بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

رساله دوره دکتری ریاضی محض (نظریه گروههای متناهی)

عنوان:

تشخیص‌پذیری بعضی از گروههای متناهی

با استفاده از مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلوی آنها

نگارش:

ندا آهنجیده

استاد راهنما:

دکتر علی ایرانمنش

استادمشاور:

دکتر بهروز خسروی

بهمن ۱۳۸۷

تقدیم به پدر و مادر عزیز و برادران مهربانم مجید و میلاد

به خاطر عشق و حمایت مدامشان

قدردانی

حمد بی حد محبوبی را که فیض ساحت فیاض او یاری نمود تا تحقیق حاضر به انجام رسید.

با تشکر از اساتید بخش ریاضی که در طول تحصیل از محضرشان بهره مند شدم، عمیق ترین قدردانی‌ام را از سر صدق و اخلاص به محضر استاد بزرگوار جناب آقای دکتر علی ایرانمنش تقدیم می‌کنم.

سپاسم را به خاطر ترغیب و فراستشان به پدر و مادر عزیزم که تا ابد مدیونشان هستم تقدیم می‌کنم. از دوست عزیزم سرکار خانم مهناز فرودی که همواره از محبتش بهره‌مند بودم و دوران تحصیلم در مقطع دکتری شانس آشنایی با ایشان را داشتم، همچنین سرکار خانم زهره ایمانی سپاسگزارم.

چکیده

تشخیص‌پذیری با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط بی بیان گردید. تاکنون نشان داده شده است که گروههای ساده $A_n(q)$، $^{2}A_n(q)$، $C_2(q)$، گروههای متناوب، $Sz(2^{2m+1})$، گروههای ساده ماتیو و گروههای یانکو با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیرند. در این رساله نشان داده‌ایم که گروههای ساده $^{2}D_n(q)$، $D_n(q)$ و همچنین گروههای ساده $B_n(q)$ و $C_n(q)$ که $n \geq 3$ و $q \not\equiv \pm 1 \pmod{8}$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیرند. بعلاوه با اثبات ۲−شناسایی‌پذیری گروههای ساده $B_n(q)$ و $C_n(q)$ که $n \geq 3$ و $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$، با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو نشان داده‌ایم گروههای ساده همواره با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیر نمی‌باشند. تشخیص‌پذیری با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال اولین بار درپایان‌نامه فوق‌لیسانس وَنگ در سال ۲۰۰۰ بیان شد و همچنین تشخیص‌پذیری گروههای ساده و متناهی با گراف ناجابه‌جایی اولین بار در سال ۲۰۰۶ توسط عبداللهی و همکارانش مطرح شد. در این رساله، نشان داده‌ایم که گروههای ساده $B_n(q)$ که $n = 2^m \geq 4$ و $A_{3^k}(2)$ که $k \geq 3$ و $|k|_2 = 2$ با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال تشخیص‌پذیرند و همچنین گروه ساده $A_{3^k}(2)$ که $k \geq 3$ و $|k|_2 = 2$ با گراف ناجابه‌جایی تشخیص‌پذیر است.

واژه‌های کلیدی : گروه ساده، گروه متعامد تصویری، گروههای سیمپلکتیک تصویری، زیرگروه سیلو، نرمالساز، زیرگروه آبلی ماکسیمال، گراف اول، مؤلفه همبندی گراف اول، گراف ناجابه‌جایی.

