بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی‌محض گرایش جبر

اشتراک ایدآل‌های اول مینیمال اساسی

استاد راهنما

دکتر علی طاهری‌فر

پژوهشگر

سیده مریم حسینی محمدآباد

تابستان ۱۳۹۳

حمایت از حقوق پدیدآورندگان

پایان نامهٔ حاضر، حاصل پژوهشهای نگارنده در دورهٔ **کارشناسی ارشد** رشتهٔ **ریاضی‌محض** گرایش **جبر** است که در **تابستان ۱۳۹۳** در **دانشکده علوم** دانشگاه **یاسوج** به راهنمایی **دکتر علی طاهری‌فر** و مشاورهٔ **دکتر محمد بازیار** از آن دفاع شده است و کلیهٔ حقوق مادی و معنوی آن متعلق به دانشگاه یاسوج است.

دانشگاه یاسوج

اشتراک ایدآل‌های اول مینیمال اساسی

به وسیلهٔ

سیده مریم حسینی محمدآباد

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

ریاضی‌محض

در تاریخ .... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجهٔ .... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنما:	دکتر علی طاهری‌فر	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور:	دکتر محمد بازیار	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه:	دکتر احسان ممتحن	با مرتبهٔ علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه:	دکتر امیر ویسی	با مرتبهٔ علمی استادیار	امضاء
۵- نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر قاسم رضایی	با مرتبهٔ علمی دانشیار	امضاء

تقدیم به:

بهانه‌های زندگی ام

پدر، مادر، خواهر

و

صبح امیدم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. و ریاضی را آفرید تا شاید عقل آدمی کمی از این دنیای فانی فاصله بگیرد که

آدمی در عالم فانی نمی‌آید به دست   عالمی دیگر بباید ساخت وز نو آدمی

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر علی طاهری‌فر که در کمال سعه‌ی صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند...

از استاد صبور و مهربان؛ جناب آقای دکتر محمد بازیار که زحمت مشاوره‌ی این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پایان‌نامه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید...

و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقایان دکتر احسان ممتحن و دکتر امیر ویسی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و همچنین خواهران نازنینم. بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی، یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند.

باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

سیده مریم حسینی محمدآباد

تابستان ۱۳۹۳

چکیده

فرض می‌کنیم $\mathrm{Z(R)}$ مجموعه عناصر مقسوم‌علیه صفر در حلقه‌ی جابجایی R و $\mathcal{M}$ فضای ایدآل‌های اول مینیمال در حلقه‌ی R با توپولوژی زاریسکی باشد. ایدآل I از حلقه‌ی R را قویاً‌چگال یا به طوری خلاصه $sd-$ایدآل گوییم، هرگاه $I \subseteq \mathrm{Z(R)}$ و مشمول در هیچ ایدآل اول مینیمال نباشد. مجموعه‌ی همه‌ی $a \in \mathrm{R}$ را که $\overline{D(a)} = \overline{\mathcal{M}\backslash V(a)}$ در $\mathcal{M}$ فشرده باشد را با $R_K(\mathcal{M})$ نمایش می‌دهیم. نشان می‌دهیم که R دارای خاصیت (A) و $\mathcal{M}$ فشرده است اگر و تنها اگر R هیچ $sd-$ایدآلی نداشته باشد. ثابت می‌کنیم که $R_K(\mathcal{M})$ اساسی است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ تقریباً فشرده‌ی موضعی باشد. همچنین ثابت می‌کنیم که $R_K(\mathcal{M})$، $sd-$ایدآل است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ فشرده‌ی موضعی و نافشرده باشد. اشتراک ایدآل‌های اول مینیمال اساسی در حلقه‌ی کاهش‌یافته‌ی R، لزوماً یک ایدآل اساسی نیست. ثابت می‌کنیم که اشتراک ایدآل‌های اول مینیمال اساسی در $C(X)$ برابر با $C_F(X)$ است و در آخر نشان می‌دهیم که فضای X شبه‌گسسته است اگر و تنها اگر $I(X) = X_L$ و $C_K(X)$ یک ایدآل خالص است.

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

فصل ۱

مقدمه

در این پایان‌نامه هر جا سخن از حلقه به میان آید منظور حلقه‌ی تعویض‌پذیر یکدار است و در حلقه‌ی $C(X)$، X یک فضای کاملاً منظم و هاسدورف است. مگر آن که خلاف آن گفته شود.

