi : \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}$ که "مشخصه‌ی نمایی" X خوانده می‌شود، وجود دارد به‌طوریکه:

$$E[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)} \qquad z \in \mathbf{R}^d \qquad (۲.۱)$$

ما می‌توانیم خواص توزیعی فرآیند تصادفی X_t را کاملاً، توسط تابع مشخصه‌ی یک نمو آن، $X_t - X_s$ توضیح دهیم.
طبق خاصیت مانایی نموها، تابع مشخصه‌ی X_t برابر خواهد بود با:

$$\Phi_t^X(z) = E(e^{izX_t}) = E[e^{iz(X_{t+s}-X_s)}] \qquad \forall s \geq 0 \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (۳.۱)$$

قضیه ۱.۱.۱.۱. مشخصه‌ی نمایی $\psi(u) = \log \Phi(u)$ که در بالا معرفی شده است، در فرمول "لوی-خینچین" صدق می کند:

$$\begin{aligned}\Phi_X(z) &= E[e^{izX_t}] \\ &= \exp\Big(aitz - \frac{\sigma^2}{2}tz^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{izx} - 1 - izx\mathbf{1}_{|x|\leq 1})w(dx)\Big) \qquad (۴.۱) \\ &= \exp(t\psi_X(z))\end{aligned}$$

که $a \in \mathbb{R}$ و $\sigma^2 \geq 0$ و w "اندازه‌ی لوی"[1] روی $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ است، و $\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2)w(dx) < \infty$.

اثبات ۱.۱.۱.۱. [۱۱]

نکته ۱. اندازه‌ی لوی یک اندازه‌ی مثبت روی $\mathbb{R}$ است امّا یک اندازه‌ی احتمال نیست، زیرا:

$$\int w(\mathrm{d}x) \neq 1$$

۷.۱.۱ حرکت براونی استاندارد: تنها فرآیند لوی پیوسته‌ی تولید شده توسط توزیع نرمال

بسیاری افراد فرآیندهای لوی را به اشتباه به صورت فرآیندهای غیر پیوسته تفسیر می کنند. این در مفهوم محض غلط است. اگر نگاهی دقیق به تعریف فرآیند لوی داشته باشیم، خواهیم دید که لازمه‌ی هیچ یک از شرایط، ناپیوستگی مسیرهای نمونه فرآیند لوی نیست.

[1] Levy Measure

یک فرآیند لوی می تواند یک مسیر نمونه‌ی پیوسته داشته باشد، که تنها نمونه‌ی آن فرآیند حرکت براونی استاندارد است.[۲۳]

تعریف ۸.۱.۱. یک حرکت براونی استاندارد $\{B_t; t \geqslant 0\}$ یک فرآیند لوی حقیقی مقدار تعریف شده روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ است که شرایط زیر را داراست:[۲۳]

۱- تقریباً به طور مطمئن $X_0 = 0$.

۲- X دارای نموهای مستقل و مانا باشد.

۳- $X_{t+s} - X_t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ باشد:

$$X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$$

۴- یک $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $\mathcal{P}(\Omega_0) = 1$، و این به آن معناست که $X_t(\omega)$ در t برای هر $\omega \in \Omega_0$ پیوسته است.(Ω_0 یک "مسیر نمونه"[۲] است)

طبق تعریف بالا فرآیند حرکت براونی را بدون مراجعه به یک فیلتراسیون تعریف کرده‌ایم. طبق آنچه که در ادامه می‌آید، ما همیشه با یک فیلتراسیون طبیعی $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ مربوط به حرکت براونی کار می کنیم، مگر آنکه چیز دیگری مدّ نظرمان باشد. بنابراین فرآیند حرکت براونی با یک فیلتراسیون طبیعی سازگار است و نمو $X_{t+s} - X_t$ مستقل از $\mathcal{F}_t$ است.

حرکت براونی، فرآیند تصادفی است که تا کنون مورد مطالعه‌ی وسیعی قرار گرفته و به عنوان مادر تحلیل تصادفی مدرن [۳] تلقی می‌شود. حرکت براونی و مدل‌سازی مالی، پیوند عمیقی با یکدیگر دارند واین از همان زمانی است که "لوئیس باچلیر[۴]" مدلی را برای قیمت دارایی در بورس پاریس ارائه داد:[۱۱]

$$S_t = S_0 + \sigma B_t \qquad (۵.۱)$$

نسخه‌ی ضربی مدل باچلیر منجر به ارائه‌ی مدل "بلک-شولز" شد که در آن لگاریتم قیمت دارایی $\ln S_t$ از یک فرآیند حرکت براونی پیروی می کند:

$$S_t = S_0 \exp[\mu t + \sigma B_t] \qquad (۶.۱)$$

[۲]Sample Path

[۳] The Modern Stochastic Analysis

[۴]Louis Bachelier

و یا در فرم کمی خاص‌تر:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dB_t + (\mu + \frac{\sigma^2}{2} dt) \qquad (۱.۷)$$

که در این حالت فرآیند S، "فرآیند حرکت براونی هندسی" نامیده می‌شود. همچنین مدل "بلک-شولز" از منظر "فرآیند لوی نمایی" نیز قابل توصیف است:

مدل بلک-شولز یک مدل لوی نمایی به فرم زیر است:[۲۳]

$$S_t = S_0 e^{L_t}$$

که در آن L_t یک فرآیند حرکت براونی هندسی به صورت زیر است:

$$L_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

این حقیقت که حرکت ارزش بورس S_t، به صورت یک فرآیند لوی نمایی مدل شده است، به این معناست که، لگاریتم بازدهی آن $\ln \frac{S_t}{S_0}$ به فرم یک فرآیند لوی مدل می‌شود:

$$\ln(\frac{S_t}{S_0}) = L_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

مدل بلک-شولز، تنها "مدل لوی نمایی" پیوسته است. زیرا فرآیند حرکت براونی تنها فرآیند لوی پیوسته، (بدون جهش) می‌باشد.

۱.۱.۸ فرآیند گاما

فرآیند گامای $\gamma(t;\mu;\nu)$ با میانگین μ و واریانس ν، فرآیندی است با نموهای مستقل در بازه‌هایی به صورت $(t, t+h)$، که این بازه‌ها بدون اشتراک‌اند. چگالی $f_h(g)$ مربوط به نمو $g = \gamma(t+h;\mu,\nu)$، توسط تابع چگالی گاما با میانگین μh و واریانس νh بدست می‌آید،[۲۸] یعنی:

$$f_h(g) = (\frac{\mu}{\nu})^{\frac{\mu^2 h}{\nu}} \frac{g^{\frac{\mu^2 h}{\nu}} - 1 \exp(\frac{-\mu}{\nu} g)}{\Gamma(\frac{\mu^2 h}{\nu})}, \; g > 0 \qquad (۱.۸)$$

که در آن $\Gamma(x)$ تابع گاما ست. توزیع گاما، تابع مشخصه‌ایی به فرم زیر دارد[۲۸]:

$$\Phi_{\gamma(t)}(u) = E[\exp(iu\gamma(t;\mu,\nu))] = \left(\frac{1}{1 - iu\frac{\nu}{\mu}}\right)^{\frac{\mu^2 t}{\nu}} \qquad (۱.۹)$$