دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - جبر و توپولوژی

حلقه توابع پیوسته‌ای که در بی‌نهایت صفر می‌شوند

استاد راهنما

دکتر علی اکبر استاجی

استاد مشاور

دکتر محمد جانفدا

نگارش

علی ثقفی خراسانی

تابستان ۱۳۹۱

فرم ۱۱۴ –ت

شماره :

تاریخ :

دانشگاه حکیم سبزواری

معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد/دکتری

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای **علی ثقفی خراسانی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** با عنوان «**حلقه توابع پیوسته‌ای که در بی‌نهایت صفر می‌شوند** » در ساعت ۱۰ روز سه شنبه مورخ ۹۱/۴/۲۷ در محل **دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر** تشکیل گردید .

پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای **علی ثقفی خراسانی** به دفاع از موضوع پرداخت وبه سئوالات آنها پاسخ گفت .

سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۹/۷۵ برابر درجه عالی برای آن تعیین گردید .

به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای **علی ثقفی خراسانی** به عنوان کارشناس ارشد در رشته **ریاضی محض** شناخته می شود .

ردیف	نام ونام خانوادگی	سمت	امضاء
۱	دکتر علی اکبر استاجی	استاد راهنما	
۲	دکتر محمد جانفدا	استاد مشاور	
۳	دکتر علی اکبرعارفی جمال	استاد داور	
۴	دکتر قدیر صادقی	نماینده تحصیلات تکمیلی	

رونوشت

۱- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع

۲- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع

۳- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو

۴- دانشجو

تقدیم به

پدر، مادر و برادرم

سپاس

ستایش یزدان پاک را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من ارزانی نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر استاجی

که این شاخه زیبا از ریاضی را به من معرفی نمودند و نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از ایجاد انگیزه و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام و از ایشان درس زندگی آموختم، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد عزیزم **جناب آقای دکتر محمد جانفدا** که انگیزه‌ای فراوان در مطالعه شاخه های مختلف ریاضی برایم ایجاد نمودند و همواره باعث دلگرمی من بوده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر عارفی جمال که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند و افتخار شاگردیشان را نیز داشته‌ام و در ایجاد علاقه من به این شاخه از ریاضی نقش فراوانی داشته اند، بی‌نهایت سپاسگزارم. مراتب قدردانی خویش را از آقای دکتر صادقی و خانم دکتر شریفان که به من آموختند که چگونه از مطالعه ریاضی لذت ببرم، ابراز می‌دارم. همچنین از رئیس محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مقدسی و مدیر گروه محترم، خانم دکتر شاطری سپاسگزارم.

علی ثقفی خراسانی

چکیده

نام خانوادگی : ثقفی خراسانی **نام :** علی
عنوان پایان نامه : حلقه توابع پیوسته‌ای که در بی‌نهایت صفر می‌شوند
استاد راهنما : دکتر علی اکبر استاجی **استاد مشاور:** دکتر محمد جانفدا
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر و توپولوژی **محل تحصیل:** دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** تیر ماه ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۲۴۲
واژه‌های کلیدی: ∞-فشرده، P-نقطه، P_∞-فضا، حلقه منظم، شبه فشرده.

چکیده: جبر توابع پیوسته، یکی از شاخه های نسبتا جوان از ریاضیات است که ارتباط جالبی بین دو شاخه مهم در ریاضیات یعنی جبر و توپولوژی برقرار می‌کند. در این پایان نامه حلقه توابع پیوسته حقیقی روی فضای توپولوژی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را مطالعه می‌کنیم. این حلقه را با $C_\infty(X)$ نمایش می‌دهیم و نشان می‌دهیم که برای فضای هاسدورف X، فضای موضعا فشرده Y چنان موجود است که $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. همچنین نشان می‌دهیم که دو فضای هاسدورف موضعا فشرده X و Y یکریخت توپولوژیک هستند اگر و تنها اگر $C_\infty(X)$ و $C_\infty(Y)$ یکریخت حلقه‌ای باشند.حلقه $C_K(X)$، فضاهای ∞-فشرده و P_∞-فضاها را معرفی می‌کنیم و روابط میان خواص جبری $C_\infty(X)$ و خواص توپولوژیک X را بیان می‌کنیم.