۱-۱ مباحثی در جبر

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و R رابطه‌ای روی X باشد. گوییم R روی X ترتیب جزئی است هرگاه:

۱. برای هر $x \in X$، $x\mathrm{R}x$. (خاصیت انعکاسی)

۲. برای هر $x, y \in X$ که $x\mathrm{R}y$ و $y\mathrm{R}x$ نتیجه شود $x = y$. (خاصیت پادتقارنی)

۳. برای هر $x, y, z \in X$ که $x\mathrm{R}y$ و $y\mathrm{R}z$، نتیجه شود $x\mathrm{R}z$. (خاصیت تعدی)

مثال ۱-۱-۲. رابطه‌ی $\leqslant$ روی $\mathbb{R}$، ترتیب جزئی است.

لم ۱-۱-۳. *فرض کنیم (X, R) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی غیرتهی باشد به طوری که هر زنجیر در X کران بالایی در X داشته باشد. در این صورت X نسبت به R حداقل یک عضو*

ماکسیمال دارد، این لم به لم تسورن [۱] معروف است.

تعریف ۱-۱-۴. اگر R یک حلقه و $\emptyset \neq I \subseteq \mathrm{R}$. آن‌گاه I را یک ایدآل [۲] از حلقه‌ی R گوییم هرگاه:

۱) به ازای هر $x, y \in I$ ، $x - y \in I$.

۲) به ازای هر $x \in I$ و $r \in \mathrm{R}$، $rx \in I$.

مثال ۱-۱-۵. ایدآل‌های حلقه‌ی عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ به فرم $n\mathbb{Z}$ هستند که $n \in \mathbb{Z}$.

تعریف ۱-۱-۶. اگر R یک حلقه و P ایدآلی در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه ایدآل P را اول [۳] گوییم هرگاه:

۱) P سره باشد.

۲) برای هر دو ایدآل دلخواه A و B در R، اگر $AB \subseteq P$ آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

مثال ۱-۱-۷. ایدآل‌های اول حلقه‌ی عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ به فرم $p\mathbb{Z}$ هستند که $p \in \mathbb{Z}$ یک عدد اول است.

تعریف ۱-۱-۸. ایدآل I در حلقه‌ی R را ایدآل مینیمال [۴] گوییم هرگاه $I \neq 0$ و به ازای هر ایدآل J از R، که $J \subseteq I$ آن‌گاه $J = I$ یا $J = 0$.

مثال ۱-۱-۹. هر میدان F ایدآل سره‌ی مینیمال ندارد.

تعریف ۱-۱-۱۰. ایدآل I از حلقه‌ی R را ایدآل ماکسیمال [۵] گوییم، هرگاه:

۱. I سره باشد.

۲. به ازای هر ایدآل J از R که $I \subseteq J \subseteq \mathrm{R}$، آن‌گاه $I = J$ یا $J = \mathrm{R}$.

مثال ۱-۱-۱۱. در هر میدانی، ایدآل $\{0\}$ ماکسیمال است.

---

[۱] Zorn's lemma

[۲] Ideal

[۳] Prime ideal

[۴] Minimal ideal

[۵] Maximal ideal

قضیه ۱-۱-۱۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. آن‌گاه هر ایدآل ماکسیمال، یک ایدآل اول است.*

تعریف ۱-۱-۱۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $x \in \mathrm{R}$ را مقسوم‌علیه صفر [۶] گوییم، هرگاه $\circ \neq y \in \mathrm{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $xy = \circ$. مجموعه‌ی تمام عناصر مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی R را با $\mathrm{Z(R)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱۴. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_۶$ داریم $\mathrm{Z}(\mathbb{Z}_۶) = \{\overline{\circ}, \overline{۲}, \overline{۳}\}$.

تعریف ۱-۱-۱۵. حلقه‌ی R را دامنه‌ی صحیح [۷] گوییم، هرگاه مقسوم‌علیه صفر غیرصفر نداشته باشد.

مثال ۱-۱-۱۶. $\mathbb{Z}$ یک دامنه‌ی صحیح نامتناهی و $\mathbb{Z}_۲$ یک دامنه‌ی صحیح متناهی است.

