دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

یک دیدگاه برنامه‌ریزی آرمانی برای رگرسیون خطی با داده‌های بازه‌ای

استاد راهنما

دکتر حسن حسن‌پور

استاد مشاور

دکتر محسن عارفی

نگارنده

طاهره احمدی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

تحلیل رگرسیون یک روش آماری قوی برای تحلیل پدیده‌هایی است که در آن یک متغیر به نام متغیر خروجی یا وابسته، به یک یا چند متغیر به نام متغیر(های) ورودی یا مستقل، وابسته می‌باشد. در رگرسیون، سوال مهم این است که چگونه می‌توان مقدار متغیر خروجی را بر مبنای مشاهدات به دست آمده از آزمایشات، پیش بینی کرد. نتایج به دست آمده از برخی آزمایشات در جهان واقعی، داده‌های دقیقی نیستند و گاهی به صورت بازه می‌باشند. یعنی ممکن است در یک مسأله‌ی رگرسیون، متغیر خروجی یا متغیر ورودی و خروجی هر دو به صورت بازه باشند. رگرسیون بازه‌ای وسیله‌ی مناسبی برای تحلیل اینگونه پدیده‌هاست. در این پایان نامه یک دیدگاه جدید برای رگرسیون بازه‌ای ارائه شده است و آن استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی برای تخمین ضرایب مدل رگرسیون بازه‌ای می‌باشد.

واژگان کلیدی: رگرسیون بازه‌ای، عدم قطعیت، ورودی‌های بازه‌ای، خروجی‌های بازه‌ای، برنامه‌ریزی آرمانی.

تعداد صفحات پایان نامه: ۶۱

در صورت تمایل تقدیم نامه پایان نامه خود را در اینجا وارد کنید.

خدایا...[1]

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌ها هست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری. . . می کنم

سپاسگزاری جداگانه خود را در این مکان وارد نمایید.

طاهره احمدی

شهریور۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش گفتار

اساس نظریه‌ی رگرسیون معمولی بر این است که متغیرها و پارامترهای رگرسیون، کمیت‌های عددی دقیق هستند. اما در جهان واقع غالباً این گونه نیست. در بسیاری از موارد نمی‌توان مشاهدات یک آزمایش یا پیشامد را به طور دقیق بیان کرد. در این مواقع با داده‌های غیر دقیق به صورت فازی یا بازه‌ای سر و کار داریم. لذا باید رگرسیون را بر اساس داده‌های فازی یا بازه‌ای مدل بندی کنیم. تا به امروز روش‌های متعدد و متنوعی از سوی محققان تحت عنوان رگرسیون فازی و همچنین رگرسیون بازه‌ای [۳، ۴، ۵، ۶، ۱۱] بیان گردیده است. در این پایان نامه پس از بررسی مختصر چند روش رگرسیون بازه‌ای که تاکنون ارائه شده است، مدل رگرسیون بازه‌ای را در سه حالت زیر بیان کرده‌ایم:

حالت اول: زمانی که داده‌های ورودی مسأله، دقیق و داه‌های خروجی بازه‌ای باشند.
حالت دوم: زمانی که داده‌های ورودی و خروجی هر دو بازه‌ای ولی ضرایب مدل دقیق باشند.
حالت سوم: زمانی که داده‌های ورودی و خروجی و ضرایب مدل هر سه بازه‌ای باشند.

روش پیشنهادی این پایان نامه استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی برای تخمین ضرایب مدل در هر یک از این سه حالت است.

در فصل اول تعاریف مورد نیاز، از جمله تعاریف مربوط به مجموعه‌های فازی، بهینه سازی چند هدفی، برنامه‌ریزی آرمانی و همچنین اعمال حسابی روی بازه‌ها آمده است.

در فصل دوم پس از بیان تاریخچه‌ی رگرسیون بازه‌ای، به بررسی روش بیان شده توسط بیسریر و همکاران [۱] پرداخته‌ایم.

در فصل سوم استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی برای به دست آوردن ضرایب مدل رگرسیون بازه‌ای به همراه مثال‌های عددی شرح داده شده است.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل تعاریف مورد نیاز برای این پایان‌نامه را در سه بخش بیان می‌کنیم. در بخش اول پس از معرفی مجموعه‌ی فازی، برخی مفاهیم مربوط به مجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم. در بخش دوم به اعمال حسابی روی بازه‌ها می‌پردازیم و در بخش سوم برنامه‌ریزی آرمانی را معرفی خواهیم کرد.

