فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

جفت (G,N)، به طوری که G یک گروه و N زیرگروه نرمال آن باشد، ساختاری است که توجه بسیاری از ریاضی‌دانان رابه خود جلب کرده است. در واقع مطالعه جفت گروه‌ها، مطالعه همزمان یک گروه و زیرگروه آن می‌باشد و جالب این است که حالت خاص آن یعنی مطالعه جفت (G,G)، در واقع مطالعه گروه G خواهد بود. در این راستا یکی از مسائل مورد توجه تعریف ضرب‌گر شور یک جفت از گروه‌ها بوده است که الیس [۹] این کار را انجام داده است. هم‌چنین او جفت توانا را معرفی کرده و برخی خواص آن را مورد بررسی قرار داده است [٦]. لدی نیز در این زمینه کارهایی انجام داده است از جمله معرفی جفت کامل [۱۹]. سالمکار و مقدم نیز در چندین مقاله [۲۷]، [۲۸] و [۲۹] به بررسی بیشتر ضرب‌گر شور برای جفت‌گروه‌ها پرداختند و هم‌چنین پایای بئر را در یک حالت خاص برای جفت گروه‌ها معرفی کردند. در این رساله نیز هدف اصلی بررسی بیشتر جفت توانا، جفت کامل و جفت پوچ‌توان می‌باشد. در واقع رساله حاضر که برگرفته از مقالات [۱۴]، [۲۳]، [۲۴] و [۲۵] می‌باشد در چهار فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

فصل اول شامل مطالب مقدماتی و پیش‌نیازهایی است که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم به بررسی جفت‌های توانا می‌پردازیم. در بخش اول تاریخچه کوتاهی از مطالب انجام شده در این زمینه بیان می‌شود. در بخش دوم این فصل به شناسایی بیشتر زیرگروهی که الیس [٦] به عنوان محکی برای توانایی یک جفت از گروه‌ها مطرح کرده است می‌پردازیم. در واقع ارتباط بین این زیرگروه و نمایش آزاد گروه را پیدا می‌کنیم. در بخش سوم محکی جدید برای توانایی جفت گروه‌ها معرفی می‌کنیم و ارتباط آن را با محک معرفی شده توسط الیس مشخص خواهیم کرد. سپس در بخش چهارم این فصل با کمک دو بخش قبل شرط لازم و کافی برای توانایی یک جفت از گروه‌های آبلی متناهیاً تولید شده به دست می‌آوریم. نهایتاً در بخش آخر جفت $c-$توانا را معرفی کرده و احکامی در این زمینه به دست می‌آوریم از جمله این

که نشان می‌دهیم یک جفت از گروه‌ها دقیقاً چه زمانی c–توانا است.

در فصل سوم به بررسی جفت کامل می‌پردازیم. در بخش اول تاریخچه‌ای از نتایج به‌دست آمده در این زمینه را بیان می‌کنیم. در بخش دوم یک توسیع مرکزی نسبی خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در بخش سوم با متمرکز شدن روی جفت کامل، نتایج قابل توجه‌ای برای جفت کامل به دست می آوریم. از جمله معرفی جفت پوششی برای جفت‌های کامل و شناخت بیشتر آن و پیدا کردن شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک جفت از گروه‌ها. در آخرین بخش مفاهیم جفت پوششی و جفت کامل را نسبت به چند گونای گروه‌های پوچ توان تعمیم می‌دهیم و برخی نتایج مشابه را بیان و اثبات می‌کنیم.