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $x \in \mathrm{R}$ را پوچ‌توان [۸] گوییم، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $x^n = \circ$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان R را با $\mathrm{N(R)}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱۸. در حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{۱۲}$ عنصر $x = \overline{۶}$ یک عضو پوچ‌توان است.

تعریف ۱-۱-۱۹. حلقه‌ی R را کاهش‌یافته [۹] گوییم، هرگاه عضو پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد.

مثال ۱-۱-۲۰. هر دامنه‌ی صحیح R و $\mathbb{Z}_۶$، حلقه‌های کاهش‌یافته هستند.

تعریف ۱-۱-۲۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $x \in \mathrm{R}$ را خودتوان [۱۰] گوییم، هرگاه $x^۲ = x$.

---

[۶] Zero divisor

[۷] Integral domain

[۸] Nilpotent

[۹] Reduced

[۱۰] Idempotent

مثال ۱-۱-۲۲. حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{6}$ را در نظر می‌گیریم، عضوهای خودتوان این حلقه عبارتند از $\overline{0}$،$\overline{1}$،$\overline{3}$ و $\overline{4}$.

تعریف ۱-۱-۲۳. حلقه‌ی R را حلقه‌ی بولی [11] گوییم، هرگاه هر عضو آن خودتوان باشد.

مثال ۱-۱-۲۴. حلقه‌ی $\mathbb{Z}_{2}$ یک حلقه‌ی بولی است.

تعریف ۱-۱-۲۵. فرض کنیم I ایدآلی در حلقه‌ی R باشد. در این صورت:

$$\sqrt{I} = \{r \in \mathrm{R} \mid r^n \in I \text{ که } \mathbb{N} \text{ وجود داشته باشد } n \text{ای متعلق به}\}$$

ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود و رادیکال I نام دارد.

تعریف ۱-۱-۲۶. فرض کنیم R یک حلقه و $S \subseteq \mathrm{R}$ باشد. مجموعه‌ی S را ضربی‌بسته [12] گوییم هرگاه:

۱. $0 \notin S$

۲. $1 \in S$

۳. برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

مثال ۱-۱-۲۷. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in \mathrm{R}$. مجموعه‌ی $S = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته است.

قضیه ۱-۱-۲۸. *اگر R یک حلقه و I یک ایدآل از R باشد، آن‌گاه P ایدآل اول است اگر و تنها اگر $\mathrm{R} \backslash P$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته باشد.*

قضیه ۱-۱-۲۹. ***قضیه‌ی کوهن*** [13]

اگر R یک حلقه و P یک ایدآل و S یک مجموعه‌ی ضربی بسته از R باشد و $I \cap S = \emptyset$، آن‌گاه ایدآل اول P در R وجود دارد به طوری که $I \subseteq P$ و $P \cap S = \emptyset$.

قضیه ۱-۱-۳۰. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in \mathrm{R}$. در این صورت a عضو وارون‌پذیر R است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R داشته باشیم $a \notin M$.*

[11] Boolean ring

[12] Multiplicatively closed

[13] Cohen theorem

تعریف ۱-۱-۳۱. اگر R حلقه باشد و $x \in \mathrm{R}$، آن‌گاه پوچساز x در R را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Ann}(x) = \{r \in \mathrm{R} \mid rx = 0\}.$$

مثال ۱-۱-۳۲. حلقه‌ی $\mathbb{Z}_8$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathrm{Ann}(\overline{2}) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.

تعریف ۱-۱-۳۳. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی منظّم [۱۴] گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in \mathrm{R}$، $y \in \mathrm{R}$ موجود باشد به طوری که $x = x^2y$.

مثال ۱-۱-۳۴. هر حلقه‌ی بخشی یک حلقه‌ی منظّم است؛ زیرا، اگر R یک حلقه‌ی بخشی باشد و $x \in \mathrm{R}$. در این صورت اگر $x = 0$، آن‌گاه $x = x^2x$ و اگر $x \neq 0$، آن‌گاه $xx^{-1} = 1$، پس

$$x = x^2x^{-1} = xxx^{-1}$$

بنابراین R یک حلقه‌ی منظّم است.

مثال ۱-۱-۳۵. هر حلقه‌ی بولی یک حلقه‌ی منظّم است؛ به دلیل اینکه هر عضو حلقه‌ی بولی خودتوان است داریم $x = x^2x$.