فهرست مندرجات

۱ مطالبی راجع به نظریه گروههای متناهی ۶

۱.۱ مقدمه ۶

۲.۱ گروههای متناهی ۶

۳.۱ گروههای ساده ۸

۴.۱ گروههای خطی ۱۳

۵.۱ گروههای پوچتوان ۱۴

۶.۱ گروههای حلپذیر ۱۶

۷.۱ گراف اول گروه متناهی ۱۷

۱.۷.۱ گروههای فروبنیوس و ۲−فروبنیوس ۱۹

۲.۷.۱ قضیه کگل−گرونبرگ ۲۱

۲ تشخیص‌پذیری گروه $^2D_n(q)$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو ۲۳

۱.۲ مقدمه ۲۳

۲.۲ بعضی نتایج اولیه ۲۵

۳.۲ مرتبه نرمالساز بعضی از زیر گروههای سیلوی $^2D_n(q)$ ۲۷

۴.۲ قضیه اصلی ۳۶

۱.۴.۲ اثبات قضیه اصلی ۴۵

۳ مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلوی بعضی گروههای شوالی ۴۸

۱.۳ مقدمه ۴۸

۲.۳ بعضی نتایج اولیه ۵۱

۳.۳ مرتبه نرمالسازهای زیرگروههای سیلوی فرد $B_n(q)$ و $C_n(q)$ ۵۴

۴.۳ نرمالساز ۲− زیرگروه سیلوی گروه متعامد تصویری و گروه سیمپلکتیک تصویری روی یک میدان متناهی با مشخصه فرد ۷۹

۵.۳ قضیه اصلی ۸۵

۱.۵.۳ اثبات قضیه اصلی ۸۹

۴ تشخیص‌پذیری با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال و گراف ناجابه‌جایی ۱۰۳

۱.۴ مقدمه ۱۰۳

۲.۴ نتایج اولیه ۱۰۵

۳.۴ نتایج اصلی ۱۰۸
کتابنامه **۱۱۳**
پیوست‌ها **۱۲۰**
جدول الف. ۱ .... **۱۲۱**
جدول الف. ۲ .... **۱۲۲**
جدول ب. **۱۲۳**
جدول ج. ۱ .... **۱۲۴**
جدول ج. ۲ .... **۱۲۵**
جدول ج. ۳ .... **۱۲۶**
پیوست د. واژه نامه انگلیسی به فارسی **۱۲۷**
پیوست ه. واژه نامه فارسی به انگلیسی **۱۳۰**

مقدمه

گروه دلخواه G را با شرط a تشخیص‌پذیر گوییم، هرگاه گروه G تحت یکریختی تنها گروهی باشد که در شرط a صدق می‌کند. اگردقیقاً k گروه نایکریخت در شرط a صدق کنند و $k \geq ۲$، آنگاه گوییم گروه G، $k-$شناسایی‌پذیر است. بررسی مسئله بالا را، تشخیص‌پذیری با شرط a گویند. تشخیص‌پذیری با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط بی که از دیرباز به همراه شی از جمله محققین بنام در مسائل تشخیص‌پذیری بودند، در یک مقاله به زبان چینی بیان شد. بی در طی چندین مقاله نشان داد که گروههای ساده $A_۱(q)$، $A_n(q)$، ${}^۲A_n(q)$، $C_۲(q)$، گروههای متناوب و $Sz(۲^{۲m+۱})$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیرند. همچنین بهروز خسروی نشان داد که گروههای ساده ماتیو و یانکو با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیرند.

در فصل دوم این رساله نشان می‌دهیم که گروه ساده ${}^۲D_n(q)$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیر است. حاصل نتایج این فصل رساله، مقاله‌ای است تحت عنوان

A characterization of ${}^2D_n(2^k)$ by sylow normalizers' orders

که در سال ۲۰۰۸ میلادی در مجله

International Journal of Algebra

به چاپ رسیده است. همچنین نتایج این فصل به صورت سخنرانی در سمیناری که در زمستان ۱۳۸۵ در شهر رفسنجان تحت عنوان

سمینار جبرخطی و کاربردهای آن، همراه با کارگاه موجک

برگزار گردید، ارائه شد. بعلاوه خلاصه‌ای از این فصل در کنفرانسی تحت عنوان

International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of D. K. Faddeev

که در سال ۲۰۰۷ میلادی در کشور روسیه برگزار گردید، پذیرش سخنرانی گرفت.