آخرین فصل این رساله به معرفی جفت پوچ توان و بررسی ویژگی‌های آن اختصاص دارد. در این فصل پس از بیان مقدمه‌ای کوتاه، در بخش دوم مفهوم پوچ توانی جفت گروه‌ها که در واقع مفهومی بین پوچ توانی گروه و زیرگروهش می‌باشد، را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم و نتایجی جدید در رابطه با گروه‌های پوچ توان به دست می آوریم. پس از آن احکامی برای یک جفت از گروه‌های متناهیاً تولید شده و مفاهیم جفت به طور باقیمانده‌ای پوچ توان و جفت هاپفین را در بخش سوم ارائه می‌دهیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم یک جفت به طور باقیمانده‌ای پوچ توان از گروه‌های متناهیاً تولید شده، هاپفین است.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

دراین فصل مفاهیم و نمادهایی را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است معرفی کرده و قضایایی را که برای اثبات نتایج اصلی در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان و در صورت لزوم اثبات می‌کنیم.

در بخش دوم به معرفی مفاهیم چندگونا، زیرگروه لفظی و زیرگروه‌های $\mathcal{V}$-حاشیه‌ای می‌پردازیم. سپس ضرب‌گر شور و گروه پوششی را معرفی کرده و قضایای مهم مربوط به آنها را بیان می‌کنیم.

بخش سوم این فصل به معرفی گروه‌های پوچ‌توان، هاپفین و به طور باقیمانده‌ای پوچ‌توان و مفاهیم وابسته اختصاص دارد.

در بخش‌های چهارم این فصل گروه‌های توانا و مفهوم تعمیم یافته آن یعنی گروه‌های c-توانا را معرفی کرده و به بیان محک توانایی و c-توانایی می‌پردازیم.

در آخرین بخش از این فصل ابتدا مفهوم جفت گروه‌ها و ضرب‌گر شور آن معرفی شده است. هم‌چنین با مفاهیم توسیع مرکزی نسبی و جفت پوششی آشنا می‌شویم. در ادامه به بیان قضایای مربوط به جفت گروه‌ها، که در این رساله نقش اساسی بر عهده دارند، می‌پردازیم.

۲.۱ چند گونا و ضرب‌گرشور

فرض کنید F گروهی آزاد روی مجموعه شمارای $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ و V یک زیر مجموعه ناتهی از F باشد. یادآوری می‌کنیم که به هر عضو F یک کلمه[۱] گفته می‌شود.

فرض‌کنید $v = x_{i_1}^{l_1} \ldots x_{i_r}^{l_r} \in V$ یک کلمه و $g_1, \ldots, g_r$ عناصری از گروه دلخواه G باشند. دراین صورت مقدار[۲] v در $(g_1, \ldots, g_r)$ به صورت

$$v(g_1, \ldots, g_r) = g_1^{l_1} \ldots g_r^{l_r}$$

تعریف می‌شود. زیر گروه تولید شده توسط تمام مقادیر کلمات متعلق به V در G را زیر گروه لفظی[۳] G نامیده و با نماد $V(G)$ نمایش می‌دهیم :

$$V(G) = \langle v(g_1, \cdots, g_r) | v \in V, g_1, \cdots, g_r \in G, r \in \mathbb{N} \rangle$$

هم‌چنین زیر گروه حاشیه‌ای[۴] G را با نماد $V^*(G)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V^*(G) &= \{a \in G | v(g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i a, g_{i+1}, \cdots, g_r) = v(g_1, \cdots, g_i, \cdots, g_r), \\ &\quad v \in V, g_1, \cdots, g_r \in G, 1 \leq i \leq r, r \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان نشان داد مجموعه بالا یک زیر گروه نرمال از گروه G تشکیل می‌دهد.

فرض کنید V مجموعه‌ای دلخواه از کلمات بر حسب $x_1, x_2, \cdots$ باشد. رده همه گروه‌های G به طوری که $V(G) = 1$ یا به طور معادل $V^*(G) = G$، چند گونای[۵] $\mathcal{V}$

[۱] word
[۲] value
[۳] verbal subgroup
[۴] marginal subgroup
[۵] variety

نسبت به V نامیده می‌شود. هم‌چنین هر عضو از V را یک قانون[۶] و مجموعه V را یک مجموعه از قوانین برای چند گونای $\mathcal{V}$ می‌نامیم.