تعریف ۱-۱-۳۶. فرض کنیم R یک حلقه و $S = \mathrm{R}\backslash \mathrm{Z}(\mathrm{R})$ باشد. در این صورت $\mathrm{T}(\mathrm{R})$ را حلقه‌ی خارج‌قسمتی کامل [۱۵] R گوییم و داریم $\mathrm{T}(\mathrm{R}) = S^{-1}\mathrm{R}$.

مثال ۱-۱-۳۷. حلقه‌ی $\mathbb{Z} = \mathrm{R}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathrm{T}(\mathrm{R}) = \mathbb{Q}$.

تعریف ۱-۱-۳۸. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت مجموعه‌ی M را یک $\mathrm{R}-$مدول راست [۱۶] گوییم هرگاه:

۱) $(M, +)$ گروه آبلی باشد.

۲) ضرب اسکالر $\lambda : M \times \mathrm{R} \longrightarrow M$ چنان موجود باشد که به ازای $r_1, r_2, r \in \mathrm{R}$ و $m_1, m_2, m \in M$ دارای خواص زیر باشد:

---

[۱۴] Regular ring

[۱۵] Total quotient ring

[۱۶] Right module

آ) $m(r_1+r_2)=mr_1+mr_2$

ب) $m(r_1r_2)=(mr_1)r_2$

ج) $(m_1+m_2)r=m_1r+m_2r$

د) $m\cdot 1=m$

و با M_{R} نمایش داده می‌شود. به طور مشابه مجموعه‌ی M را یک $\mathrm{R}-$مدول چپ [17] گوییم هرگاه:

۱) $(M,+)$ گروه آبلی باشد.

۲) ضرب اسکالر $\lambda:\mathrm{R}\times M\longrightarrow M$ چنان موجود باشد که به ازای $r_1,r_2,r\in\mathrm{R}$ و $m_1,m_2,m\in M$ دارای خواص زیر باشد:

آ) $(r_1+r_2)m=r_1m+r_2m$

ب) $(r_1r_2)m=r_1(r_2m)$

ج) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$

د) $1\cdot m=m$

و با ${}_{\mathrm{R}}M$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی M را که هم $\mathrm{R}-$مدول راست و هم $\mathrm{R}-$مدول چپ باشد را یک $\mathrm{R}-$مدول گوییم.

مثال ۱-۱-۳۹. هر حلقه روی خودش یک $\mathrm{R}-$مدول است و همچنین هر گروه آبلی خود نیز یک $\mathbb{Z}-$مدول است.

تعریف ۱-۱-۴۰. فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد. آن‌گاه $N\subseteq M$ را یک زیرمدول M گوییم هرگاه:

۱) $(N,+)\leqslant(M,+)$

۲) به ازای هر $n\in N$ و به ازای هر $r\in\mathrm{R}$، $rn\in N$.

مثال ۱-۱-۴۱. زیرمدول‌های R به عنوان $\mathrm{R}-$مدول، همان ایدآل های حلقه‌ی R هستند.

تعریف ۱-۱-۴۲. فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد. زیرمدول غیرصفر N در $\mathrm{R}-$مدول M را اساسی [18] گوییم، هرگاه به ازای هر زیرمدول غیرصفر K در M، $N\cap K\neq 0$.

[17] Left module

[18] Essential

به عبارت دیگر N را در M اساسی گوییم، هرگاه به ازای زیرمدول K از M که $N\cap K=\circ$، نتیجه دهد $K=\circ$. زیرمدول اساسی N از M را با $N\leqslant_e M$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۴۳. اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر بگیریم آن‌گاه به ازای هر $\circ\neq n\in\mathbb{Z}$، $n\mathbb{Z}$ زیرمدول اساسی در $\mathbb{Z}$ است.

لم ۱-۱-۴۴. *فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد و $N\leqslant M$. آن‌گاه موارد زیر معادلند:*

۱) $N\leqslant_e M$.

۲) *اگر* $\circ\neq m\in M$، *آن‌گاه یک* $r\in\mathrm{R}$ *وجود دارد به طوری که* $\circ\neq rm\in N$.

اگر M، $\mathrm{R}-$مدول راست یا چپ باشد، آن‌گاه لم فوق نیز برقرار خواهد بود. با این تفاوت که اگر M یک $\mathrm{R}-$مدول راست باشد، در این صورت لم فوق به فرم زیر خواهد بود:
اگر M یک $\mathrm{R}-$مدول راست و $N\leqslant M$ باشد. آن‌گاه موارد زیر معادلند:

۱) $N\leqslant_e M$.

