

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد (آنالیز عددی)

عنوان:

حل عددی مسائل حساب تغییرات با استفاده از توابع متعامد مثلثی

دانشجو:

وریا رشیدی

استاد راهنما:

دکتر امجد علی پناه

استاد مشاور:

دکتر فردین ساعدپناه

چکیده

این پایان‌نامه، یک مجموعه‌ی جدید از توابع قطعه‌ای پیوسته به نام توابع متعامد مثلثی را که از توابع معروف بلاک-پالس به دست می‌آیند، معرفی نموده و به بررسی و مقایسه خواص آن‌ها می‌پردازد، همچنین ماتریس‌های عملیاتی انتگرال این توابع را تولید و سپس با استفاده از توابع متعامد مثلثی به حل مستقیم مسائل حساب تغییرات می‌پردازد و فرمول‌هایی را تولید خواهند شد که برای محاسبه انتگرال‌های موجود در مسائل حساب تغییراتی به کار می‌روند. از این رو می‌توان با کمک این روابط مسئله حساب تغییراتی به یک دستگاه معادلات جبری (خطی یا غیر خطی) تبدیل کرد. این مسائل را به یک معادله جبری تبدیل می‌کنند. در انتها چند مثال از مسائل حساب تغییرات را آورده و آن‌ها را توسط معرفی شده حل کرده، که کارایی و دقت این روش را در حل مسائل حساب تغییراتی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: توابع متعامد مثلثی، مسائل حساب تغییرات، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، روش مستقیم، توابع قطعه‌ای پیوسته

فهرست مطالب

پ	فهرست مطالب
ث	لیست جداول
ج	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمات و پیش‌نیازها
۲	۱.۱ تعاریف مقدماتی
۷	۲.۱ آشنایی مختصر با حساب تغییرات
۷	۱.۲.۱ مقدمه
۱۰	۲.۲.۱ مسئله اصلی حساب تغییرات
۱۱	۳.۲.۱ دو روش عددی در حل مسائل حساب تغییرات
۱۳	۲ توابع متعامد قطعه‌ای یک بعدی
۱۳	۱.۲ توابع بلاک-پالس
۱۵	۱.۱.۲ خواص توابع بلاک-پالس
۱۶	۲.۱.۲ خاصیت برداری توابع بلاک-پالس
۱۷	۳.۱.۲ تقریب به وسیله توابع بلاک-پالس
۱۹	۴.۱.۲ ماتریس‌های عملیاتی توابع بلاک-پالس
۲۱	۲.۲ توابع متعامد مثلثی یک بعدی
۲۴	۱.۲.۲ خواص توابع متعامد مثلثی یک بعدی
۳۰	۲.۲.۲ تقریب توسط توابع متعامد مثلثی
۳۲	۳.۲.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال توابع مثلثی

۳۴	مقایسه خواص توابع بلاک-پالس با توابع مثلثی	۴.۲.۲
۳۷	توابع متعامد قطعه‌ای دو بعدی	۳
۳۷	توابع دو بعدی بلاک-پالس	۱.۳
۴۰	توابع متعامد مثلثی فرم اول و خواص آن	۲.۳
۴۰	شکل برداری توابع مثلثی دو بعدی	۱.۲.۳
۴۵	تقریب توابع با استفاده از پایه‌های مثلثی دو بعدی	۳.۳
۴۶	توابع متعامد دو بعدی مثلثی فرم دوم و خواص آن	۴.۳
۵۱	حل عددی مسائل حساب تغییرات با استفاده از توابع متعامد مثلثی	۴
۵۱	تقریب با استفاده از توابع مثلثی	۱.۴
۵۲	چند مسئله حساب تغییرات و حل آنها	۲.۴
۶۱	مراجع	

لیست جداول

۳۶	مقایسه خصوصیات توابع متعامد مثلثی با توابع بلاک پالس	۱.۲
۵۴	جواب عددی به دست آمده در t های مختلف برای مثال ۱.۴	۱.۴
۵۶	جواب عددی به دست آمده برای مثال ۲.۴ در t های مختلف	۲.۴
۵۹	جواب عددی به دست آمده در t های مختلف برای مثال ۲.۴	۳.۴