حال فرض کنید N زیر گروهی نرمال از گروه مفروض G و $\mathcal{V}$ یک چند گونا از گروه‌ها باشد. زیر گروه $[NV^*G]$ از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[NV^*G] &= \langle v(g_1,\cdots,g_{i-1},g_ia,g_{i+1},\cdots,g_r)(v(g_1,\cdots,g_{i-1},g_i,g_{i+1},\cdots,g_r))^{-1}| \\ &\quad v\in V, a\in N, g_1,\cdots,g_r\in G, 1\le i\le r, r\in\mathbb{N}\rangle\end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید که $[NV^*G]$ زیر گروه نرمال $N\cap V(G)$ می‌باشد. در مثال زیر برخی از چند گوناهای معروف که بیشتر مورد استفاده ما هستند، معرفی می‌شوند.

مثال ۱.۲.۱

۱) فرض کنید $V=\{x_1\}$ که در آن x_1 مولد گروه آزاد F است. در این صورت $\mathcal{V}$ چند گونای گروه‌های بدیهی است و برای هر گروه G و هر زیر گروه نرمال از آن مانند N، داریم $V(G)=G$، $V^*(G)=1$ و $[NV^*G]=N$.

۲) فرض کنید $\mathcal{A}$ چند گونای تعریف شده توسط مجموعه $A=\{[x,y]\}$ باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ چند گونای گروه‌های آبلی می‌باشد و برای هر گروه دلخواه G و هر زیر گروه نرمال از آن مانند N داریم: $A(G)=G'$، $A^*(G)=Z(G)$ و $[NA^*G]=[N,G]$.

۳) فرض کنید کلمه پوچ‌توان $[x_1,\ldots,x_{c+1}]$ را با γ_{c+1} و مجموعه شامل این کلمه را با N_c نمایش می‌دهیم. در این صورت $\mathcal{N}_c$ چند گونای گروه‌های پوچ‌توان از رده حداکثر c می‌باشد و زیر گروه‌های لفظی و حاشیه‌ای یک گروه دلخواه G عبارت است از $N_c(G)=\gamma_{c+1}(G)$ و $N_c^*(G)=Z_c(G)$. هم‌چنین برای هر زیر گروه نرمال N از G داریم: $[NN_c^*G]=[N,cG]$.

اینک آماده‌ایم تا پایای بئر یک گروه را نسبت به یک چند گونا معرفی کنیم.

[۶] law

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{V}$ یک چند گونا از گروه‌ها با مجموعه قوانین V و G یک گروه دلخواه با نمایش آزاد[۷]

$$۱ \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow ۱$$

باشد. در این صورت پایای بئر[۸] G نسبت به چند گونای $\mathcal{V}$ را با $\mathcal{V}M(G)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{V}M(G) = \frac{R \cap V(F)}{[RV^*F]}$$

می‌توان نشان داد $\mathcal{V}M(G)$ یک گروه آبلی است و به نمایش آزاد G بستگی ندارد. (برای نمونه می‌توانید به صفحات ۱۰۷ و ۱۰۸ از [۱۸] مراجعه کنید.)

نکته ۳.۲.۱ ۱) اگر $\mathcal{A}$ چند گونای گروه‌های آبلی باشد، آنگاه پایای بئر G نسبت به چند گونای $\mathcal{A}$ عبارت است از

$$M(G) = \frac{R \cap F'}{[R, F]}$$

که ضرب‌گر شور[۹] G نامیده می‌شود.