ایده اصلی این پایان‌نامه از مقاله

Aliabad A.R., Azarpanah F., Namdari M., Rings of continuous functions vanishing at infinity, Comment. Math. Univ. Carolin. 45,3 (2004), 519-533.

گرفته شده است.

پیشگفتار

مبحث جبر توابع پیوسته، ارتباط جالبی بین دو شاخه مهم ریاضیات، یعنی جبر و توپولوژی برقرار می‌کند. هنگامی که خواص توپولوژیک فضای X به کمک خواص جبری حلقه $C(X)$ (حلقه توابع پیوسته حقیقی روی فضای توپولوژی X) تعیین می‌شوند و بر عکس، زیبایی و جذابیت خاصی به مطلب افزوده می‌شود. در مقایسه با شاخه های دیگر ریاضیات، این شاخه هنوز جوان است و از این رو گستره وسیعی از تحقیق و پژوهش را در مقابل دانشمندان و علاقه‌مندان قرار می‌دهد. جامع ترین کتاب در این زمینه در واقع همان مرجع [۱۱] نوشته گیلمن [۱] و جریسون [۲] است. علاوه بر این ریاضیدانانی چون مارتینز [۳]، هاگر [۴]، هنریکسون [۵] و $\cdots$ تحقیقات بسیاری در این زمینه انجام داده اند. همچنین آغازگر پژوهش درباره جبر توابع پیوسته در کشورمان، پروفسور امید علی شهنی کرمزاده [۶] است و اولین کتاب فارسی در این زمینه، کتاب جبر توابع پیوسته، نوشته دکتر علی اکبر استاجی [۷] است که یکی از منابع اصلی در این پایان نامه است.

در این پایان نامه به مطالعه حلقه توابع پیوسته حقیقی روی فضای توپولوژی X، که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، می‌پردازیم و آن را با $C_\infty(X)$ نمایش می‌دهیم. کوهلز [۸] در [۱۵] نشان داده است

[۱] Gillman
[۲] Jerison
[۳] Martinez
[۴] Hager
[۵] Henrikson
[۶] Karamzadeh
[۷] Estaji
[۸] Kohls

که $C_\infty(X)$ اشتراک همه ایده‌آل های ماکسیمال آزاد در $C^*(X)$ (حلقه توابع پیوسته و کراندار حقیقی روی فضای X) است. آذرپناه [۹] و ساندارارajan [۱۰] در [۸] نشان داده‌اند که در حالت کلی، $C_\infty(X)$ یک ایده‌آل از $C(X)$ نیست و شرطی لازم و کافی برای این که $C_\infty(X)$ یک ایده‌آل از $C(X)$ باشد، ارائه نموده‌اند. هر گاه صحبت از فضای X است، X یک فضای توپولوژی هاسدورف و کاملا منظم در نظر گرفته می‌شود مگر آن که خلاف آن را ذکر کنیم.

هدف ما از این تحقیق نیز مطالعه حلقه $C_\infty(X)$ و ارتباط میان خواص جبری حلقه $C_\infty(X)$ و خواص توپولوژیک فضای X است.

مرجع اصلی این پایان نامه، مقاله [۴] است. این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل است.

در فصل اول برخی مفاهیم مقدماتی را که ضرورت بیشتری دارند، بیان می‌کنیم و فرض ما بر این است که خواننده با برخی مفاهیم مقدماتی نظیر تعریف فضای توپولوژی، پایه،زیر پایه، مجموعه های باز و بسته، تابع پیوسته، فضای فشرده، بستار یک مجموعه، درون یک مجموعه، فضای متریک و $\cdots$ آشنا باشد. فصل اول شامل چهار بخش است که اساس کار ما در این بخش ها مراجع [۱] و [۱۱] و [۲۲] است و برهان قضیه ها را می‌توان در آن مراجع یافت. در بخش اول حلقه توابع پیوسته معرفی می‌شود و برخی قضایای مورد نیاز در فصل های بعدی را نیز مطرح می‌کنیم. در بخش دوم z-پالایه ها و z- ایده‌آل ها معرفی می‌شوند که خواننده می‌تواند با برقراری ارتباط بین این دو مفهوم نتایج جالبی را مشاهده کند. در بخش سوم مفهوم فشرده سازی مطرح می‌شود و برای فضای X، فضای βX را معرفی می‌کنیم که در سر تا سر این پایان نامه به دفعات زیاد با آن سر و کار خواهیم داشت. بخش چهارم را به P-فضاها اختصاص می‌دهیم و قضیه مهمی برای آنها بیان می‌کنیم که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