لیست تصاویر

۸	خام کوتاه‌ترین فاصله	۱.۱
۹	خام کوتاه‌ترین زمان	۲.۱
۱۰	خام برابر-محیطی	۳.۱
۱۴	نمودار توابع بلاک-پالس (یا $\phi_i(t)$ به ازای $i = 0, 1, 2, 3, 4$)	۱.۲
۱۸	نمودار های $1 - e^x$ و تابع تقریب توسط BPFs	۲.۲
۱۸	نمودار خطای تقریب تابع $1 - e^x$ توسط BPFs	۳.۲
۲۲	تجزیه تابع بلاک-پالس به توابع مثلثی	۴.۲
۲۳	توابع متعامد مثلثی ($T_{1_i}(t), T_{2_i}(t)$ به ازای $i = 0, 1, 2, 3$)	۵.۲
۳۰	تابع انتگرال پذیر $f(t)$	۶.۲
۳۰	تقریب خطی تابع انتگرال پذیر $f(t)$	۷.۲
۳۱	سه ذوزنقه یا شش مثلث همراه با تابع $f_{p1}(t)$ فرم دیگر برای تقریب $f(t)$	۸.۲
۳۵	رابطه بین تابع انتگرال مثلثی با تابع انتگرال بلاک پالس	۹.۲
۳۹	توابع بلاک پالس دو بعدی به ازای $m_1 = 3$ و $m_2 = 2$	۱.۳
۴۱	توابع متعامد مثلثی دو بعدی به ازای $m_1 = 2$ و $m_2 = 2$	۲.۳
۴۷	توابع متعامد مثلثی دو بعدی فرم دوم به ازای $m_1 = 1$ و $m_2 = 2$	۳.۳
۵۵	نمودار خطا برای m های مختلف در روش TFs برای ۱.۴	۱.۴
۵۶	نمودار خطا برای m های مختلف در روش TFs برای مثال ۲.۴	۲.۴
۵۹	نمودار خطا برای m های مختلف در روش TFs برای مثال ۲.۴	۳.۴
۶۰	نمودار خطا برای m های مختلف در روش TFs برای مثال ۲.۴	۴.۴

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

توابع پایه‌ای قطعه‌ای پیوسته (PCBF)^۱ حدود نه دهه است که در رساله‌ها و مقالات استفاده شده‌اند، تحقیقات و بررسی‌های سازمان یافته در مورد این توابع در سال ۱۹۱۰ با کار بر روی توابع هار شروع شد [۱]. خاصیت تعامد و ماهیت قطعه‌ای پیوسته بودن این مجموعه توابع و تمایز با توابع سینوسی و کسینوسی^۲، باعث شده است که این توابع از شهرت زیادی برخوردار باشند. اهمیت و توجه زیاد به این توابع در سال‌های اخیر موجب شد که محققان انواع جدیدی از این توابع را که دارای خواص مشترکی هستند را تولید کنند، از جمله‌ی این توابع می‌توان به توابع بلاک-پالس^۳، توابع والش^۴، توابع اسلانت^۵ و توابع هار^۶ اشاره کرد [۲]. توابع قطعه‌ای پیوسته دارای کاربردهای زیادی می‌باشند، مانند: آنالیز و ساخت سیستم‌های کنترل، برای تولید (PWM)^۷ [۹]، و کاربردهای دیگر که در مراجع [۳-۸] به آنها اشاره شده است. کاربرد های مختلف و جالب توجهی از توابع بلاک-پالس توسط دیب و دیگران^۸ در مراجع [۱۰، ۱۱] معرفی شده‌اند که اشاره به این واقعیت دارد که اهمیت توابع بلاک-پالس و توابع وابسته به آن در دوره‌های اخیر وجود داشته است. در این پایان نامه به تولید جفت مکمل‌هایی از توابع بلاک-پالس به نام توابع متعامد مثلثی می‌پردازیم که یک دسته از توابع متعامد جدید هستند که اولین بار صورت یک بعدی آن توسط دیب در سال ۲۰۰۶ میلادی تولید شد. این توابع دارای سیستمی ساده می‌باشند به همین دلیل کار با این توابع را آسان و مقرون به صرفه کرده

^۱ Piecewise continuse basis function

^۲ در آن زمان یکی از مهمترین توابع شناخته شده توابع سینوسی و کسینوسی بودند

^۳ Block-pulse functions

^۴ Walsh function

^۵ Slant function

^۶ Har function

^۷ Pulse-width modulated

^۸ Deb et al

است. این توابع به علت شکل هندسی خاصی که دارند یعنی؛ مثلثی بودن، آن‌ها را توابع مثلثی می‌گویند.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱. هرگاه V یک فضای برداری باشد، حاصل ضرب داخلی (یا حاصل ضرب نقطه‌ای) برای هر $x, y \in V$ را با نماد $\langle y, x \rangle$ نمایش می‌دهیم و تابعی است از $V \times V$ به \mathbb{R} که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$۱. \text{ به ازای هر } x \in V, \langle x, x \rangle \geq ۰.$$

$$۲. \langle x, x \rangle = ۰ \text{ اگر و تنها اگر } x = ۰.$$

$$۳. \text{ به ازای هر } x, y \in V, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

$$۴. \text{ به ازای هر } x, y, z \in V, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ و } \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

هر فضای برداری که روی آن یک حاصل ضرب داخلی تعریف شده باشد، فضای حاصل ضرب داخلی می‌گویند.