۲) پایای بئر گروه G نسبت به چند گونای گروه‌های پوچ‌توان از رده حداکثر c، $\mathcal{N}_c$، که ضرب‌گر c–پوچ‌توان[۱۰] G نامیده می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{N}_cM(G) = \frac{R \cap \gamma_{c+۱}(F)}{[R, cF]}$$

[۷] free presentation
[۸] Baer invariant
[۹] Schur multiplier
[۱۰] c-nilpotent multiplier

دقت کنید که ما برای راحتی در طول رساله ضرب‌گر c−پوچ‌توان را با $M^{(c)}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. گروه G^* گروه پوششی[۱۱] G نامیده می‌شود هرگاه زیر گروه A از G^* موجود باشد به طوری که

۱) $A \leq Z(G^*) \cap G^{*'}$

۲) $A \cong M(G)$

۳) $G^*/A \cong G$

قضیه ۵.۲.۱ $\mathcal{V}M(G)$ یک تابعگون[۱۲] از رسته[۱۳] گروه‌ها به رسته گروه‌های آبلی است.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. زیر گروه فراتینی[۱۴] G که با نماد $\phi(G)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(G) = \bigcap_{\substack{\max \\ M \leq G}} M$$

اگر G هیچ زیرگروه بیشینی[۱۵] نداشته باشد، آنگاه $\phi(G) = G$ نتیجه می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. عنصر $x \in G$ غیرمولد[۱۶] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر مجموعه X به طوری که $G = \langle X, x\rangle$ بتوان نتیجه گرفت $G = \langle X\rangle$.

[۱۱] covering group
[۱۲] functor
[۱۳] category
[۱۴] Frattini subgroup
[۱۵] maximal
[۱۶] nongenerator

قضیه ۸.۲.۱ اگر $\phi(G) \neq G$، آنگاه $\phi(G)$ مجموعه عناصر غیر مولد G است.

برهان. به [۲۶] مراجعه شود. □

۳.۱ گروه‌های پوچ‌توان

در این بخش با فرض این که خواننده با مفهوم گروه پوچ‌توان آشنایی کامل دارد، به بیان قضایای مهم در این رابطه می‌پردازیم. لازم به ذکر است قضایای این بخش همه از مرجع [۲۶] آورده شده است.

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و N زیر گروهی نرمال و غیر بدیهی از G باشد. در این صورت $N \cap Z(G) \neq 1$.

در قضیه قبل اگر $N = G$ اختیار شود، نتیجه می‌گیریم $Z(G) \neq 1$. به عبارت دیگر هر گروه پوچ‌توان نابدیهی دارای مرکزی نابدیهی است.

قضیه ۲.۳.۱ (قضیه رابینسون)[۱۷] فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و $F_i = \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ باشد. در این صورت نگاشت

$$\Psi : F_i \otimes_{\mathbb{Z}} G_{ab} \longrightarrow F_{i+1}$$

با ضابطه $\Psi(a(\gamma_{i+1}(G)) \otimes gG') = [a, g](\gamma_{i+2}(G))$، برو ریختی‌است.

همان طور که می‌دانید اگر G یک گروه باشد و N زیر گروه نرمال آن به طوری که N و G/N پوچ‌توان باشند، لزوماً G پوچ‌توان نیست. برای مثال قرار دهید $G = S_3$. در واقع قضیه مهم زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۳.۳.۱ اگر $N \lhd G$ و N و G/N' پوچ‌توان باشند، آنگاه G پوچ‌توان است.

[۱۷] Robinson

قضیه ۴.۳.۱ (قضیه مالسِف[۱۸] [۲۶]) اگر مرکز گروه G بدون تاب[۱۹] باشد، آنگاه هر عامل سری مرکزی بالایی آن نیز بدون تاب است.

تعریف ۵.۳.۱ گروه G را به طور باقیمانده‌ای پوچ‌توان[۲۰] می‌نامیم هرگاه برای هر $G \ni g \neq ۱$، زیر گروه نرمال N_g از G وجود داشته باشد به طوری که $g \notin N_g$ و G/N_g پوچ‌توان باشد.

برای مثال گروه‌های آزاد همواره به طور باقیمانده‌ای پوچ‌توان هستند.

قضیه ۶.۳.۱ گروه G به طور باقیمانده‌ای پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $\bigcap_{n=۱}^{\infty} \gamma_n(G) = ۱$.