در فصل دوم حلقه $C_\infty(X)$ را به طور کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم. اساس کار ما در این فصل، مرجع [۸] است. در بخش اول نشان می‌دهیم که $C_\infty(X)$ یک زیر حلقه $C(X)$ است که

[۹] Azarpanah

[۱۰] Soundararajan

در حالت کلی ایده‌آل $C(X)$ نیست. اما در بخش دوم نشان می‌دهیم که $C_\infty(X)$ یک ایده‌آل $C^*(X)$ است که در واقع اشتراک تمام ایده‌آل های ماکسیمال آزاد در $C^*(X)$ است. در بخش سوم، شرطی لازم و کافی برای این که $C_\infty(X)$ ایده‌آلی از $C(X)$ باشد، ارائه می‌دهیم.

اساس کار ما در فصول سوم و چهارم و پنجم، مرجع [۴] است.

فصل سوم شامل دو بخش است که در بخش اول خواهیم دید که در هنگام مطالعه $C_\infty(X)$، می‌توان فضای X را یک فضای موضعا فشرده در نظر گرفت. در این بخش نشان می‌دهیم که برای فضای هاسدورف X، اگر $C_\infty(X) \neq (0)$، فضای موضعا فشرده Y چنان موجود است که $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. در بخش دوم به ایده‌آل های ماکسیمال $C_\infty(X)$ خواهیم پرداخت. در این بخش نشان می‌دهیم که دو فضای هاسدورف موضعا فشرده X و Y ، یکریخت توپولوژیک هستند اگر و فقط اگر $C_\infty(X)$ و $C_\infty(Y)$ یکریخت حلقه‌ای باشند.

در فصل چهارم به برخی ایده‌آل های مهم $C(X)$ که مرتبط با $C_\infty(X)$ هستند، پرداخته می‌شود. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول کوچکترین z- ایده‌آل در $C(X)$ که شامل $C_\infty(X)$ است را می‌یابیم و آن را با $C_{l\sigma}(X)$ نمایش می‌دهیم. در بخش دوم حلقه توابع پیوسته حقیقی روی فضای توپولوژی X، که دارای محمل فشرده هستند را معرفی می‌کنیم و آن را با $C_K(X)$ نمایش می‌دهیم. نشان می‌دهیم که $C_K(X)$ ایده‌آلی از $C(X)$ و $C^*(X)$ است. در بخش سوم فضاهای توپولوژی X ای را بررسی می‌کنیم که برای آنها $C_\infty(X) = C_K(X)$ و آنها را فضاهای ∞- فشرده می‌نامیم. خواهیم دید که X یک فضای ∞- فشرده است اگر و فقط اگر هر زیر مجموعه باز و σ- فشرده و موضعا فشرده از X،مشمول در یک مجموعه فشرده در X باشد. همچنین نشان می‌دهیم برای هر فضای هاسدورف و کاملا منظم X، کوچکترین فضای ∞- فشرده در βX که شامل X است، وجود دارد.

فصل پنجم شامل سه بخش است. در بخش اول P_∞- فضاها معرفی می‌شوند. در این بخش نشان می‌دهیم $C_\infty(X)$ یک حلقه منظم است اگر و فقط اگر X یک فضای ∞- فشرده و P_∞-

فضا باشد اگر و فقط اگر هر مجموعه σ-فشرده و موضعا فشرده باز در X، فشرده باشد. در بخش دوم به مطالعه $C_\infty(X)$، هنگامی که دارای بعد گلدی متناهی است، می‌پردازیم. در این بخش شرطی لازم و کافی برای این که یک ایده‌آل E از $C_\infty(X)$، یک ایده‌آل اساسی باشد و همچنین شرطی لازم و کافی برای این که ایده‌آل I در $C_\infty(X)$ یکنواخت باشد، ارائه می‌کنیم. در این بخش نشان می‌دهیم که $C_\infty(X)$ دارای بعد گلدی متناهی است اگر و فقط اگر هر مجموعه باز موضعا فشرده در X، متناهی باشد. در بخش سوم به مطالعه $C_\infty(X)$، هنگامی که یک $p.p.$-حلقه است یا یک حلقه بئر است، می‌پردازیم. در این بخش خواهیم دید که $C_\infty(X)$ یک $p.p.$-حلقه است اگر و فقط اگر X یک فضای فشرده و ناهمبند پایه‌ای باشد. همچنین خواهیم دید که $C_\infty(X)$ یک حلقه بئر است اگر و فقط اگر X یک فضای فشرده و شدیدا ناهمبند باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ حلقه توابع پیوسته

