دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

تعمیم و کاربرد اعداد فیبوناچی

نگارش

وحید سلیمان زاده

استاد راهنما

دکتر محمود بیدخام

استاد مشاور

دکتر مجید اسحاقی

دی ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس بی‌حد خدای را که هر چه دارم از رحمت بی انتهای اوست و زبان قاصر از شکرگزاریش می‌باشد. بی‌شک این پروژه بدون یاریش به اتمام نمی‌رسید. خدارا شاکر و از او می خواهم، همواره مرا از دریای بیکران علم و معرفتش سیراب نماید.

قدردانی و تشکر

در ابتدا لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام وهمسرفداکارم و کلیه کسانی که در دوران تحصیل مشوق و پشتیبان اینجانب بوده‌اند کمال تشکر را بنمایم، همچنین از زحمات اساتید محترم دانشگاه سمنان و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمود بیدخام که با راهنمایی‌های خود راهگشای اینجانب بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به :

پدر

مادر

و همسرم

چکیده

با توجه به کاربرد فراوان دنباله فیبوناچی در علوم مختلف از جمله ریاضیات، فیزیک و... در این پایان نامه ابتدا به بررسی اعداد فیبوناچی، لوکاس و روابط آن ها با نسبت طلایی می پردازیم، سپس باتوجه به کاربرد ماتریس ها، چندجمله ای ها و دنباله های ترایبو ناچی ویژگی هایی از دنباله های تعمیم یافته مرتبط با فیبوناچی تحلیل و بررسی خواهند شد. این نظریه‌ها برای دنباله های فیبوناچی k – مرحله‌ای توسعه و سرانجام کاربردهایی از مطالب بالا را بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: دنباله فیبوناچی – دنباله لوکاس – نسبت طلایی – چندجمله‌ای ها – ماتریس ها – دنباله فیبوناچی k – مرحله‌ای – دنباله ترایبوناچی – احتمال.

مقدمه

لئوناردو فیبوناچی در سال ۱۲۲۵ میلادی دنباله‌ای از اعداد را به جهان علم ریاضی معرفی کرد که نه تنها مورد توجه دانشمندان علم ریاضی بلکه نظر اندیشمندان سایر علوم را نیز به خود جلب کرد. در این پایان نامه با معرفی اعداد فیبوناچی و استفاده از خواص ماتریس ها، دنباله ی ترایبوناچی را مورد مطالعه و بررسی قرار خواهیم داد. این پایان نامه شامل پنج فصل است:

در فصل اول، به بیان تعاریف، نظریه‌های کاربردی، روابط بین اعداد فیبوناچی، لوکاس و تعمیم آن ها می پردازیم.

در فصل دوم، رابطه ی ذاتی بین نسبت طلایی با دنباله فیبوناچی را بیان می کنیم و همچنین فرمول باینت را برای اعداد فیبوناچی، لوکاس و تعمیم آن ها به کار می گیریم.

در فصل سوم، چندجمله‌ای های فیبوناچی، لوکاس و تعمیم آن ها را بیان و ریشه‌های آن ها را بررسی می کنیم، در ادامه به معرفی چندجمله‌ای های جاکوبسال و چندجمله‌ای های دو متغیره تعمیم یافته‌ی فیبوناچی، می پردازیم.

در فصل چهارم توضیح می دهیم که چگونه روابط بازگشتی فیبوناچی به ماتریس ها توسعه خواهند یافت، سپس روابط بین اعداد فیبوناچی و لوکاس را شناسایی و در انتهای این فصل ماتریس چندجمله ای های جاکوبسال را معرفی و مورد مطالعه قرار می دهیم.

سرانجام در فصل پنجم خواهیم دید که چگونه می توان روابط بازگشتی را با تکیه بر بیش از دو جمله‌ی قبلی، جمله ی بعدی را ایجاد کرد و همچنین به بررسی اعداد فیبوناچی $k-$مرحله‌ای و ماتریس های $k-$مرحله‌ای پرداخته و در پایان به کاربرد مباحث فوق در احتمالات خواهیم پرداخت.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ لئوناردو فیبوناچی

لئوناردو فیبوناچی[۱] در سال ۱۱۷۰ میلادی در شهر پیزا در کشور ایتالیا به دنیا آمد. او در شمال آفریقا تعلیم دیده، بعد به جاهای گوناگون از جمله اطراف ساحل مدیترانه در اروپا، آفریقا و آسیا مسافرت کرد. از میان مسافرت هایش مطالب مختلفی از سیستم های عددی به انضمام سیستم عربی و هندی یاد گرفت که در آن زمان فقط تعداد کمی در اروپا آن را می دانستند. هنگامی که او در سال ۱۲۰۰ میلادی به پیزا برگشت شروع به نوشتن کتابی تحت عنوان لایبر آباسی[۲] کرد که تعمیمی از سیستم های عربی و هندی بوده و امروزه نیز از آن استفاده می گردد.