تعریف ۲. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد، یک نرم تابعی است به صورت

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [۰, \infty)$$

$$۱. \text{ برای هر } x \in V, \|x\| \geq ۰.$$

$$۲. \|x\| = ۰ \text{ اگر و تنها اگر } x = ۰.$$

$$۳. \text{ برای هر } x \in V \text{ و } \alpha \in F, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

$$۴. \text{ برای هر } x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

توجه ۳. اگر شرط دوم برقرار نباشد به نرم یک شبه نرم می‌گویند.

تعریف ۴. اگر V یک فضای برداری روی میدان F و $\|\cdot\|$ هم یک نرم دلخواه روی V باشد، آنگاه فضای

برداری V را یک فضای نرم‌دار گویند و آن‌را با $(V, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵. ضرب داخلی روی فضای توابع را نسبت به تابع وزن $w(x) > ۰$ روی $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \quad (۱.۱)$$

اگر این حاصلضرب صفر شود، آنگاه f, g بر هم عمود هستند و بازه انتگرالگیری را بازه تعامد گویند.

تعریف ۶. یک مجموعه از توابع $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^n$ را نسبت به تابع وزن غیر منفی $w(t)$ روی بازه $[a, b]$ متعامد گویند، هرگاه برای هر $i, j = 0, 1, \dots, n$ داشته باشیم:

$$\int_a^b w(t)\phi_i(t)\phi_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \gamma_j, & j = i, \end{cases}$$

که در آن $\|\phi_m(x)\|^2 = \gamma_m$ می باشد.

تعریف ۷. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد و A زیر مجموعه ای از X باشد. مجموعه A را کامل گوئیم، هرگاه $y \in X$ وجود داشته باشد و اگر برای هر $x \in A$ رابطه $\langle x, y \rangle = 0$ برقرار باشد، آنگاه نتیجه دهد که $y = 0_X$. یا به عبارت دیگر

$$\{y \in X | \forall x \in A, \langle x, y \rangle = 0\} = \{0\}. \quad (2.1)$$

تعریف ۸. فضای همه توابع پیوسته بر $[a, b]$ را با $C[a, b]$ نشان می دهیم و $L^2[a, b]$ فضای مجموعه توابعی است که که انتگرال توان دوم آن ها در $[a, b]$ موجود باشد یعنی:

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b f^2(x)dx < \infty \right\}. \quad (3.1)$$

تعریف ۹. فرض کنید \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی و Ω فضای توابع باشند آنگاه رابطه زیر، یک تابع نامیده می شود:

$$I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

پس تابعها مجموعه توابعی هستند که دامنه آنها را فضای توابع و برد آنها را اعداد حقیقی تشکیل می دهند.

تعریف ۱۰. یک متریک (یا فاصله) روی مجموعه ناتهی X تابعی مانند $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ است که در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱. به ازای $x, y \in X$ داشته باشیم: $d(x, y) > 0$ و $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.

۲. به ازای هر $x, y \in X$ $d(x, y) = d(y, x)$.

۳. به ازای هر $x, y, z \in X$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (نابرابری مثلثی).

جفت مرتب (X, d) را یک فضای متریک می‌نامند.

بهترین تقریب

در این قسمت به طور اجمالی نظریه‌ی بهترین تقریب را در فضای نرم دار بیان می‌کنیم. اطلاعات بیشتر و اثبات قضایای این قسمت در مراجع [۳۳، ۳۴] آورده شده است.

تعریف ۱۱. فرض کنیم که (V, d) یک فضای متریک و W یک زیر فضای V باشد، بهترین تقریب برای هر عنصر $x \in V$ ، عنصری مانند $y^* \in W$ می‌باشد که در آن

$$d(x, y^*) = \inf\{d(x, y) : y \in W\} = \text{dist}(x, W),$$

که $\text{dist}(x, W)$ ، یعنی فاصله x از مجموعه W و x را نزدیکترین نقطه به مجموعه W نیز می‌گویند. چنانچه عضوی از W مانند y وجود داشته باشد به طوری که $\|x - y\| = \text{dist}(x, W)$ در این صورت y را بهترین تقریب x نسبت به W گویند.