۲) *اگر* $\circ\neq m\in M$، *آن‌گاه یک* $r\in\mathrm{R}$ *وجود دارد به طوری که* $\circ\neq mr\in N$.

قضیه ۱-۱-۴۵. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. همچنین $A\leqslant_e M$ و $A\leqslant B\leqslant M$، آن‌گاه $B\leqslant_e M$.*

قضیه ۱-۱-۴۶. *فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد و $N\leqslant M$، آن‌گاه $T_\circ\leqslant M$ وجود دارد به طوری که $N\bigoplus T_\circ\leqslant_e M$.*

برهان. قرار می‌دهیم:

$$X=\{T\leqslant M\mid N\cap T=\circ\}$$

واضح است که X مرتب جزئی و ناتهی است؛ زیرا حداقل $T=\circ$ وجود دارد.
$\{T_\alpha\}_\alpha$ را زنجیری در X در نظر می‌گیریم. $\bigcup_\alpha T_\alpha$ عضوی از X است زیرا؛
آ) $\bigcup_\alpha T_\alpha\leqslant\mathrm{R}$ ؛ به این دلیل که اگر $x,y\in\bigcup_\alpha T_\alpha$، در این صورت α_1,α_2 وجود دارند به گونه‌ای که $x\in T_{\alpha_1}, y\in T_{\alpha_2}$. حال به دلیل زنجیر بودن $\{T_\alpha\}_\alpha$، می‌گیریم $T_{\alpha_1}\subseteq T_{\alpha_2}$، پس $x,y\in T_{\alpha_2}$، چون T_{α_2} زیرمدول است، بنابراین $x+y\in T_{\alpha_2}$، در نتیجه $x+y\in\bigcup_\alpha T_\alpha$.

حال فرض می‌کنیم $r \in \mathrm{R}$، به دلیل زیرمدول بودن T_{α_2}، خواهیم داشت $rx \in T_{\alpha_2}$، در نتیجه $rx \in \bigcup_\alpha T_\alpha$.

ب) $(\bigcup_\alpha T_\alpha) \cap N = \bigcup_\alpha (T_\alpha \cap N) = 0$.

بنابراین شرایط لم تسورن برقرار است، پس X حداقل یک عضو ماکسیمال دارد. گیریم T_0 عضو ماکسیمال X باشد، ادعا می‌کنیم

$$N \bigoplus T_0 \leqslant_e \mathrm{R}$$

فرض می‌کنیم $N \bigoplus T_0$ اساسی نباشد، پس زیرمدول K در M وجود دارد که

$$(N \bigoplus T_0) \cap K = 0 \qquad (1)$$

بنابراین

$$N \cap (T_0 + K) = 0 \qquad (2)$$

زیرا اگر $n = t_0 + k$، داریم $n - t_0 = k$، که $k \in K$ و $n - t_0 \in N \bigoplus T_0$. طبق (۱) خواهیم داشت $k = 0$، پس $n - t_0 = 0$، در نتیجه $n = t_0$. از طرفی $N \cap T_0 = 0$، بنابراین $n = 0$. پس (۲) برقرار است در نتیجه $T_0 + K \in X$ و $T_0 \subsetneqq T_0 + K$؛ زیرا، اگر $T_0 = T_0 + K$، آن‌گاه $K \subseteq T_0$، که با (۱) در تناقض است. حال چون $T_0 \subsetneqq T_0 + K$، پس $T_0 + K$ در X ماکسیمال است که با ماکسیمال بودن T_0 تناقض دارد، پس ادعا درست است. ■

قضیه ۱-۱-۴۷. *فرض کنیم M یک R-مدول باشد و H، K و N زیرمدول‌های M باشند به طوری که $K \leqslant N \leqslant M$. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف. $K \leqslant_e M$ اگر وتنها اگر $K \leqslant_e N$ و $N \leqslant_e M$. (خاصیت تعدی)

ب. $H \cap K \leqslant_e M$ اگر وتنها اگر $K \leqslant_e M$ و $H \leqslant_e M$.

برهان. **(الف)** فرض کنیم $K \leqslant_e N$ و $N \leqslant_e M$ و $T \leqslant M$ که $K \cap T = 0$. می‌دانیم که $T \cap N \leqslant N$ و $K \leqslant_e N$، از طرفی $K \cap (T \cap N) = 0$، پس $T \cap N = 0$ اما چون $T \leqslant M$ و $N \leqslant_e M$ بنابراین $T = 0$.