۱.۱ مجموعه‌ی فازی

مجموعه‌ی فازی که اولین بار توسط پروفسور لطفی عسکرزاده معرفی شد [۱۲]، به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۱.۱ (مجموعه‌ی فازی)**.** فرض کنید X نشان‌دهنده‌ی یک مجموعه‌ی مرجع باشد. تابع نشانگر هر زیرمجموعه‌ی معمولی مانند A از X یک تابع از X به $\{0,1\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه‌ی دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه‌ی $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر $x \in X$ یک عدد از بازه‌ی $[0,1]$ به عنوان درجه‌ی عضویت نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم و با $\tilde{A}(x)$ نشان می‌دهیم. اکنون دیگر A یک مجموعه‌ی معمولی نیست، بلکه یک مجموعه‌ی فازی است که آن را با نماد $\tilde{A}$ نشان می‌دهیم.

یک زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X می‌تواند توسط یک مجموعه از زوج‌های مرتب از عناصر x و درجه‌ی عضویت $\tilde{A}\left(x\right)$ مشخص شود. به عبارتی

$$\tilde{A}=\left\{\left(x,\tilde{A}\left(x\right)\right)\mid x\in X\right\}.$$

در ادامه برخی از مفاهیم مرتبط با مجموعه‌های فازی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. [۱۰]

۱. **α-برش:** برای هر $\alpha\in(0,1]$ ، α-برش مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}_\alpha=\{x\in X\mid \tilde{A}(x)\geqslant\alpha\},$$

و برای $\alpha=0$:

$$\tilde{A}_0=cl\{x\in X\mid \tilde{A}\left(x\right)>0\},$$

که در آن $cl\{x\in X\mid \tilde{A}\left(x\right)>0\}$ نشان دهنده‌ی بستار مجموعه‌ی $\{x\in X\mid \tilde{A}\left(x\right)>0\}$ است.

۲. **تکیه‌گاه:** تکیه‌گاه زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X که با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی نقاطی از X است که $\tilde{A}\left(x\right)>0$. یعنی

$$supp(\tilde{A})=\{x\epsilon X\mid \tilde{A}(x)>0\}.$$

۳. **ارتفاع:** ارتفاع زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X که با $hgt(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، کوچکترین کران بالای $\tilde{A}(x)$ است. یعنی

$$hgt(\tilde{A})=sup_{x\in X}\tilde{A}\left(x\right).$$

۴. **نرمال بودن:** اگر ارتفاع زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X یک باشد، آن را یک مجموعه‌ی فازی نرمال می‌نامند. یعنی $x\in X$ وجود داشته باشد که $\tilde{A}(x)=1$. در غیر این صورت $\tilde{A}$ غیرنرمال نامیده می‌شود.

۵. **تساوی:** مجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ روی X مساوی هستند، اگر و تنها اگر تابع عضویت آن‌ها روی X مساوی باشند. یعنی

$$\tilde{A}=\tilde{B}\Longleftrightarrow\tilde{A}\left(x\right)=\tilde{B}\left(x\right).\qquad\forall x\in X$$

۶. **مجموعه‌ی فازی محدب:** زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و برای هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\tilde{A}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min[\tilde{A}(x_1), \tilde{A}(x_2)].$$

تعریف ۳.۱.۱ (عدد فازی). عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی نرمال محدب از $\mathbb{R}$ است که تابع عضویت آن قطعه‌ای پیوسته است.

۲.۱ اعمال حسابی روی بازه‌ها

از آن جا که کار این پایان‌نامه، رگرسیون بازه‌ای است، در فصول بعد به اعمال روی بازه‌ها نیاز داریم، که در این بخش به اختصار به آن پرداخته شده است.