در مورد بحث بهترین تقریب سه سوال اساسی وجود دارد که آیا؛

این بهترین تقریب وجود دارد؟، در صورت وجود یکتاست؟، نحوه به دست آوردن بهترین تقریب چگونه است؟.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنید W یک زیر فضایی با بعد متناهی از فضای نرم دار V و $x \in V$ باشد. آنگاه $y^* \in W$ (نه لزوماً یکتا) وجود دارد به طوری که

$$\|x - y^*\| = \min_{y \in W} \|x - y\|$$

یعنی بهترین تقریب x ، نسبت به W وجود دارد.

تعریف ۱۲. فضای نرم دار (W, d) روی فضای برداری V اکیداً محدب گوئیم، هرگاه برای هر $x \neq y \in W$ با شرایط $\|x\| \leq r$ و $\|y\| \leq r$ و برای هر $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم: $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < r$.

قضیه ۲.۱. اگر (V, d) یک فضای نرم دار اکیداً محدب و W زیر فضای از آن باشد، در این صورت بهترین تقریب $x \in V$ نسبت به W حداکثر یکی است.

تعریف ۱۳. (پایه) اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد و W یک زیر مجموعه متعامد از V باشد، آنگاه W را یک پایه متعامد می‌گوئیم، هرگاه

$$\forall y \in V, \quad y = \sum_{x \in W} \langle x, y \rangle x.$$

انواع پایه :

۱. پایه‌های پیوسته: پایه‌هایی که اعضای آن پیوسته باشند پایه‌هایی پیوسته گویند. این پایه‌ها دارای دقت بالا و بیشتر برای تقریب توابع پیوسته به کار برده می‌شوند و انواع مختلفی دارند مانند: چندجمله‌ای‌های متعامد، توابع مثلثاتی، اسپلاین‌ها و غیره.

۲. پایه‌های قطعه‌ای پیوسته: به طور کلی پایه‌های متعامد قطعه‌ای پیوسته بیشتر برای تقریب مسائل: حساب دیفرانسیل، حساب تغییرات، معادلات با مشتقات جزئی، معادله دیفرانسیل معمولی، مسائل مقدار مرزی، معادلات انتگرال، کنترل بهینه و غیره که دارای ناپیوستگی می‌باشند استفاده می‌شوند، هر چند از این پایه‌ها برای تقریب مسائل پیوسته نیز استفاده می‌شود. این توابع مزایا و معایبی دارند که مزایای این پایه‌ها عبارتند از :

- ماشینی کردن آن‌ها ساده است،
- خطای گرد کردن پایینی دارد،
- برای مسائل ناپیوسته بسیار مناسب است.

و معایب آن‌ها نیز به صورت زیر است:

- برای تقریب مسائل پیوسته زیاد مناسب نمی‌باشند،
- دقت بالایی ندارد.

این پایه‌ها انواع مختلفی دارد، مانند: بلاک پالس، هار، والش، مثلثی و غیره.

۳. پایه‌های ترکیبی: این پایه‌ها ترکیبی از پایه‌های پیوسته و قطعه‌ای ناپیوسته می‌باشد.

تعریف ۱۴. (ضرب کرونگر^۹) فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$ ، ضرب کرونگر (یا ضرب تانسوری) A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times ns}.$$

ضرب کرونگر برای ماتریس‌های مختلط نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

^۹Kronecker products

خواص ضرب کرونگر:

• اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ و $D \in \mathbb{R}^{s \times t}$ باشد، آنگاه داریم

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD (\in \mathbb{R}^{mr \times pt}).$$

• برای هر A و B داریم:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

• اگر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ متقارن باشند، آنگاه ماتریس $A \otimes B$ نیز متقارن است.

• اگر A و B نامنفرد باشد آنگاه

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

• اگر $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ نرمال باشند، آنگاه ماتریس $A \otimes B$ نیز نرمال است.

• فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ دارای تجزیه منحصر بفرد $U_A \Sigma_A V_A$ و $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ دارای یک تجزیه منحصر بفرد $U_B \Sigma_B V_B$ باشد آنگاه

$$(U_A \otimes U_B)(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)(V_A \otimes V_B),$$

یک تجزیه منحصر بفرد ماتریس $A \otimes B$ است.

• فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ دارای مقادیر ویژه μ_i برای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ باشد، و $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ دارای مقدار ویژه λ_j برای $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ باشد. آنگاه $mn \times mn$ مقدار ویژه ماتریس $A \otimes B$ عبارتند از:

$$\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_1 \mu_m, \lambda_2 \mu_1, \dots, \lambda_2 \mu_m, \dots, \lambda_n \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_m$$

تعریف ۱۵. فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ، جمع کرونگر^۱ (یا جمع تانسوری) A و B یک ماتریس با بعد $mn \times mn$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \oplus B = (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n). \quad (۴.۱)$$

توجه کنید که در حالت کلی $A \oplus B \neq B \oplus A$. [۳۲].