تعریف ۷.۳.۱ گروه G هاپفین[۲۱] است اگر هر خودریختی پوشا از G، یکریختی باشد.

برای مثال همه گروه‌های متناهی و گروه‌های ساده هاپفین هستند در حالی که گروه‌های آزاد با رتبه نامتناهی هاپفین نیستند. هم‌چنین ثابت شده‌است که همه گروه‌های متناهیاً تولید شده لزوماً هاپفین نیستند. در واقع می‌توان یک گروه متناهیاً تولید شده حل‌پذیر ساخت به طوری که هاپفین نباشد. (به [۲۶] تمرین ۱۶.۶.۱ رجوع کنید.) ولی قضیه زیر را داریم.

قضیه ۸.۳.۱ گروه به‌طور باقیمانده‌ای متناهی G، که متناهیاً تولید شده نیز باشد، هاپفین است.

---

[۱۸] Mal'cev
[۱۹] torsion free
[۲۰] residually nilpotent
[۲۱] Hopfian

۴.۱ گروه‌های توانا و c–توانا

تعریف ۱.۴.۱ گروه G را توانا[۲۲] می‌نامیم هرگاه با گروه خودریختی‌های داخلی گروه دیگری مانند E یکریخت باشد. به طور معادل گروه G توانا است اگر گروهی مانند E موجود باشد به طوری که $G \cong E/Z(E)$.

مثال ۲.۴.۱ واضح است که هر گروه با مرکز بدیهی، توانا است. برای مثال $S_۳$ یک گروه توانا است. هم‌چنین اگر گروه

$$D_۸ = \langle a, b | a^۴ = ۱ = b^۲, a^b = a^{-۱} \rangle$$

را در نظر بگیریم چون چهار گروه کلاین با $D_۸/Z(D_۸)$ یکریخت است، بنابراین توانا است.

می‌توان تعریف بالا را به چندگونای $\mathcal{N}_c$ از گروه‌ها به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنید $\mathcal{N}_c$ چند گونای گروه‌های پوچ‌توان باشد. در این صورت گروه G یک گروه $\mathcal{N}_c$– توانا (c–توانا) نامیده می‌شود هرگاه گروهی مانند E وجود داشته باشد به طوری‌که $G \cong E/Z_c(E)$.

تعریف ۴.۴.۱ دنباله دقیق $۱ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow ۱$ یک توسیع مرکزی[۲۳] نامیده می‌شود اگر $\mathrm{Im} f \leq Z(B)$.

---

[۲۲] capable
[۲۳] central extension

مثال ۵.۴.۱ فرض کنید G یک گروه توانا باشد. دراین صورت گروه E موجود است به طوری‌که $G \cong E/Z(E)$. بنابراین

$$1 \longrightarrow Z(E) \xrightarrow{\subseteq} E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

یک توسیع مرکزی است.

تعریف ۶.۴.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه $Z^*(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود[۲]،

$$Z^*(G) = \bigcap\{\phi(Z(E)) | \phi : E \longrightarrow G \text{ یک توسیع مرکزی از } G \text{ است}\}$$

این زیرگروه که مرکز دقیق[۲۴] G نامیده می‌شود، یک زیرگروه مشخصه[۲۵] از G و مشمول در $Z(G)$ است و در واقع محکی برای توانایی گروه‌ها می‌باشد.

قضیه ۷.۴.۱ گروه G توانا است اگر و تنها اگر $Z^*(G) = 1$.

برهان. به [۲] رجوع کنید. □

لم ۸.۴.۱ فرض کنید N یک زیرگروه مرکزی از G باشد. دراین صورت $N \subseteq Z^*(G)$ اگر و تنها اگر نگاشت طبیعی $f : M(G) \longrightarrow M(G/N)$ یک تکریختی[۲۶] باشد.

برهان. به[۲] رجوع کنید. □

تعریف ۹.۴.۱ دنباله دقیق

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$$

یک توسیع $c-$مرکزی نامیده می‌شود اگر $\mathrm{Im} f \leq Z_c(B)$.