بازه‌ی معمولی A از اعداد حقیقی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = [A^-, A^+] = \{x | A^- \leqslant x \leqslant A^+, x \in \mathbb{R}\}.$$

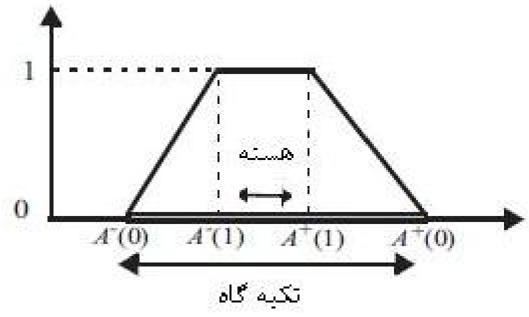
تعریف ۱.۲.۱. بازه‌ی $A = [A^-, A^+]$ را مثبت (نامنفی) گوییم هرگاه $A^- > 0$ ($A^- \geq 0$).

تعریف ۲.۲.۱ (بازه‌ی ذوزنقه‌ای). یک بازه‌ی ذوزنقه‌ای مانند A نوع خاصی از یک عدد فازی با تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ به صورت زیر است:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - A^-(0)}{A^-(1) - A^-(0)} & A^-(0) \leq x \leq A^-(1) \\[2ex] 1 & A^-(1) \leq x \leq A^+(1) \\[2ex] \dfrac{A^+(0) - x}{A^+(0) - A^+(1)} & A^+(1) \leq x \leq A^+(0) \\[2ex] 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $A_0 = [A^-(0), A^+(0)]$، α برش با $\alpha = 0$ است و تکیه‌گاه نامیده می‌شود. همچنین $A_1 = [A^-(1), A^+(1)]$، α برش با $\alpha = 1$ است و هسته نامیده می‌شود (شکل ۱.۱).

هر αبرش ($\alpha \in [0,1]$) این بازه، یک بازه‌ی معمولی به صورت $A_\alpha = [A^-(\alpha), A^+(\alpha)]$ است.



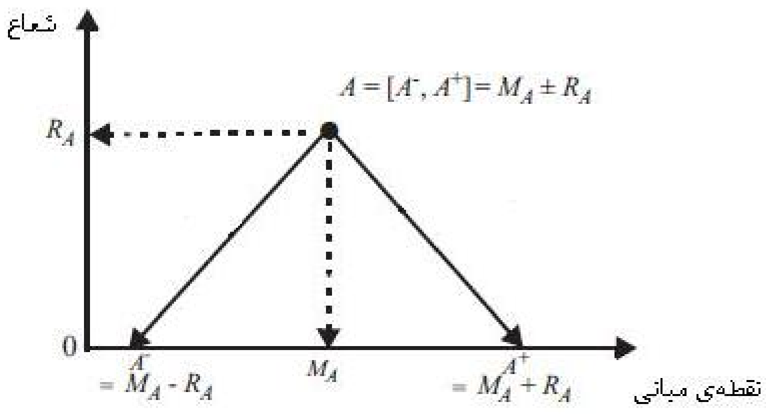
شکل ۱.۱: بازه‌ی ذوزنقه‌ای

نمایش نقطه‌ی میانی-شعاع: آن چه در بحث رگرسیون بازه‌ای نمود پیدا می‌کند، میزان عدم قطعیت (میزان نادقیق بودن) داده‌ها یا پارامترهای مدل است، که باعث می‌شود هر یک از آن‌ها به جای یک عدد حقیقی، به صورت یک بازه در مدل ظاهر شوند. نمایش بازه‌ها به صورت قبل، میزان عدم قطعیت داده‌ها را به طور دقیق مشخص نمی‌کند. به همین دلیل از نمایش دیگری برای بازه‌ها به نام نمایش نقطه‌ی میانی-شعاع استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $A = [A^-, A^+]$ یک بازه‌ی مفروض باشد. نمایش نقطه‌ی میانی-شعاع این بازه به صورت $A = (M_A, R_A)$ است که در آن $M_A = (A^- + A^+)/2$ نقطه‌ی میانی بازه و $R_A = (A^+ - A^-)/2$ شعاع بازه و نشان دهنده‌ی عدم قطعیت است. بنابراین هر بازه را می‌توان به عنوان یک نقطه در فضای (M, R) در نظر گرفت.

مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های مشمول در بازه‌ی A را دامنه‌ی $C(A)$ می‌نامیم که با حدود پایینی و بالایی بازه‌ی A تشکیل یک مثلث می‌دهد (شکل۲.۱). در نمایش (M, R) برای بازه، بیشترین عدم قطعیت متعلق به عنصری از $C(A)$ است که بیشترین شعاع را دارد (راس مثلث)؛ و هر چه به قاعده نزدیک‌تر می‌شویم، عدم قطعیت کمتر می‌شود، به طوری که عناصر روی قاعده دارای عدم قطعیت صفر می‌باشند.