^۱ Kronecker sum

۲.۱ آشنایی مختصر با حساب تغییرات

۱.۲.۱ مقدمه

حساب تغییرات شاخه‌ای از ریاضیات است که در ارتباط با مسائل بهینه‌سازی است و نتایج آن در بسیاری از بخش‌های ریاضیات کاربردی، فیزیک و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطالعه سیستماتیک این مسائل به قرن هیجدهم با کار اوایلر (۱۷۷۰-۱۷۹۳) و لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) شروع شد [۱۳]. مسائل حساب تغییرات را می‌توان به یک معادله دیفرانسیل (معادله اوایلر-لاگرانژ) تبدیل کرد که روش‌های مختلفی برای حل آن ارائه شده است. روش‌های که معادله دیفرانسیل اوایلر-لاگرانژ را حل می‌کنند، روش‌های غیر مستقیم و روش‌های که مسئله اصلی حساب تغییرات را حل می‌کنند روش‌های مستقیم^{۱۱} می‌گویند. در بسیاری از مسائل حساب تغییرات حل تحلیلی معادله دیفرانسیل مربوط به مسئله مشکل و در بعضی مواقع دست نیافتنی است، بنابراین در این گونه مسائل از روش مستقیم استفاده می‌شود، واکثراً آنها را با روش‌های تقریبی حل می‌کنند [۲۶]. حساب تغییرات در جستجوی یافتن مجموعه‌ای از مسیرها، خم‌ها، خمینه‌ها و غیره است که به عنوان تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای اکسترمم هستند (اغلب در مسائل فیزیکی از آن به عنوان کمینه و بیشینه نیز یاد می‌شود). مسئله‌ی کوتاهترین خم زمانی که یکی از اولین مسائل حساب تغییراتی بود، توسط یوهان برنولی در سال ۱۶۹۶ مطرح شد، در آن زمان ذهن ریاضیدانان مشهور اروپا، از قبیل: نیوتن، لایبنیتز، یاکوب برنولی، هود، فاتیو و غیره را به خود مشغول کرد. از آن زمان به بعد حساب تغییرات به عنوان دستگاه ریاضی خاصی توسعه یافته است. عمده‌ترین انگیزه‌های ابداع و گسترش حساب تغییرات را می‌توان نیازهای تدریجی مکانیک کلاسیک به فرافکنی مشکلات محاسباتی از حوزه مشتق‌ها و حل معادلات دیفرانسیل به حوزه انتگرالها و بهینه‌سازی ذکر نمود [۱۲]. یک افسانه قدیمی وجود دارد مبنی بر اینکه شهر کارتاگ به وسیله‌ی حل مسئله برابر-محیطی تعیین شده است، به این صورت که این شهر در سال ۸۱۴ قبل از میلاد به وسیله‌ی شاهزاده دیدو^{۱۲} بنیان نهاده شد که شاهزاده به وسیله‌ی پوست یک گاو حداکثر زمین را به تصرف خود در آورد. شاهزاده با قوه‌ی ابتکار خود پوست گاو را به شکل تسمه‌های برید و سپس با متصل کردن این نوارها به هم آنها را به شکل دایره در آورد و در نتیجه بیشترین زمین را درون این دایره جایی داد. با بررسی چند مثال در ارتباط با مسائل تغییرات مطلب را شروع می‌کنیم به‌صورتی که این مسائل زمینه را برای انواع سوالاتی که در نظر داریم، فراهم می‌کند.

مثال ۱.۱. مساله‌ی کوتاهترین مسیر

^{۱۱}Direct methods

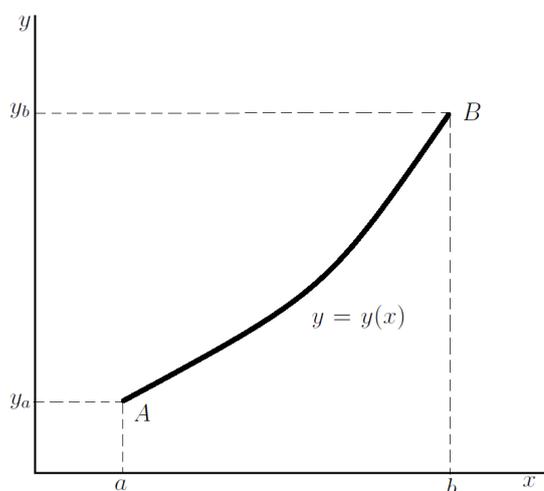
^{۱۲}Dido

یکی از قدیمی‌ترین مسائل تغییرات که مورد توجه یونانیان قرار گرفت، مسأله‌ی کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در صفحه بود.