با اینکه تمام گروههای ذکر شده در قبل زمینه ساز طرح حدسی مبنی بر تشخیص‌پذیری همه‌ی گروههای ساده متناهی با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو بودند، اما همچنان درستی این حدس در هاله‌ای از ابهام بود. با توجه به قضیه مرتبه ساده آرتین، احتمال ایجاد مشکل توسط گروههای غیریکریخت $B_n(q)$ و $C_n(q)$ در حدس فوق بیش از گروههای دیگر می‌باشد. بنابراین در فصل سوم این رساله به بررسی تشخیص‌پذیری گروههای ساده $B_n(q)$ و $C_n(q)$ و همچنین گروه ساده $D_n(q)$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو می‌پردازیم که به این ترتیب پرونده تشخیص‌پذیری گروههای ساده کلاسیک با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو بسته می‌شود. در این فصل ابتدا به محاسبه مرتبه نرمالسازهای زیرگروههای سیلوی فرد می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که مرتبه نرمالسازهای تمام زیرگروههای سیلوی فرد $B_n(q)$ و $C_n(q)$ با هم برابرند. همچنین نشان می‌دهیم که مرتبه نرمالسازهای ۲− زیرگروههای سیلوی $B_n(q)$ و $C_n(q)$ با هم برابرند اگر و تنها اگر $q \not\equiv \pm ۳ \pmod ۸$. با این توضیحات پی می‌بریم که ابهام اولیه درباره این حدس چندان هم بیراه نبوده و گروههای غیر یکریخت $B_n(q)$ و $C_n(q)$ که $n \geq ۳$ و $q \equiv \pm ۱ \pmod ۸$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیر نمی‌باشند. در ادامه‌ی این فصل با بکارگیری تکنیک‌هایی جدید نشان می‌دهیم که گروههای ساده $B_n(q)$، $C_n(q)$ که $n \geq ۳$ و $q \not\equiv \pm ۱ \pmod ۸$ و $D_n(q)$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو تشخیص‌پذیرند. همچنین گروههای

ساده غیریکریخت $B_n(q)$ و $C_n(q)$ که $n \geq ۳$ و $q \equiv \pm ۱ \pmod{۸}$ با مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلو ۲− شناساییپذیرند. اما در حین محاسبه مرتبه نرمالساز زیرگروههای سیلوی $B_n(q)$ و $C_n(q)$، بوضوح می‌بینیم که این مراتب از یک قاعده قابل تشخیص پیروی می‌نمایند. در ادامه با بهره‌برداری از این قاعده موفق به تدوین برنامه‌ای در GAP برای محاسبه مرتبه نرمالسازهای زیرگروههای سیلو گروههای $B_n(q)$ و $C_n(q)$ و همچنین محاسبه نرمالسازهای زیرگروههای سیلوی گروههای تقریباً ساده $SO_{۲n+۱}(q)$ و $Sp_{۲n}(q)$ می‌پردازیم. به سهولت این برنامه‌ها قابل توسیع برای تمام گروههای ساده کلاسیک می‌باشند که به عنوان یک نمونه برنامه‌ای برای محاسبه مرتبه نرمالسازهای زیرگروههای سیلوی گروه ساده $D_n(q)$ را تدوین می‌کنیم. نتایج حاصل از این فصل در غالب مقاله‌ای تحت عنوان

On the sylow normalizers of some simple classical groups

تدوین و به منظور داوری به یکی از مجلات معتبر علمی ارسال شده است. همچنین خلاصه‌ای از این مقاله در سخنرانی تحت همین عنوان در کارگاه

First de Brun Workshop on Computational Algebra

که در تابستان ۲۰۰۸ میلادی در دانشگاه

National University of Ireland, Galway

برگزار گردید، ارائه شد. برنامه‌های بیان شده به منظور سهولت در محاسبات مسائل مربوط به زیرگروههای سیلو برای یکی از اعضای گروه GAP فرستاده شد که مورد استقبال قرار گرفت.
با توجه به اینکه زیرگروههای سیلو نقش مهمی در شناسایی ساختار گروه بازی می‌کنند، پس جای تعجب نیست که بعد از مشخص کردن ساختار تمام زیرگروههای سیلو گروههای ساده کلاسیک، بتوانیم با اندکی تغییرات به سراغ انواع دیگری از تشخیص‌پذیری‌ها برویم. تشخیص‌پذیری با مرتبه زیرگروههای