فرض کنید $*$ یک عمل دوتایی روی اعداد حقیقی باشد. توسیع این عمل به دو مجموعه که



شکل ۲.۱: نمایش نقطه‌ی میانی-شعاع بازه‌ی A

با $\circledast$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \circledast B = \{a \ast b \mid a \in A, b \in B\}\,. \tag{۱.۱}$$

اگر $\ast$ عمل جمع وضرب اعداد حقیقی باشد و $A = [A^-, A^+]$ و $B = [B^-, B^+]$ دو بازه باشند، عملیات جمع و ضرب این دو بازه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A + B = [A^- + B^-, A^+ + B^+] \tag{۲.۱}$$

$$AB = [min(z), max(z)] \tag{۳.۱}$$

که در آن $z = \{A^-B^-, A^-B^+, A^+B^-, A^+B^+\}$.

نقطه‌ی میانی وشعاع این بازه‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M_{A+B} = M_A + M_B \tag{۴.۱}$$

$$R_{A+B} = R_A + R_B \tag{۵.۱}$$

$$M_{AB} = M_A M_B + \varphi_{AB}.sign(M_A M_B) \tag{۶.۱}$$

$$R_{AB} = R_A R_B + |M_A| R_B + R_A |M_B| - \varphi_{AB} \tag{۷.۱}$$

که در آن $\varphi_{AB} = min\{|M_A|R_B, R_A|M_B|, R_A R_B\}$.

اثبات روابط (۶.۱) و (۷.۱) : دو بازه‌ی $A=[a,b]$ و $B=[c,d]$ را در نظر بگیرید. $M_A=\dfrac{a+b}{2}$ نقطه‌ی میانی و $R_A=\dfrac{b-a}{2}$ شعاع بازه‌ی A است. همچنین $M_B=\dfrac{c+d}{2}$ نقطه‌ی میانی و $R_B=\dfrac{d-c}{2}$ شعاع بازه‌ی B است. فرض کنید بازه‌ی C حاصل ضرب دو بازه‌ی A و B، و M_C و R_C به ترتیب نقطه‌ی میانی و شعاع آن باشند. با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ بازه‌ی C وابسته به علامت بازه‌های A و B می‌باشد. بنابراین در حالت‌های مختلف، بازه‌ی C و همچنین نقطه‌ی میانی و شعاع آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

حالت اول: اگر $a,b,c,d>0$، در این صورت $C=[ac,bd]$ و نقطه‌ی میانی و شعاع آن به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}M_C=\frac{ac+bd}{2}&=\frac{(M_A-R_A)(M_B-R_B)+(M_A+R_A)(M_B+R_B)}{2}\\&=M_AM_B+R_AR_B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_C=\frac{bd-ac}{2}&=\frac{(M_A+R_A)(M_B+R_B)-(M_A-R_A)(M_B-R_B)}{2}\\&=M_AR_B+R_AM_B.\end{aligned}$$

چون در این حالت داریم:

$$M_A>R_A>0\ ,\ M_B>R_B>0.$$

در نتیجه روابط ۶.۱ و ۷.۱ برقرار هستند.

حالت دوم: اگر $a<0$ و $b,c,d>0$، در این صورت $C=[ad,bd]$ و نقطه‌ی میانی و شعاع آن به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}M_C=\frac{ad+bd}{2}&=\frac{(M_A-R_A)(M_B+R_B)+(M_A+R_A)(M_B+R_B)}{2}\\&=M_AM_B+M_AR_B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_C=\frac{bd-ad}{2}&=\frac{(M_A+R_A)(M_B+R_B)-(M_A-R_A)(M_B+R_B)}{2}\\&=R_AR_B+R_AM_B.\end{aligned}$$