---

[۲۴] precise center
[۲۵] characteristic
[۲۶] monomorphism

به سادگی می‌توان دید زیرگروه $Z^*(G)$ قابل تعمیم به زیرگروه $Z_c^*(G)$ می‌باشد که این زیر گروه نیز محکی برای c−توانایی گروه‌ها است [۴].

$$Z_c^*(G) = \bigcap\{\phi(Z_c(E)) | \text{است } G \text{ یک توسیع } c\text{−مرکزی از } \phi : E \longrightarrow G\}$$

در واقع گروه G، c−توانا است اگر و تنها اگر $Z_c^*(G) = 1$ [۴].

۵.۱ جفت گروه‌ها

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنید G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. جفت مرتب (G, N) یک جفت[۲۷] از گروه‌ها نامیده می‌شود.

یک همریختی بین دو جفت (G, N) و (G', N')، همریختی گروهی از G به G' است به طوری که N را به داخل N' می‌نگارد. الیس[۲۸] در[۹] ضرب‌گر شورجفت (G, N) را در دنباله دقیق زیر معرفی می‌کند به‌طوری که یک تابعگون آبلی است و با $M(G, N)$ نشان می‌دهد.

$$\begin{array}{llllll} H_3(G) & \xrightarrow{\eta} H_3(G/N) & \longrightarrow M(G,N) & \longrightarrow M(G) & \xrightarrow{\mu} & \\ & M(G/N) & \longrightarrow N/[N,G] & \longrightarrow G^{ab} & \xrightarrow{\alpha} (G/N)^{ab} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

به طوری که$H_3(-)$ سومین همولوژی[۲۹] از یک گروه با ضرایب صحیح است و همریختی‌های μ و η، همریختی‌های تابعگونی از$H_3(-)$ و $M(-)$ می‌باشند.

حال جفت (G, N) را در نظر بگیرید به‌طوری که N در G دارای مکمل باشد، یعنی زیرگروهی مانند H در G وجود داشته باشد به طوری که $G = HN$ و

[۲۷] pair of groups
[۲۸] Ellis
[۲۹] third hommlogy

$H \cap N = ۱$. در این حالت الیس در[۹] ضرب‌گر شورجفت (G, N) را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$M(G, N) = \ker(\mu : M(G) \longrightarrow M(G/N)),$$

به طوری که μ توسط بروریختی طبیعی $\pi : G \longrightarrow G/N$ روی تعریف کوهمولوژیکی $M(G)$ و $M(G/N)$ القامی‌شود. اگر این تعریف را با نماد $H^{۲}(G, G^*)$ نمایش دهیم با دانستن نکات زیر می‌توان ثابت کرد $M(G, N)$ و $([S, F] \cap R)/[R, F]$ یکریخت است.

نکته ۲.۵.۱ $H^{۲}(-, C^*)$ یک تابعگون از رسته گروه‌های متناهی به رسته گروه‌های آبلی است.

نکته ۳.۵.۱ $M(-) \cong H^{۲}(-, C^*)$

با توجه به نکات بالا نمودار جابجایی زیر را داریم:

$$\begin{array}{lcl} M(G) & \xrightarrow{\alpha} & H^{۲}(G, \mathbb{C}^*) \\ M(\pi) \downarrow & & \downarrow H^{۲}(\pi) \\ M(G/N) & \xrightarrow{\beta} & H^{۲}(G/N, \mathbb{C}^*) \end{array}$$

که α و β یکریختی هستند.
فرض کنید $x \in \ker M(\pi)$. در این صورت $M(\pi)(x) = ۱$ و لذا

$$H^{۲}(\pi)(\alpha(x)) = \beta(M(\pi)(x)) = ۱$$

پس $\alpha(x) \in \ker H^{۲}(\pi)$. همریختی

$$\begin{array}{rl} \alpha| : \ker M(\pi) & \longrightarrow \ker H^{۲}(\pi) \\ x & \longmapsto \alpha(x) \end{array}$$

را در نظر بگیرید. چون α یک به یک است، $\alpha_|$ نیز یک به یک است. فرض کنید $y \in \ker H^{۲}(\pi)$. در این صورت $H^{۲}(\pi)(y) = ۱$. چون α پوشاست، x ای در $M(G)$ موجود است که $\alpha(x) = y$. لذا $\beta(M(\pi)(x)) = ۱$.