به‌عکس، فرض کنیم $K \leqslant_e M$ و $T \leqslant N$ که $K \cap T = 0$. چون $N \leqslant M$ پس $T \leqslant M$. از طرفی $K \leqslant_e M$ بنابراین $T = 0$ یعنی $K \leqslant_e N$.

حال فرض می‌کنیم برای $T \leqslant M$، $N \cap T = 0$. چون $K \cap T \leqslant N \cap T$ بنابراین $K \cap T = 0$ و در نتیجه به دلیل اساسی بودن K در M، $T = 0$ و این یعنی $N \leqslant_e M$.

(ب) فرض کنیم $H \leqslant_e M$ و $K \leqslant_e M$. $T \leqslant M$ را دلخواه می‌گیریم و $(H \cap K) \cap T = 0$. بنابراین $H \cap (K \cap T) = 0$ و چون $H \leqslant_e M$ پس $K \cap T = 0$ از طرفی $K \leqslant_e M$ بنابراین $T = 0$.

به‌عکس، فرض کنیم $H \cap K \leqslant_e M$ و $T \leqslant M$ که $H \cap T = 0$، پس $K \cap (H \cap T) = 0$ بنابراین $(K \cap \mathrm{H}) \cap T = 0$ و چون $H \cap K \leqslant_e M$ نتیجه می‌شود $T = 0$. به طور مشابه $K \leqslant_e M$ ثابت می‌شود. ■

قضیه ۱-۱-۴۸. *فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد و A و B و C زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $A \leqslant_e B$، آن‌گاه $A \bigoplus C \leqslant_e B \bigoplus C$.*

قضیه ۱-۱-۴۹. *فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد و $N \leqslant M$. اگر $K \leqslant_e N$، آن‌گاه $T \leqslant_e M$ وجود دارد به طوری که $K = T \cap N$.*

برهان. فرض کنیم $N \leqslant M$ و $K \leqslant_e N$. بنابراین زیرمدول T_0 از M وجود دارد به طوری که $N \bigoplus T_0 \leqslant_e M$. حال چون $K \leqslant_e N$ پس $K \bigoplus T_0 \leqslant_e N \bigoplus T_0$، بنابراین طبق خاصیت تعدی $K \bigoplus T_0 \leqslant_e M$.

قرار می‌دهیم $T = K \bigoplus T_0$، نشان می‌دهیم $K = T \cap N$.

واضح است که $K \subseteq N$ و $K \subseteq T$، پس $K \subseteq N \cap T$. حال فرض می‌کنیم $k + t_0 = n$ پس $t_0 = n - k$. حال چون $N \cap T_0 = 0$ بنابراین $t_0 = 0$، در نتیجه $n = k$ و داریم $N \cap T \subseteq K$. ■

تعریف ۱-۱-۵۰. $\mathrm{R}-$مدول M را ساده [۱۹] گوییم، هرگاه M به جز خودش و صفر زیرمدول دیگری نداشته باشد.

تعریف ۱-۱-۵۱. $\mathrm{R}-$مدول M را نیم‌ساده [۲۰] گوییم، هرگاه خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده از M مانند $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار است) وجود داشته باشد، به طوری که

[۱۹] Simple

[۲۰] Semi simple

$M = \sum_{\alpha\in A} \mathrm{S}_\alpha$. به عبارت دیگر M برابر با مجموع خانواده‌ای از زیرمدول‌های ساده‌اش باشد.

مثال ۱-۱-۵۲. مدول صفر ساده نیست ولی نیم‌ساده است.