آبلی ماکسیمال اولین بار در سال ۲۰۰۰ در پایان نامه فوق لیسانس وَنگ بیان شد. خود وَنگ نشان داد $k_۳$−گروهها، گروههای ساده ماتیو، گروههای یانکو، گروههای A_n که $n \leq ۱۰$، $PSL_۲(۲^n)$ و $Sz(۲^{۲m+۱})$ با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال تشخیص‌پذیرند. همچنین چِن در سال ۲۰۰۶ نشان داد که گروههای متناوب با گراف اول سه مؤلفه‌ای با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال تشخیص‌پذیرند. با فرض اینکه $n = ۲^m \geq ۴$ و $k \geq ۳$ بطوریکه $|k|_۲ = ۲$، در فصل چهارم این رساله قضایایی را بیان می‌کنیم که مبین تشخیص‌پذیری گروههای ساده $B_n(q)$ و $A_{۳^k}(۲)$ با مرتبه زیرگروههای آبلی ماکسیمال می‌باشند. گراف ناجابه‌جایی گروه دلخواه G گرافی‌است که مجموعه رئوس آن $G - Z(G)$، که $Z(G)$ نشان‌دهنده مرکز گروه G است، می‌باشد و در این گراف دو رأس دلخواه x و y به هم متصلند اگر وتنها اگر $xy \neq yx$. در سال ۲۰۰۶، عبداللهی و همکارانش حدسی را مبنی بر تشخیص‌پذیری گروههای ساده با گراف ناجابه‌جایی بیان کردند. با یافتن ارتباطی مناسب بین تشخیص‌پذیری با گراف ناجابه‌جایی و مرتبه مؤلفه‌های همبندی گراف اول، تاکنون تشخیص‌پذیری با گراف ناجابه‌جایی تقریباً تمام گروههایی که گراف اول ناهمبند دارند و تشخیص‌پذیری آنها با مرتبه مؤلفه‌های همبندی گراف اول ثابت شده، نشان داده شده است. اما تشخیص‌پذیری با گراف ناجابه‌جایی گروههایی با گراف اول همبند همچنان به عنوان مسئله‌ای در نظریه‌ی گروهها باقی‌است. جدیداً شی و وَنگ تشخیص‌پذیری با گراف ناجابه‌جایی گروه ساده $A_{۱۰}$ که دارای گراف اول همبند می باشد را در مقاله‌ای بسیار کوتاه اثبات کرده‌اند. در پی این مسئله ما هم به دنبال یافتن راهی برای بررسی تشخیص‌پذیری با گراف ناجابه‌جایی بعضی از گروههای ساده با گراف اول همبند بودیم که در نهایت موفق به اثبات تشخیص‌پذیری گروه $A_{3^k}(2)$ با گراف ناجابه‌جایی شدیم. نتایج این فصل در غالب مقاله‌ای تحت عنوان

A characterizaton of $B_n(q)$ by the set of orders of maximal abelian subgroups

از مجله

International Journal of Algebra and Computation

پذیرش چاپ دریافت کرده است. همچنان قسمتی دیگر از نتایج این بخش در غالب مقاله‌ای تحت عنوان

About the characterization of $A_{3^k}(2)$

تدوین و برای داوری به یکی از مجلات علمی معتبر فرستاده شده است. بعلاوه خلاصه‌ای از این مقاله تحت همین عنوان در

سی و نهمین کنفرانس ریاضی کشور

که در تابستان ۱۳۸۷ در شهر کرمان برگزار گردید پذیرش سخنرانی دریافت کرد.