و در نتیجه با توجه به یکریختی بودن β ، $M(\pi)(x) = 1$. پس $x \in \ker(M(\pi))$ این مطلب نشان می‌دهد $\alpha_|$ پوشاست. بنابراین $\alpha_|$ یکریختی است. توجه کنید بنابر تعریف الیس

$$M(G,N) = \ker H^2(\pi) = \ker \mu$$

بنابر قضیه ۵.۲.۱،

$$\begin{array}{rl} \mu(\pi) : M(G) = \frac{F' \cap R}{[R,F]} & \longrightarrow M(\frac{G}{N}) = \frac{F' \cap S}{[S,F]} \\ x[R,F] & \longmapsto x[S,F] \end{array}$$

و لذا $\ker M(\pi) = ([S,F] \cap R)/[R,F]$. باتوجه به یکریختی $\alpha|$،

$$M(G,N) = \frac{[S,F] \cap R}{[R,F]}$$

روشن است که $M(G,N) \leq M(G)$ و لذا اگر G متناهی باشد، $M(G,N)$ نیز متناهی است.

سالمکار پایای بئر جفت (G,N) را نسبت به چندگونای $\mathcal{V}$، به صورت

$$\frac{R \cap [SV^*F]}{[RV^*F]}$$

تعریف می‌کند و با نماد $\mathcal{V}M(G,N)$ نمایش می‌دهد.

اگر $N = G$ یا N دارای مکمل در G و $\mathcal{V}$ چندگونای گروه‌های آبلی باشد، آنگاه در حالت اول

$$\mathcal{V}M(G,N) = \frac{R \cap [FV^*F]}{[RV^*F]} = \frac{R \cap V(F)}{[R,F]} = \mathcal{V}M(G)$$

و در حالت دوم

$$\mathcal{V}M(G,N) = \frac{R \cap [S,F]}{[R,F]} = M(G,N).$$

قضیه ۴.۵.۱ فرض کنید (G,N) یک جفت از گروه‌های متناهی پوچ‌توان باشد و $S_1,\dots,S_k$ همه زیر گروه‌های سیلو از گروه G باشند. در این صورت

$$M(G,N)\cong M(S_1,S_1\cap N)\oplus\cdots\oplus M(S_k,S_k\cap N).$$

برهان. به [۹] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۵.۱ فرض کنید (G,N) یک جفت از گروه‌ها باشد و M یک گروه دلخواه. همریختی $\delta: M\longrightarrow G$ به همراه یک عمل[۳۰] G روی M

$$\begin{array}{ll} M\times G & \longrightarrow M \\ (m,g) & \longmapsto m^g \end{array}$$

یک توسیع مرکزی نسبی[۳۱] برای (G,N) نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\delta(M)=N$،

۲) برای هر $g\in G$ و $m\in M$، $\delta(m^g)=g^{-1}\delta(m)g$،

۳) برای هر $m,m_1\in M$، $m^{\delta(m_1)}=m_1^{-1}mm_1$،

۴) G به طور بدیهی روی $\ker\delta$ عمل کند.

روشن است که نگاشت جزئیت $i: N\longrightarrow G$ به همراه‌عمل

$$\begin{array}{ll} N\times G & \longrightarrow N \\ (n,g) & \longmapsto n^g \end{array}$$

یک توسیع مرکزی نسبی برای جفت (G,N) است.