۲.۱ مسأله خرگوش و دنباله فیبوناچی

این مسأله در کتاب لایبر آباسی فیبوناچی طراحی شد که یک مدل افزایشی در جمعیت خرگوش ها بود. او می خواست یک جفت از خرگوش های تازه بدنیا آمده را خریداری و در یک‌جا محدود کند. این جفت و هر جفت بعدی، یک جفت جدید در هر ماه تولید می کند که شروع آن در ماه دوم از سنشان است. چند جفت بعد از یک، دو و ...، ماه بوجود خواهد آمد؟ فرض کنیم مرگی اتفاق

[۱] Fibonacci
[۲] Liber Abaci

نمی افتد و همچنین n بیانگر ماه n ام باشد، وقتی $n = ۱$ فقط اولین جفت وجود دارد، وقتی $n = ۲$ این جفت به تولید مثل نمی رسد، اما وقتی $n = ۳$ آنها یک جفت به دنیا می آورند. در این صورت، دو جفت وجود دارد. وقتی $n = ۴$ اولین جفت تولید مثل خواهد کرد اما جفت دوم نمی تواند، لذا سه جفت وجود خواهد داشت. دنباله زیر را در صورت افزایش n داریم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد جفت ها	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵

فرض کنید x_n تعدا جفت های خرگوش پس از n ماه باشد. می دانیم که $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۱$. تعداد جفت خرگوش ها در ماه $n + ۱$ ام برابر خواهد بود با حاصل جمع تعداد جفت خرگوش هایی که در این ماه متولد می شوند با تعداد جفت خرگوش های موجود، (x_n). اما چون هر جفت خرگوش که از دو ماه قبل موجود بوده هم اکنون حداقل دو ماه سن دارند و به سن زاد و ولد رسیده اند، تعداد جفت خرگوش های متولد شده برابر خواهد بود با $x_{n-۱}$، پس خواهیم داشت:

$$x_{n+۱} = x_n + x_{n-۱} \quad ; \quad x_۱ = ۱ \ , \ x_۲ = ۱$$

فیبوناچی با حل این مسأله از راه فوق دنباله ای را به جهان ریاضیات معرفی کرد که خواص شگفت انگیز و کاربرد های فراوان آن تا به امروز نه تنها نظر ریاضیدانان بلکه نظر دانشمندان بسیاری از رشته های دیگر را به خود جلب کرده است.

تعریف ۱.۲.۱ برای هر عدد حقیقی $n \geq ۰$، رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی به صورت زیر است:

$$F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n \ , \qquad (۱.۱)$$

با شرط اولیه ی

$$F_۰ = ۰ \quad , \quad F_۱ = ۱ \ .$$

۳.۱ دنباله لوکاس

ادوارد لوکاس [۱] یک ریاضیدان فرانسوی بود که در قرن نوزدهم، بین سال‌های ۱۸۹۱ — ۱۸۴۲ زندگی می کرد. او کار هایی در زمینه ی دنباله ی فیبوناچی انجام داد، در حقیقت مصمم بود که دنباله ای به این نام بدهد. یکی از کمک هایش در آزمایش، برای ارزش بنیادی از دنباله بود. ارزش بنیادی نخستین داده هایی هستند که در فرمول (۱.۱) برای تعریف یک دنباله نیاز می شوند. اگر ما مقدار $n = ۰$ را در رابطه (۱.۱) قرار دهیم و ارزش بنیادی $F_۰ = ۰$ و $F_۱ = ۱$ باشد دنباله فیبوناچی حاصل می گردد، اما می توانیم دو عدد صحیح مختلف بعنوان $F_۰$ و $F_۱$ را انتخاب کنیم تا دنباله ی مختلفی ایجاد گردد.

هرچند ادوارد لوکاس در سال ۱۸۷۷ با استفاده از $F_۰ = ۲$ و $F_۱ = ۱$ متوجه شد دنباله ۲ ، ۱ ، ۳ ، ۴ ، ۷ ، ۱۱ ، ۱۸ ، ۲۹ ، ۴۷ ، ...، از رابطه بازگشتی (۱.۱) تولید می شود. این دنباله خاص معروف به دنباله لوکاس است. بنابراین،

$$L_۰ \,,\, L_۱ \,,\, L_۲ \,,\, \ldots = ۲ \,,\, ۱ \,,\, ۳ \,,\, \ldots \quad .$$

۴.۱ تعمیم دنباله فیبوناچی

چنان که در دنباله فیبوناچی، دو مقدار اولیه را بطور دلخواه انتخاب کنیم بطوریکه رابطه بازگشتی حاصل شده تعمیمی از دنباله فیبوناچی باشد، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $p \,,\, q \in \mathbb{Z}^+$ و $G_۰ = p$ و $G_۱ = q$، داشته باشیم

$$G_{n+۲} = G_{n+۱} + G_n \qquad , \quad n \geq ۰ \tag{۲.۱}$$

تعمیم دنباله ی فیبوناچی را تولید می کند.