فرض ما براین است که خواننده با برخی مفاهیم مقدماتی نظیر تعریف فضای توپولوژی، پایه، زیرپایه، مجموعه های باز و بسته، تابع پیوسته، فضاهای فشرده، بستار یک مجموعه، درون یک مجموعه و فضای متریک و...آشنا باشد. ما خواننده را به فصل اول از [۱] برای دانستن برخی مفاهیم مقدماتی و قضایای مربوطه ارجاع می دهیم. ضمنا همواره مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) را با توپولوژی معمولی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم Xیک فضای توپولوژی باشد. مجموعه همه توابع پیوسته (وکراندار) حقیقی رویX را با$C(X)$ ($C^*(X)$) نمایش می دهیم.

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد و $f, g \in C(X)$. در این صورت:

۱) $f+g$ با ضابطه

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$$

متعلق به $C(X)$ است.

۲) fg با ضابطه

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in X$$

متعلق به $C(X)$ است.

۳) $f \vee g$ با ضابطه

$$(f \vee g)(x) = Max\{f(x), g(x)\}, \forall x \in X$$

متعلق به $C(X)$ است.

۴) $f \wedge g$ با ضابطه

$$(f \wedge g)(x) = Min\{f(x), g(x)\}, \forall x \in X$$

متغلق به $C(X)$ است.

۵) $|f|$ با ضابطه

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \quad \text{اگر} \\ -f(x) & f(x) < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

متعلق به $C(X)$ است.

برهان. صفحه ۱۶ از [۱] را ببینید. □

بنا به گزاره ۲.۱.۱، $C(X)$ و $C^*(X)$ همراه با دو عمل جمع و ضرب معمولی توابع حقیقی، تشکیل حلقه تعویض پذیر واحد دار می دهند.

تعریف ۳.۱.۱. برای فضای توپولوژی X، $C_\infty(X)$ عبارت است از تمام توابع $f \in C(X)$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه $\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ فشرده باشد.

فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. برای $A \subseteq X$، تعریف می‌کنیم:

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

و برای $B \subseteq Y$، تعریف می‌کنیم:

$$f^{\leftarrow}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} = f^{-1}[B]$$

لم ۴.۱.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $\{B_\alpha | \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Y باشد. در این صورت:

الف)

$$f^{\leftarrow}(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{\leftarrow}(B_\alpha)$$

ب)

$$f^{\leftarrow}(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{\leftarrow}(B_\alpha)$$

برهان. به قضیه ۱۱ از فصل ۳ در [۱۷] مراجعه کنید. □

لم ۵.۱.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و B و C زیر مجموعه‌هایی از Y هستند. آن‌گاه

$$f^{\leftarrow}(B - C) = f^{\leftarrow}(B) - f^{\leftarrow}(C)$$

برهان. به قضیه ۱۲ از فصل ۳ در [۱۷] مراجعه کنید. □

گزاره ۶.۱.۱. گیریم $f : X \to Y$ یک به یک است و $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه های X هستند . آن گاه

$$f(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} f(A_\gamma)$$

برهان. به قضیه ۱۳ از فصل ۳ مرجع [۱۷] مراجعه کنید .

□

قضیه ۷.۱.۱. برای تابع f از فضای توپولوژی X به توی فضای توپولوژی Y گزاره های زیر معادلند:

۱) f پیوسته است.

۲) برای هرمجموعه باز Gدر Y، $f^{\leftarrow}[G]$ در X باز است.

۳) برای هرمجموعه باز پایه ای Gدر Y، $f^{\leftarrow}[G]$ در X باز است.

۴) برای هرمجموعه باز زیر پایه ای Gدر Y، $f^{\leftarrow}[G]$ در X باز است.

۵) برای هر $B \subseteq Y$، $f^{\leftarrow}[int_Y B] \subseteq int_X f^{\leftarrow}[B]$.