فرض کنید M و G دو گروه باشند و $\alpha: G\longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ همریختی گروهی باشد به طوری که برد α شامل خودریختی‌های داخلی گروه M باشد.

[۳۰] action
[۳۱] relative central extension

$(\mathrm{Inn}(M) \leq \mathrm{Im}(\alpha))$. اگر برای هر $g \in G$، اثر $\alpha(g)$ بر m رابا m^g نمایش دهیم $G-$ مرکز[۳۲] M را الیس به صورت زیر تعریف می کند.

$$Z(G, M) = \{m \in M | m^g = m, \quad \forall g \in G\}.$$

واضح است که $Z(G,M)$ زیرگروه $Z(M)$ است. زیرا $Z(M)$ همان $\mathrm{Inn}(M)-$ مرکز M است و از طرفی نرمال در M است.

هم‌چنین الیس در[٦] برای هر $g \in G$ و $m \in M$، $m^{-1}m^g$ را با نماد $[m, g]$ نشان می‌دهد و $G-$جابجاگر[۳۳] m و g می‌نامد. زیرگروه تولید شده توسط همه $G-$جابجاگرهای $[m, g]$ را زیر گروه $G-$جابجاگر می‌نامد و با نماد $[M, G]$ نمایش می‌دهد. با توجه به این که $\mathrm{Inn}(M) \leq \mathrm{Im}(\alpha)$ می‌توان نشان داد $[M, G]$ زیرگروهی نرمال از M می‌باشد.

لازم به ذکر است در تعریف ۱.۵.۵، شرط ۴ ایجاب می‌کند $\ker \delta \leq Z(G, M)$. هم‌چنین به ازای هر عمل دلخواه G روی M می‌توان همریختی $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ را طوری در نظر گرفت که اثر $\alpha(g)$ بر m به ازای هر $g \in G$ و $m \in M$ با عمل g بر m یکی باشد. آنگاه شرط ۳ ایجاب می‌کند $\mathrm{Inn}(M) \leq \mathrm{Im}(\alpha)$، بنابراین $Z(G, M)$ هم‌چنان زیر گروه مرکزی M خواهد بود.

به عنوان آخرین مطلب در این بخش به معرفی جفت پوششی گروه‌ها که الیس در [۹] بیان کرده است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۵.٦ فرض کنید (G, N) یک جفت از گروه‌ها باشد و N^* گروه دلخواه دیگری باشد. توسیع مرکزی نسبی $\delta : N^* \longrightarrow G$ از جفت (G, N) یک جفت پوششی[۳۴] نامیده می‌شود اگر زیر گروه A از N^* وجود داشته باشد به طوری که:

۱) $A \leq Z(G, N^*) \cap [N^*, G]$،

۲) $A \cong M(G, N)$،

[۳۲] G-center
[۳۳] G-commutator
[۳۴] covering pair

۳) $N \cong N^*/A$.

جفت (G,G) را در نظر بگیرید. فرض کنید $\delta : M \longrightarrow G$ یک توسیع مرکزی نسبی برای (G,G) به همراه عمل

$$\begin{array}{ll} M \times G & \longrightarrow M \\ (m,g) & \longmapsto m^g = m^{\delta(m_1)} \end{array}$$

باشد. در این صورت اگر $\delta : M \longrightarrow G$ یک جفت پوششی برای (G,G) باشد، آنگاه M یک گروه پوششی برای G است. زیرا طبق تعریف، زیر گروه A از M موجود است به طوری که $A \leq Z(G,M) \cap [M,G]$ و $A \cong M(G,G)$ و $M/A \cong G$. اما $Z(G,M) = Z(M)$ و $[M,G] = M'$ و $M(G,G) \cong M(G)$.

همان طور که می‌دانیم هر گروه متناهی یک گروه پوششی دارد[۱۵]. الیس در[۹] این نتیجه را به یک جفت از گروه‌های متناهی تعمیم داد یعنی هر جفت متناهی (G,N) دارای حداقل یک جفت پوششی می‌باشد.