فصل ۱

مطالبی راجع به نظریه گروههای متناهی

۱.۱ مقدمه

این فصل را به بیان تعاریف و قضایایی در نظریه گروههای متناهی اختصاص داده‌ایم که در فصول آتی این رساله به کرات مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۲.۱ گروههای متناهی

قضایا و لم های این بخش از مرجع [۵۹] انتخاب شده اند.

تعریف ۱.۲.۱ [صفحه ۹] گیریم G یک گروه و $H \leq G$. زیرگروه H را زیرگروه مشخص G گوییم هرگاه به ازای هر خودریختی G مانند τ، $\tau(H) \leq H$ که $\tau(H) = \{\tau(h) \mid h \in H\}$. هرگاه H زیرگروه مشخص G باشد، می‌نویسیم $H\ ch\ G$.

قضیه ۱.۲.۱ [قضیه ۵.۱.۱] گیریم G گروهی دلخواه و $K \leq H \leq G$. آنگاه:

۱) اگر $K\ ch\ H$ و $H\ ch\ G$، آنگاه $K\ ch\ G$.

۲) اگر $H \trianglelefteq G$ و $K\ ch\ H$، آنگاه $K \trianglelefteq G$.

تعریف ۲.۲.۱ [صفحه ۱۰۶] یک سری نرمال برای گروه G زنجیری مانند

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

از زیرگروههای نرمال G است. به گروههای خارج‌قسمتی G_{i+1}/G_i، که $0 \leq i \leq k-1$، عوامل سری گفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ [صفحه ۱۰۶] فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. سری نرمال

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

یک سری اصلی G نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $0 \leq i \leq k-1$، عامل G_{i+1}/G_i یک زیرگروه نرمال مینیمال گروه G/G_i باشد، یعنی هیچ زیرگروه نرمالی مانند N از G وجود ندارد که $G_i < N < G_{i+1}$. هر گروه خارج‌قسمتی G_{i+1}/G_i را یک عامل اصلی G می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱ [صفحه ۱۰۶] گروه غیربدیهی G را مشخصاً ساده می‌گوییم در صورتی که تنها زیرگروههای مشخص آن ۱ و G باشند.

قضیه ۲.۲.۱ [قضیه ۵.۲.۵] گیریم G یک گروه متناهی غیربدیهی باشد. در اینصورت G مشخصاً ساده است اگر و تنها اگر G به حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروههای ساده خود که دو به دو یکریخت‌اند، تجزیه شود.

قضیه ۳.۲.۱ [صفحه ۱۶](**قانون مدولی ددکیند**[1]) گیریم H ، K و L زیرگروههایی از G باشند بطوریکه $K \leq L$. آنگاه $(H \cap L)K = (HK) \cap L$.

قضیه ۴.۲.۱ [قضیه ۱۲.۱.۴](**استدلال فراتینی**[2]) گیریم G گروهی متناهی و $H \lhd G$ باشد. اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$، آنگاه $G = N_G(P)H$.

قضیه ۵.۲.۱ [قضیه ۶.۳.۲](**قضیه نرمالساز–مرکزساز**) گیریم G گروهی دلخواه و $H \leq G$ باشد. آنگاه

۱) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$؛

۲) $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

نکته ۱.۲.۱ بوضوح هر زیرگروه نرمال مینیمالی از یک گروه، یک زیرگروه مشخصاً ساده از آن گروه است.

۳.۱ گروههای ساده

تعریف ۱.۳.۱ گروه G را ساده نامیم هر گاه G هیچ زیرگروه نرمال سره غیربدیهی نداشته باشد.