اگر دو نقطه $A(a, y_a)$ و $B(b, y_b)$ موجود باشند، طول منحنی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند به وسیله‌ی انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$j(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right). \quad (5.1)$$

انتگرال (5.1) را با $j(y)$ نشان می‌دهیم تا بر این نکته تأکید کنیم که عدد j به منحنی $y = y(x)$ وابسته است. در عبارت (5.1)، مسأله کوتاه‌ترین فاصله، پیدا کردن تابع یا منحنی $y = y(x)$ است که $j(y)$ را کمینه می‌کند. بینش هندسی ما می‌گوید که منحنی y خط مستقیمی است که دو نقطه A و B را به وصل می‌کند، به هر حال این دور از واقعیت نیست که ثابت می‌شود این یک جواب است. به طور کلی که اگر A و B روی یک سطح باشند کوتاه‌ترین منحنی یک ژئودزیک است. [۱۲]



شکل ۱.۱: خم کوتاه‌ترین فاصله

مثال ۲.۱. مسأله‌ی مینیمال کردن سطوح

اگر منحنی $y = y(x)$ در شکل ۱.۱ حول محور x ها دوران نماید سطحی به وجود می‌آید، که مساحت این سطح به وسیله‌ی انتگرال زیر محاسبه می‌شود:

$$j(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (6.1)$$

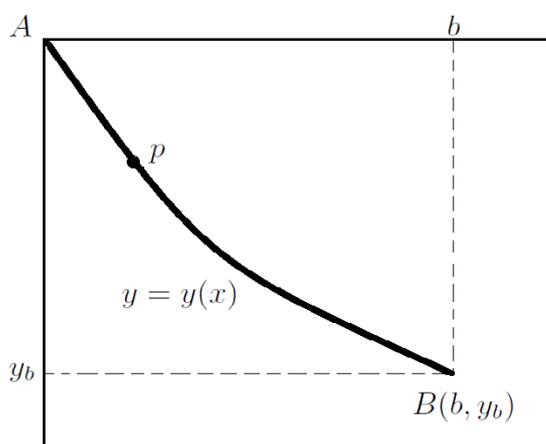
مسأله کمینه کردن سطح، این است که منحنی مانند $Y = y$ بیابیم، به طوری که مساحت (6.1) را حداقل نماید. در این حالت منحنی y کمانی از یک زنجیره^{۱۳} است و این منحنی جواب مسأله می‌باشد. شکل کلی

^{۱۳}Catenery

این مسأله می‌تواند مورد بررسی قرار بگیرد و این مجموعه مسائل جزء مسائل پلانو (۱۸۰۱-۱۸۸۳) می‌باشد. بعد از آنکه فیزیکدانان با ورقه‌های صابون روی سیم‌ها آزمایش می‌کردند یک درک فیزیکی مسئله به‌وجود آمد.

مثال ۳.۱. خم کوتاه‌ترین زمان^{۱۴}

سومین مثال از مسائل حساب تغییرات یک مثال پویا است. در این جا مسأله پیدا کردن شکل یک سیم صافی است که دو نقطه از یک صفحه قائم را به هم وصل می‌کند، به طوری که یک مهره کوچک از بالا به پایین این مسیر بین دو نقطه را در کمترین زمان بپیماید. این همان مسأله خم کوتاه‌ترین زمان گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲) و برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) می‌باشد. با استفاده از نمودار شکل ۳.۱ می‌بینیم که سرعت مهره در نقطه‌ی p برابر



شکل ۳.۱: خم کوتاه‌ترین زمان

است با $v = \frac{ds}{dt}$ از این رو زمان حرکت از A تا B از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T(y) = \int_{x=0}^b \frac{ds}{v}, \quad ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

با توجه به مکانیک مقدماتی، می‌دانیم که اگر ذره از حالت سکون در نقطه A شروع به حرکت کند، داریم:

$$v^2 = 2gy,$$

که در آن g شتاب ثقل زمین است. بنابراین انتگرالی که باید کمینه شود، عبارت است از:

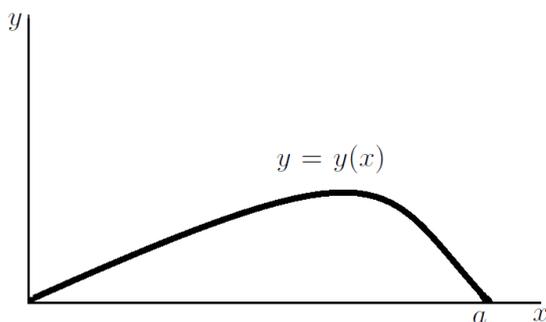
$$T(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

^{۱۴}Brachistochrone

جواب مسأله یعنی y یک کمان از سیکلوئید است، که توسط اشخاصی مانند: نیوتن^{۱۵} (۱۶۴۲-۱۷۷۲)، لایبنیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶)، جیمز برنولی^{۱۶} (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و جان برنولی^{۱۷} (۱۶۶۷-۱۷۴۸) به دست آمده است.