برهان. به قضیه ۴.۱ از [۱] مراجعه شود . □

قضیه ۸.۱.۱. برای تابع f از فضای توپولوژی X به توی فضای توپولوژی Y گزاره های زیر معادلند :

۱) f پیوسته است.

۲) برای هرمجموعه بسته Fدر Y، $f^{\leftarrow}[F]$ در X بسته است.

۳) برای هرمجموعه بسته پایه ای Fدر Y، $f^{\leftarrow}[F]$ در X بسته است.

۴) برای هرمجموعه بسته زیر پایه ای Fدر Y، $f^{\leftarrow}[F]$ در X بسته است.

۵) برای هر $B \subseteq Y$، $f^{\leftarrow}[cl_Y B] \subseteq cl_X f^{\leftarrow}[B]$.

برهان. به قضیه ۵.۱ از [۱] مراجعه شود. □

لم ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. و A یک زیر مجموعه X باشد. در این صورت داریم:

$$(A^{\circ})^c = \overline{A^c}$$

به عبارت دیگر

$$X \setminus int_X A = cl_X(X \setminus A)$$

برهان. صفحه ۱۶ از [۱] را ببینید. $\square$

گزاره ۱.۱.۱۰. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی هستند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) f پیوسته است.

۲) برای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۳) برای هر $B \subseteq Y$، $\overline{f^{\leftarrow}(B)} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{B})$.

۴) برای هر $B \subseteq Y$، $f^{\leftarrow}(B^{\circ}) \subseteq (f^{\leftarrow}(B))^{\circ}$.

برهان. به بخش ۷ از فصل ۲ در [۲۲] مراجعه کنید.

$\square$

تعریف ۱.۱.۱۱. اگر A زیر مجموعه X باشد ، $x \in X$ را نقطه منزوی A می‌نامیم ، در صورتی که یک همسایگی از x به قسمی وجود داشته باشد که A را در هیچ نقطه‌ای به جز x قطع نکند و آن را نقطه حدی یا انباشتگی مجموعه A می‌نامیم ، در صورتی که هر همسایگی از x ، A را در نقطه‌ای به جز x قطع کند و به آن نقطه چسبیدگی گوییم ، هرگاه هر همسایگی از x ، A را قطع کند .

قضیه ۱.۱.۱۲ (لم چسب)**.** فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $X = A \cup B$ و A و B در X بسته باشند . به علاوه فرض کنیم $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ پیوسته باشند .در این

صورت اگر به ازای هر $x \in A \cap B$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، آنگاه تابع $h : X \to Y$ با ضابطه

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

پیوسته است .

برهان. به قضیه ۳.۷ از فصل ۲ مرجع [۲۲] مراجعه کنید . $\square$

گزاره ۱۳.۱.۱. فرض کنیم $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ که هر A_i در X بسته است. فرض کنیم $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $f|_{A_i}$ روی A_i پیوسته باشد آنگاه f روی X پیوسته است.

برهان. $1A$ از [۱۱] را ببینید. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژی و $f : X \to Y$ یک تابع باشد . در این صورت :

۱) اگر گردایه $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های باز X به قسمی باشد که $X = \bigcup \mathcal{A}$ و برای هر $A \in \mathcal{A}$، $f|_A \in C(A, Y)$ ، آن گاه $f \in C(X, Y)$.

۲) اگر گردایه متناهی $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های بسته X به قسمی باشد که $X = \bigcup \mathcal{A}$ و برای هر $A \in \mathcal{A}$ ، $f|_A \in C(A, Y)$ ، آن گاه $f \in C(X, Y)$.

برهان. به قضیه ۶.۱ از [۱] مراجعه شود . $\square$

گزاره ۱۵.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد و $\mathcal{F} \subseteq P(X)$. در اینصورت گردایه $\mathcal{F}$ یک پایه بسته برای یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر

۱) $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$

۲) برای هر $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ، $F_1 \cup F_2$ به صورت اشتراکی از اعضای $\mathcal{F}$ نوشته شود.

برهان. صفحه ۱۷ از [۱] را ببینید. □

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ یک تابع دوسویی باشد. اگر f و تابع معکوس آن هر دو پیوسته باشند ، f را یکریختی توپولوژیکی (همسانریختی) می نامیم.

قضیه ۱۷.۱.۱. هر زیر مجموعه بسته فضای فشرده ، فشرده است.

برهان. به قضیه ۱.۸ از [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۱.۱. هر تصویر پیوسته فضای فشرده ، فشرده است.