مفهوم گروه ساده را گالوا در سال ۱۸۳۰ معرفی کرد. اما اهمیت گروههای ساده در نظریه گروهها از چه حیث است؟ این گروهها همانند اعداد اول یا عناصر در شیمی هستند، یعنی زیربنای اصلی همه‌ی گروهها

[1] Dedekind's modular law

[2] Frattini's argument

می‌باشند. A_n برای $n \geq ۵$، خانواده‌ای نامتناهی از گروههای ناآبلی ساده است. ساده بودن این گروهها را برای اولین بار گالوا ملاحظه کرد. کشف بعدی را جردان در سال ۱۹۸۰ انجام داد. او ثابت کرد چهار خانواده‌ی نامتناهی از گروههای ماتریسی ساده روی میدان p عضوی که p عدد اول است وجود دارد. بین سال‌های ۱۸۹۲ و ۱۹۰۵ لئونارد دیکسون ریاضیدان آمریکایی نتایج جردان را برای میدان‌های متناهی دلخواه تعمیم داد و خانواده‌های جدید دیگری از گروههای ساده را کشف کرد. اولین بار براوئر ملاحظه کرد که مرکزساز یک عضو مرتبه ۲ ابزار مهمی برای مطالعه گروههای ساده است و به این ترتیب مراحل اولیه راه طویل و پر پیچ و خمی که به رده‌بندی کامل همه‌ی گروههای ساده‌ی متناهی منجر شد پایه‌گذاری شد. چند سال بعد تامپسون در رساله دکتری خود ایده‌ای قاطع برای مطالعه‌ی نرمالسازهای زیرگروههایی با مرتبه توانی از عدد اول معرفی کرد. در اوایل ۱۹٦۰، فیت و تامپسون قضیه‌ی بسیار مهم خود را ثابت کردند که می‌گوید مرتبه‌ی هر گروه ناآبلی ساده متناهی زوج است. شخصی که اولین بار این خاصیت را در سال ۱۹۰۰ حدس زد ویلیام برنساید ریاضیدان مشهور انگلیسی بود و اثبات قضیه‌ی فیت—تامپسون یک جلد کامل از حدود ۲۵۵ صفحه‌ی ژورنالی را که در آن چاپ شد اشغال کرد. در دهه‌ی ۱۹٦۰، تعدادی از ریاضیدانان روش‌هایی را که در اثبات قضیه‌ی فیت—تامپسون معرفی شده بود را توسعه دادند. بعلاوه در خلال سال‌های ۱۹٦٦ و ۱۹۷۵ نوزده گروه ساده پراکنده کشف شد. علی‌رغم موفقیت‌های جالبی که در تحقیقات نظریه‌ی گروههای متناهی رخ داد دهه‌ی ۱۹٦۰ در حالی به پایان رسید که بسیاری از ریاضیدانان رده‌بندی گروههای ساده را ناممکن می‌دانستند. بدبینان از گروههای ساده‌ی پراکنده که ممکن بود همه‌ی تلاش‌ها را با شکست مواجه کند بیم داشتند. دیگرانی که خوش‌بین بودند، پیش‌بینی می‌کردند این مهم در دهه‌ی ۱۹۹۰ انجام شود. دهه ۱۹۷۰ در حالی آغاز شد که تامپسون به خاطر سهم عمده‌اش در نظریه گروههای ساده، جایزه فیلدز را دریافت کرد. در ادامه در یک سری مقاله خیره‌کننده، اشباخه بینش خود و روش تامپسون را که در دهه ۱۹٦۰ تعمیم داده شده بود و دید هندسی را که فیشر از متقدمین آن بود ترکیب کرد و به نتیجه‌ی برجسته‌ای رسید. در واقع اشباخه و دیگران در