مثال ۴.۱. مسئله برابر-محیطی^{۱۸}

این مثال یکی از قدیمی‌ترین مسأله تغییرات است که به وسیله یونانیان مطرح شد. یک مسئله هندسی است و در ارتباط با یافتن حداکثر سطح محصور یک منحنی بسته با طول داده شده می‌باشد. صورت ساده این مسئله



شکل ۳.۱: خم برابر-محیطی

به وسیله ی پاپوس حل شد. مسئله عبارت بود از یافتن یک منحنی y و فاصله‌ای از محور x ها (شکل ۳.۱). در

این حالت مسئله یافتن تابع $Y = y$ است به طوری که سطح

$$j(y) = \int_a^b y \, dx$$

را حداکثر نماید، با شرط آنکه طول منحنی

$$k(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx, \quad (۷.۱)$$

یک مقدار ثابت باشد. برای این مسئله جواب شهودی، کمانی از یک دایره درست می‌باشد. [۱۲]

۲.۲.۱ مسئله اصلی حساب تغییرات

در این قسمت مطالعه سیستماتیک مسأله تغییرات را آغاز می‌کنیم با توجه به اینکه هریک از مثال‌های ۱.۱ تا ۴.۱ شکل‌های مخصوصی از مسائل عمومی این بحث است. فرض کنیم که A و B دو نقطه ثابت با

^{۱۵}Newton

^{۱۶}James Bernolli

^{۱۷}John Bernolli

^{۱۸}Isoperimetric

مختصات (a, y_a) و (b, y_b) باشند یک مجموعه از منحنی‌های $y = y(x)$ وجود دارد که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند. در این صورت مسئله یافتن یک عضو از مجموعه‌ی y است که انتگرال،

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (۸.۱)$$

را کمینه کند. برای مثال‌های فوق تابع f عبارتند از:

$$f = \sqrt{(1 + y')^2},$$

$$f = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2},$$

$$f = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

حال منحنی $y = y(x)$ ممکن است پیوسته یا گسسته باشد، مشتق‌پذیر باشد یا نباشد که این‌ها بر انتگرال $J(y)$ اثر می‌گذارد.

۳.۲.۱ دو روش عددی در حل مسائل حساب تغییرات

روش اویلر^{۱۹}: یک روش برای حل مسائل حساب تغییرات

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_n} f(x, y, y') dx,$$

با شرایط مرزی

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_n) = y_n,$$

روش اویلر می‌باشد. در این روش بازه انتگرالگیری را به زیر بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که ابتدا و انتهای آنها از

$$x_i = x_0 + i \frac{x_n - x_0}{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

انتخاب می‌شوند، همچنین اگر $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ معرفی کنیم، تابع به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$I(y_i) = \int_{x_0}^{x_n} f(x_i, y_i, y'_i) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_0 + ih, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}).$$

مقادیر مجهول y_i به وسیله حل دستگاه n معادله‌ای که از روابط

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

^{۱۹}Euler's method

تشکیل می شود به دست می آیند.

روش ریتز^{۲۰}: این روش مبنی بر یک تقریب از تابع جواب مجهول با یک ترکیب خطی توابع پایه ای می باشد. فرض کنید که تابع مجهول با

$$\bar{y}(x) = \alpha_0 b_0(x) + \alpha_1 b_1(x) + \dots + \alpha_n b_n(x),$$

تقریب زده شود که توابع پایه ای باید در شرایط مرزی صدق کنند اما ضرایب مجهول باقی می ماند. با جانشین کردن تقریب در مسئله حساب تغییرات داریم:

$$I(\bar{y}) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx.$$

برای رسیدن به اکستریم تابع باید مشتق های جزئی نسبت به ضرایب صفر شوند، یعنی:

$$\frac{\partial I(\bar{y})}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

روابط اخیر باعث تشکیل یک دستگاه شده که جواب آن ضرایب را به دست می دهد. اثبات این حکم در مرجع [۳۰] موجود است. برای اطلاعات بیشتر درباره این روش ها و دو روش باقیمانده می توانید به فصل ۶ در [۲۹] رجوع کنید.