---

[۱] Lucas

حال ده جمله ی اول آن را داریم:

$$\begin{aligned} G_0 &= p \\ G_1 &= q \\ G_2 &= p+q \\ G_3 &= p+2q \\ G_4 &= 2p+3q \\ G_5 &= 3p+5q \\ G_6 &= 5p+8q \\ G_7 &= 8p+13q \\ G_8 &= 13p+21q \\ G_9 &= 21p+34q \end{aligned} \tag{3.1}$$

تذکر ۲.۴.۱ توجه کنید که برای $p=0$ و $q=1$ دنباله فیبوناچی حاصل می شود. برای $p=2$ و $q=1$ دنباله لوکاس بدست می آید. برای هر $n\geq 1$ می توان گفت:

$$G_n = F_{n-1}p+F_nq \ . \tag{4.1}$$

زیرا:

فرض کنید α_n و β_n دو دنباله با مقادیر اولیه متفاوت بوده که بوسیله ی رابطه بازگشتی در (۲.۱) تولید می شود. همچنین فرض کنید که $G_n=\alpha_np+\beta_nq$ و $G_{n+1}=\alpha_{n+1}p+\beta_{n+1}q$، آنگاه

$G_{n+2}=(\alpha_n+\alpha_{n+1})p+(\beta_n+\beta_{n+1})q\equiv\alpha_{n+2}p+\beta_{n+2}q$.

اگر $\alpha_0=1$ و $\beta_0=0$ و $\alpha_1=0$ و $\beta_1=1$ در (۳.۱) مشخص و برقرار باشد.

$$\begin{aligned} G_0 &= \alpha_0p+\beta_0q=p \\ G_1 &= \alpha_1p+\beta_1q=q \\ G_2 &= \alpha_2p+\beta_2q=p+q \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_۳ &= \alpha_۳ p + \beta_۳ q = p + ۲q \\
G_۴ &= \alpha_۴ p + \beta_۴ q = ۲p + ۳q \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\alpha_۲ &= \alpha_۱ + \alpha_۰ = ۰ + ۱ = ۱ \\
\beta_۲ &= \beta_۱ + \beta_۰ = ۱ + ۰ = ۱ \\
\alpha_۳ &= \alpha_۲ + \alpha_۱ = ۱ + ۰ = ۱ \\
\beta_۳ &= \beta_۲ + \beta_۱ = ۱ + ۱ = ۲ \\
\alpha_۴ &= \alpha_۳ + \alpha_۲ = ۱ + ۱ = ۲ \\
\beta_۴ &= \beta_۳ + \beta_۲ = ۲ + ۱ = ۳ \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

توجه کنید، مقادیر اولیه $\alpha_۰ = ۱$ و $\alpha_۱ = ۰$ از α_n، دنباله ی $\alpha_۲\ ,\ \alpha_۳\ ,\ \alpha_۴\ ,\ ... = ۱,۱,۲,۳,...$ را نتیجه می دهد، در حالیکه با مقادیر اولیه $\beta_۰ = ۰$ و $\beta_۱ = ۱$ دنباله ی $\beta_۱\ ,\ \beta_۲\ ,\ \beta_۳\ ,\ \beta_۴\ ,\ ... = ۱,۱,۲,۳,...$ حاصل می شود. بنابراین $\alpha_n = \beta_{n-۱} = F_{n-۱}$، زیرا:

$$
\left.\begin{array}{lll}
\alpha_۲ = ۱ & \alpha_۳ = ۱ & \alpha_۴ = ۲ \\
F_۱ = ۱ & F_۲ = ۱ & F_۳ = ۲ \\
\beta_۱ = ۱ & \beta_۲ = ۱ & \beta_۳ = ۲
\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_n = \beta_{n-۱} = F_{n-۱}
$$

که $n \geq ۲$.

اگر $n = ۱$ باشد، در این صورت $\alpha_۱ = \beta_۰ = F_۰$ در حالیکه در دنباله ی بالا دنباله ی ابتدایی از $\alpha_۲$ و همچنین $\beta_۱$ شروع شد لذا $\alpha_۱$ و $\beta_۰$ کاربردی در دنباله ندارد.

طبق فرض $G_n = \alpha_n p + \beta_n q = F_{n-۱}p + F_n q$ و $G_{n+۲} = \alpha_{n+۲}p + \beta_{n+۲}q = F_{n+۱}p + F_{n+۲}q$ می باشد. کافی است در رابطه $G_{n+۲}$، بجای n قرار دهیم $n-۲$، بنابراین $G_n = F_{n-۱}p + F_n q$.