قضیه ۱-۱-۵۳. *فرض کنیم M یک مدول دلخواه باشد. آن‌گاه هر زیرمدول M جمعوندی[۲۱] از M است اگر و تنها اگر M نیم‌ساده باشد.*

قضیه ۱-۱-۵۴. *فرض کنیم M یک مدول دلخواه باشد. آن‌گاه M زیرمدول اساسی ندارد اگر وتنها اگر M نیم‌ساده باشد.*

برهان. فرض کنیم $N \leqslant M$ و N دلخواه باشد. M را نیم‌ساده فرض می‌کنیم، بنابراین طبق (۱-۱-۵۳)، N جمعوندی از M است. بنابراین یک $T_\circ \leqslant M$ وجود دارد به طوری که $M = N \bigoplus T_\circ$، لذا $N \cap T_\circ = \circ$ نتیجه می‌دهد که N اساسی نیست.
به‌عکس، فرض می‌کنیم M به جز خودش زیرمدول اساسی دیگری نداشته باشد. به این دلیل که $M \leqslant N$ پس طبق (۱-۱-۴۶) وجود دارد $T_\circ \leq M$ به طوری که $N \bigoplus T_\circ$ در M اساسی است. حال چون M به جز خودش زیرمدول اساسی دیگری ندارد، بنابراین $M = N \bigoplus T_\circ$ پس N جمعوندی از M است و چون N دلخواه بود، طبق (۱-۱-۵۳)، M نیم‌ساده است. ■

تعریف ۱-۱-۵۵. فرض کنیم M یک $\mathrm{R}-$مدول باشد. ساکل M را با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش می‌دهیم که مجموع خانواده‌ی همه‌ی زیرمدول‌های ساده‌ی M است.

مثال ۱-۱-۵۶. $\mathbb{Z}_۶$ را به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}_۶) = \mathbb{Z}_۶$؛ زیرا، $\{\overline{\circ}, \overline{۳}\}$ و $\{\overline{\circ}, \overline{۲}, \overline{۴}\}$ زیرمدول‌های ساده‌ی $\mathbb{Z}_۶$ هستند، بنابراین مجموع این دو زیرمدول برابر با خود $\mathbb{Z}_۶$ می‌باشد.

قضیه ۱-۱-۵۷. *فرض کنیم M یک مدول دلخواه باشد، آن‌گاه* $\mathrm{Soc}(M) = \bigcap_{N \leqslant_e M} N$.

برهان. فرض کنیم S زیرمدول ساده‌ای از M باشد و $N \leqslant_e M$. واضح است که $N \cap S \neq \circ$ و $N \cap S \leqslant \mathrm{S}$، به دلیل ساده بودن S نتیجه می‌شود که $N \cap S = S$ و این یعنی $S \subseteq N$. حال

[۲۱] Direct summand

چون هر مدول ساده‌ای در هر مدول اساسی قرار گرفته است، بنابراین جمع ساده‌ها درون هر اساسی و در نتیجه درون $\bigcap_{N\leqslant_e M} N$ قرار می‌گیرد، پس

$$\mathrm{Soc}(M) \subseteq \bigcap_{N\leqslant_e M} N \ . \qquad (۱)$$

می‌گیریم $X = \bigcap_{N\leqslant_e M} N$ و $A \leqslant_e X \leqslant M$. از این رو طبق (۱-۱-۴۹) زیرمدول اساسی B در M وجود دارد، به طوری که $A = B\cap X$، از طرفی $B\cap X = X$. پس $A = X$ و بنابراین تنها زیرمدول اساسی در X خود X می‌باشد، از این رو طبق (۱-۱-۵۴)، Xنیم‌ساده است و در نتیجه $X \subseteq \mathrm{Soc}(M)$، یعنی

$$\bigcap_{N\leqslant_e M} N \subseteq \mathrm{Soc}(M) \ . \qquad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\mathrm{Soc}(M) = \bigcap_{N\leqslant_e M} N \ . \qquad \blacksquare$$

۱-۲ مباحثی در توپولوژی

تعریف ۱-۲-۱. فرض می‌کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{P}(X)$ خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های X باشد، در این صورت $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی [۲۲] روی X می‌گوییم؛ هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\emptyset$ و X در $\mathcal{T}$ باشند.

۲. اشتراک هر دو عنصر $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

۳. اجتماع هر تعداد از عناصر $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ که روی آن تعریف شده است را یک فضای توپولوژی گوییم و اغلب با $(X,\mathcal{T})$ نمایش می‌دهیم. هرگاه به اختصار بگوییم X یک فضا است یعنی این که یک توپولوژی روی آن از پیش تعریف شده است. عناصر $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز در X می‌نامیم و زیرمجموعه‌ای از X که متمم آن متعلق به $\mathcal{T}$ باشد، بسته نامیده می‌شود.

مثال ۱-۲-۲. فرض می‌کنیم $X=\{a,b,c,d\}$، به سادگی می‌توان دید که:

[۲۲] Topology