سال ۱۹۶۷ چنین پیشرفت‌هایی را انجام دادند تا بر هر کسی واضح شود که به اندازه‌ی کافی روش برای تکمیل رده‌بندی گروههای ساده در اختیار ماست و تنها جزییات اثبات باقی مانده است. دهه‌ی ۱۹۸۰ در حالی آغاز شد که جایزه کول، جایزه انجمن ریاضی آمریکا، به اشباخه تعلق گرفت. در نهایت ۲۰ سال جنگ رده‌بندی گروههای ساده، وقتی که گورنشتاین در ژانویه ۱۹۸۱ در یک اجتماع انجمن ریاضی آمریکا اعلام کرد که همه‌ی گروههای ساده رده‌بندی شده‌اند و اکنون فهرست کامل همه‌ی گروههای ساده متناهی در اختیار ماست، پایان گرفت. اثبات این که لیست کامل است، حدود ۱۰۰۰۰ صفحه ژورنال است. آخرین گروه ساده پراکنده را رابرت گریس بدست آورد. این گروه به هیولا معروف است و مرتبه آن‌تقریباً 8×10^{53} است. هیولا، بزرگترین گروه ساده پراکنده، گروه چرخش‌ها با بعد ۱۹۶۶۸۸۳ است. برخی کاشفین گروههای پراکنده دیگر عبارتند از: امیل ماتیو، کول، میلر، لئونارد دیکسون، دیودونه، چولی، براوئر، فلوئر، دانیل گورنشتاین و جان کانوی ([۶۰]). در ادامه به معرفی برخی خانواده گروههای ساده و متناهی می‌پردازیم.

تعریف ۲.۳.۱ گیریم F یک میدان متناهی با مشخصه p، V یک فضای برداری n−بعدی روی میدان F و $\delta \in Aut(F)$ بطوریکه $\delta^2 = 1$.

تابع $h : V \times V \longrightarrow F$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در خواص زیر صدق کند:

۱) برای هر $v \in V$، $h(v,.) : V \longrightarrow F$ خطی باشد؛

۲) برای هر $v \in V$، $h(.,v) : V \longrightarrow F$ خطی باشد؛

۳) برای هر $u,\ v \in V$، $h(u,v) = \epsilon h(v,u)^\delta$ که $\epsilon \in \{1,-1\}$.

گیریم $h \equiv 0$ یا قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} I(V) &= I(V,h) \\ &= \{T \in GL(V) \mid h(T(u),T(v)) = h(u,v)\ ,u,\ v \in V \ \text{برای هر}\}. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \Omega(V) &= \Omega(V,h) = [I(V), I(V)]; \\ PI(V) &= I(V)/Z(I(V)) = I(V)/\{\alpha I \in I(V)\}; \\ P\Omega(V) &= \Omega(V)/Z(\Omega(V)) = \Omega(V)/\{\alpha I \in \Omega(V)\}, \end{aligned}$$

در اینصورت

۱) اگر $h \equiv ۰$، آنگاه $I(V) = GL(V)$ و $\Omega(V) = SL(V)$. در این حالت می‌توان فرض کرد $I(V) = GL_n(q)$ و $\Omega(V) = SL_n(q)$. گروه $PSL_n(q)$ گروه تصویری خاص نامیده و با یکی از نمادهای $PSL_n(q)$، $L_n(q)$ یا $A_{n-۱}(q)$ نمایش داده می‌شود. می‌توان دید

$$A_۱(۲) \cong S_۳, \quad A_۱(۳) \cong A_۴.$$

غیر از حالات فوق، برای $n \geq ۲$، $L_n(q)$ همواره گروهی ساده است. در مورد مرتبه این گروهها داریم:

$$\begin{aligned} |GL_n(q)| &= q^{n(n-۱)/۲}(q-۱)(q^۲-۱)...(q^n-۱); \\ |SL_n(q)| &= |GL_n(q)|/d, \quad d = q-۱; \\ |PSL_n(q)| &= |SL_n(q)|/e, \quad e = (n, q-۱). \end{aligned}$$

۲) اگر $\delta = id$ و $\epsilon = -۱$، آنگاه $I(V) = \Omega(V) = Sp(V)$ و h یک فُرم سیمپلکتیک نامیده می‌شود. در این حالت می‌توان فرض کرد $I(V) = \Omega(V) = Sp_{۲n}(q)$. گروه $PSp_{۲n}(q)$ گروه سیمپلکتیک تصویری نامیده می‌شود و با یکی از نمادهای $S_{۲n}(q)$ یا $C_n(q)$ نمایش داده می‌شود. می‌توان دید

$$C_۲(۲) \cong S_۶, \ Sp_۲(q) \cong SL_۲(q), \ PSp_۲(q) \cong A_۱(q).$$