رابطه (۴.۱) در بخش دو استفاده خواهد شد و در رابطه های خیلی زیادی استفاده می شود که در

بخش بعدی روی آن متمرکز می شویم.

۵.۱ رابطه بین اعداد فیبوناچی و لوکاس

یکی از حوزه های تحقیقاتی در این متن تعدادی از روابط بین دنباله های فیبوناچی، لوکاس و تعمیم آن ها است، به عبارت دیگر با استفاده از جملات یک دنباله، دنباله ی دیگر محاسبه می گردد.
جدول زیر نشان می دهد که اعداد لوکاس و اعداد فیبوناچی از یکدیگر نتیجه می شوند.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
L_n	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶
F_n	۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴

$$\begin{aligned} n &= 0 \;;\; L_1 = F_0 + F_2 \\ n &= 1 \;;\; L_2 = F_1 + F_3 \\ &\vdots \\ n &= 9 \;;\; L_9 = F_8 + F_{10} \end{aligned}$$

قضیه ۱.۵.۱ برای هر $n \geq 1$،

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \quad . \tag{5.1}$$

برهان:

فرض کنید $n = 1$،

$$L_1 = 1 = 1 + 0 = F_2 + F_0 \quad .$$

پس رابطه برای $n = 1$ برقرار است. فرض کنید که رابطه برای $n = k$ درست است یعنی $L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$، آنگاه باید ثابت کنیم برای $n = k + 1$ رابطه ی $L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$ برقرار

است.

می دانیم که $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$ و طبق فرض استقرا داریم : $L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$ پس $L_{k-1} = F_{k-2} + F_k$، بنابراین

$$L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = F_{k-1} + F_{k+1} + F_{k-2} + F_k = F_k + F_{k+2} \Rightarrow L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$$.

$\square$

فصل ۲

رابطه‌ی نسبت طلایی با اعداد فیبوناچی

۱.۲ نسبت طلایی

کپلر[۱] در سال های ۱۵۷۱ تا ۱۶۳۰ میلادی زندگی می کرد. او ویژگی هایی از نسبت $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ را مشاهده کرد. در این خصوص وقتی $n \to \infty$، $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ همگرا هستند. در جدول زیر ده جمله ی اول از این دنباله را می بینید.

n	F_{n+1}/F_n
۱	۱.۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۲	۲.۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۳	۱.۵۰۰۰۰۰۰۰۰
۴	۱.۶۶۶۶۶۶۶۶۷
۵	۱.۶۰۰۰۰۰۰۰۰
۶	۱.۶۲۵۰۰۰۰۰۰
۷	۱.۶۱۵۳۸۴۶۲
۸	۱.۶۱۹۰۴۷۶۲
۹	۱.۶۱۷۶۴۷۰۶
۱۰	۱.۶۱۸۱۸۱۸۲

با توجه به جدول، دنباله ظاهرا همگرا می باشد.

---
[۱] Kepler

کپلر کشف کرد که وقتی $n \to \infty$، $\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \tau \equiv \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.61803399...$. این عدد، به نسبت طلایی یا ثابت فیبوناچی مشهور است. اگر چه راه های زیادی برای پیدا کردن دقیق نسبت طلایی وجود دارد.

نحوه ی بدست آوردن نسبت طلایی برای اعداد فیبوناچی:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n+F_{n-1}}{F_n} = 1+\frac{F_{n-1}}{F_n} = 1+\frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \quad . \tag{1.2}$$

فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = x$. چنانکه $n \to \infty$، $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim \frac{F_n}{F_{n-1}}$، بنابراین معادله را می توان بازنویسی کرد:

$$x = 1+\frac{1}{x} \Longleftrightarrow x^2-x-1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad .$$

همچنین $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ دنباله ی حقیقی و مثبت است، حد این دنباله نیز باید مثبت باشد، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \ . \tag{2.2}$$

ریشه مزدوج از $x^2-x-1=0$ دلالت بر $\delta = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$ دارد. همچنین نسبت طلایی برای اعداد لوکاس نیز برقرار است یعنی وقتی $n \to \infty$، $\frac{L_{n+1}}{L_n} \longrightarrow \tau$، و برای تعمیم اعداد فیبوناچی هم درست است، زیرا:

با توجه به رابطه ی (۴.۱) از فصل ۱ داریم:

$$G_n = F_{n-1}p+F_nq$$

و همچنین وقتی $n \to \infty$، $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim \frac{F_n}{F_{n-1}} = \tau$ و $\lim \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\tau}$، لذا:

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{F_np+F_{n+1}q}{F_{n-1}p+F_nq}$$