برهان. به قضیه ۱.۹ از [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۹.۱.۱ (هاینه بورل)**.** فرض کنیم $\mathbb{R}^k$ دارای توپولوژی حاصل از متر اقلیدسی باشد. در این صورت زیر مجموعه A از $\mathbb{R}^k$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

برهان. به قضیه ۶.۳ از فصل ۳ مرجع [۲۲] مراجعه کنید . □

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد. فضای X را هاسدورف می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز $a, b \in X$ مجموعه‌های باز G و H به قسمی وجود داشته باشند که

$$G \cap H = \emptyset \quad \text{و} \quad b \in H, a \in G$$

در هر فضای توپولوژی هاسدورف هر مجموعه تک عضوی بسته است و هر زیر فضای آن نیز هاسدورف می‌باشد اگر از هر دو فضای یکریخت یکی هاسدورف باشد، دیگری نیز هاسدورف است.

قضیه ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی هاسدورف باشد و C زیر فضای فشرده آن به قسمی باشد که $x \in X$ را در بر نداشته باشد. در این صورت مجموعه‌های باز و مجزای G و H به قسمی وجود دارند که $x \in G$ و $C \subseteq H$. بنابراین هر زیر فضای فشرده فضای هاسدورف، بسته است.

برهان. به قضیه ۱۸.۱ در [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. برای هر $f \in C(X)$ قرار می دهیم $Z(f) = \{x \in X : f(x) = \circ\}$ و $Coz(f) = X - Z(f)$ و آنها را به ترتیب صفر مجموعه و متمم صفر مجموعه می نامیم.

چنانچه با بیشتر از یک فضا سر و کار داشته باشیم برای تاکید از نمادهای $Z_X(f)$ و $Coz_X(f)$ به ترتیب به جای $Z(f)$ و $CoZ(f)$ استفاده می کنیم. اگر $A \subseteq C(X)$، قرار می دهیم $Z(A) = \{Z(f) : f \in A\}$ و خانواده همه صفر مجموعه های $C(X)$ را با $Z[C(X)]$ یا به اختصار با $Z[X]$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲۳.۱.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد.

۱) هر صفر مجموعه‌ای بسته است.

۲) برای هر $f, g \in C(X)$، $Z(f^{۲} + g^{۲}) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \cap Z(g)$

۳) برای هر $f, g \in C(X)$، $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$

۴) $f \in C(X)$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $Z(f) = \emptyset$.

برهان. به قضیه ۱.۲ از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۲۴.۱.۱. یک زیر مجموعه فضای توپولوژی X را G_δ مجموعه می‌نامیم، هر گاه به صورت اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های باز X نوشته شود.

قضیه ۲۵.۱.۱. برای هر $f \in C(X)$، $Z(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{\leftarrow}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. بنابراین هر صفر مجموعه یک G_δ مجموعه است.

برهان. به قضیه ۲.۲ از [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱. برای هر فضای توپولوژی X ، $Z[X]$ تحت اشتراک شمارا بسته است.

برهان. به قضیه ۶.۲ از [۱] مراجعه شود .

□

تعریف ۲۷.۱.۱. فضای توپولوژی هاسدورف X را کاملا منظم می‌گوییم در صورتی که اگر F زیر مجموعه بسته X باشد و $x \in X \setminus F$، آن‌گاه $f \in C(X)$ به قسمی وجود داشته باشد که $f[F] = \{0\}, f(x) = 1$.

قضیه ۲۸.۱.۱. فضای توپولوژی X کاملا منظم است اگر و تنها اگر $Z[X]$ تشکیل پایه‌ای برای مجموعه‌های بسته فضا بدهد.

برهان. به قضیه ۷.۲ در [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲۹.۱.۱. برای هر فضای توپولوژی X، فضای کاملا منظم Y و تابع پیوسته η از X به روی Y به قسمی وجود دارند که تابع $go\eta \longrightarrow g$ یکریختی (حلقه‌ای) از $C(Y)$ به روی $C(X)$ است

برهان. به قضیه ۱۲.۲ در [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد و $x \in X$. مجموعه A را یک همسایگی از x نامند هر گاه $x \in int\, A$. اگر A باز باشد، A را یک همسایگی باز x می‌نامند. اگر A فشرده باشد، A را یک همسایگی فشرده x می‌نامند.