^{۲۰}Ritz's method

فصل ۲

توابع متعامد قطعه‌ای یک بعدی

مقدمه

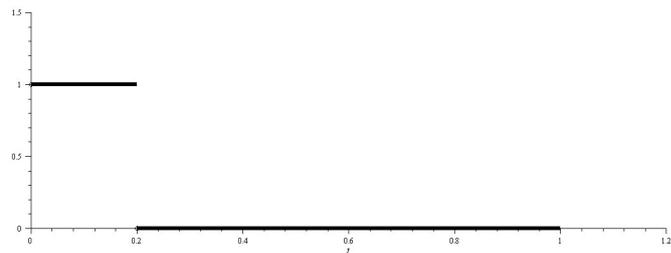
این فصل را با تعریف توابع بلاک-پالس و خواص آن آغاز می‌کنیم سپس در بخش بعد یک دسته از توابع قطعه‌ای پیوسته را با نام توابع مثلثی که از توابع بلاک-پالس مشتق می‌شوند را معرفی کرده و خواص آن‌ها را با این توابع مقایسه و مزیت‌ها و معایب آن‌ها را نسبت به یکدیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم. قرارداد: در این فصل هر جا که اسم توابع بلاک-پالس یا توابع مثلثی آورده شده منظور صورت‌های یک بعدی آن‌هاست.

۱.۲ توابع بلاک-پالس

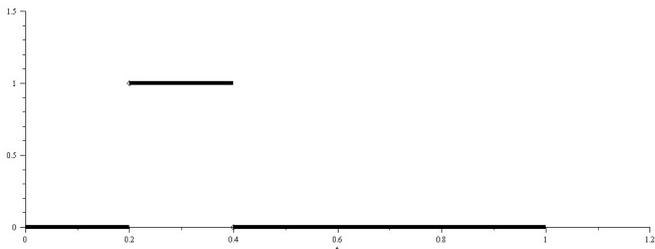
تعریف ۱.۶. توابع بلاک-پالس توابعی پله‌ای هستند، که به طور معمول آن‌ها را در بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنند، [۱۶، ۱۷]

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{m} \leq t < \frac{i+1}{m}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.2)$$

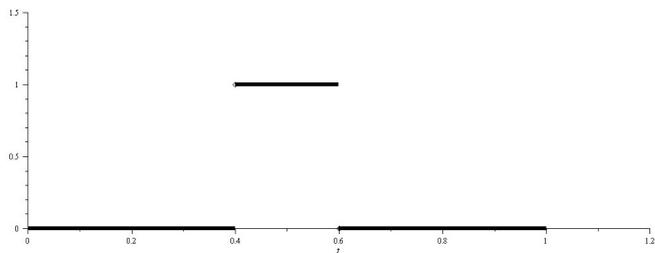
که در آن $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ و m یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. در فرمول (۱.۲) بازه واحد $[0, 1]$ به m زیر بازه مساوی تقسیم می‌شود که i امین تابع بلاک-پالس ϕ_i تنها یک مستطیل محدود با ارتفاع واحد در زیر بازه‌ی $[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m})$ می‌باشد. تعدادی از این توابع را در شکل ۱.۲ به ازای $m = 5$ رسم کرده‌ایم.



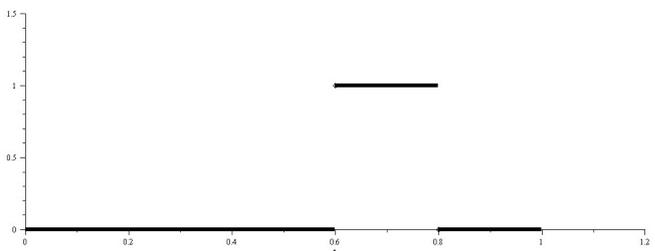
نمودار $\phi_0(x)$



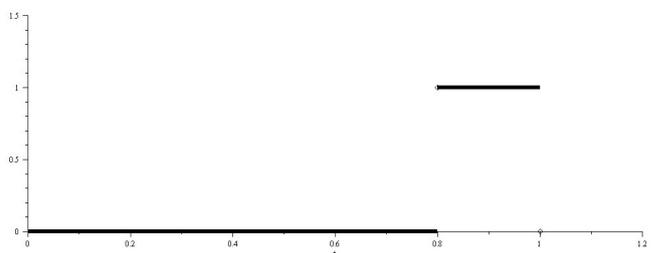
نمودار $\phi_1(x)$



نمودار $\phi_2(x)$



نمودار $\phi_3(x)$



نمودار $\phi_4(x)$

شکل ۱.۲: نمودار توابع بلاک-پالس (یا $\phi_i(t)$ به ازای $i = 0, 1, 2, 3, 4$)