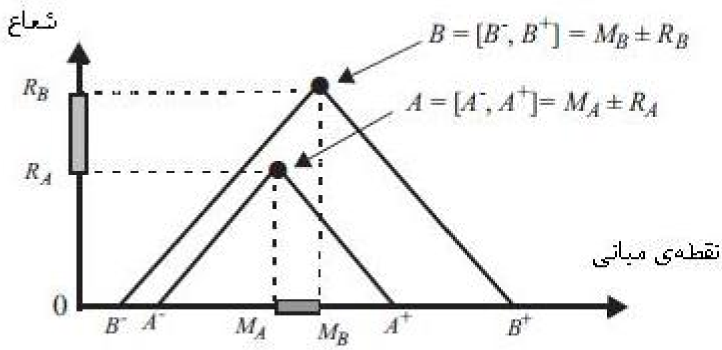
در این حالت داریم:

$$R_A>|M_A|\geq 0\ ,\ M_B>R_B>0.$$

چنانچه $M_A > 0$ داریم $\varphi_{AB} = M_A R_B$ و علامت $M_A M_B$ مثبت می‌شود. اگر $M_A < 0$ ، $\varphi_{AB} = -M_A R_B$ و علامت $M_A M_B$ منفی می‌شود که حاصل ضرب آن‌ها همان نتیجه‌ی دلخواه است. همچنین اگر $M_A = 0$ ، $\varphi_{AB} = 0$. یعنی در هر سه مورد روابط ۶.۱ و ۷.۱ برقرار هستند. در دو حالت دیگر یعنی زمانی که بازه‌ی A منفی وبازه‌ی B مثبت، همچنین زمانی که بازه‌ی A منفی و بازه‌ی B شامل صفر است، نتایج مشابهی به دست می‌آید و درستی روابط ۶.۱ و ۷.۱ ثابت می‌شود.

اگر λ یک عدد حقیقی باشد، حاصل ضرب آن در بازه‌ی A به صورت زیر است:

$$\lambda A = \lambda(M_A, R_A) = \begin{cases} (\lambda M_A, \lambda R_A) & \lambda \geq 0 \\ (\lambda M_A, |\lambda| R_A) & \lambda < 0 \end{cases} \tag{۸.۱}$$



شکل ۳.۱: شمول دو بازه

برای دو بازه‌ی A و B رابطه‌ی شمول به صورت زیر بدست می‌آید (شکل ۳.۱):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} B^- \leqslant A^- \\ A^+ \leqslant B^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_B - R_B \leqslant M_A - R_A \\ M_A + R_A \leqslant M_B + R_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_B - M_A \leqslant R_B - R_A \\ M_A - M_B \leqslant R_B - R_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |M_B - M_A| \leqslant R_B - R_A$$

۳.۱ بهینه‌سازی چندهدفی

بهینه‌سازی چندهدفی بخشی از رویکرد تصمیم‌گیری چندهدفی است که در آن تعدادی تابع به نام توابع هدف با توجه به مجموعه‌ای از محدودیت‌ها که ناحیه‌ی شدنی را مشخص می‌کنند، کمینه یا بیشینه می‌شوند.

به طور کلی ساختار یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &min \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_k(x)) \\ &s.t. \;\; x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \le b_j, \; j = 1, 2, ..., m\} \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

که در آن برای $i = 1, ..., k$، $f_i(x)$ها توابع هدف و برای $j = 1, ..., m$، $g_j(x)$ توابع قیدی و X ناحیه‌ی شدنی مسأله است. چنانچه تمام توابع هدف و توابع قیدی خطی باشند، یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفی داریم.

تعریف ۱.۳.۱ (جواب بهینه‌ی کامل). نقطه‌ی $\bar{x} \in X$ جواب بهینه‌ی کامل مسأله‌ی ۹.۱ گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و به ازای $i = 1, 2, ..., k$ داشته باشیم $f_i(x) \ge f_i(\bar{x})$.

در مسأله‌ی ۹.۱ هدف یافتن نقطه‌ای مانند $x \in X$ است که به طور همزمان تمام توابع هدف $f_k, ..., f_1$ را کمینه کند. در مسائل بهینه‌سازی چند هدفی با توجه به تعارض اهداف با یکدیگر، معمولا یافتن نقطه‌ای که تمام اهداف را به طور همزمان بهینه کند، عملی نیست. بنابراین به جای جواب بهینه‌ی کامل، یک مفهوم جواب جدید به نام جواب بهینه‌ی پارتو[1] یا جواب کارا بر اساس ایده‌ی اقتصاددان ایتالیایی، ویلفرد پارتو[2] معرفی می‌گردد.

تعریف ۲.۳.۱ (جواب کارا). یک نقطه $\bar{x} \in X$ را یک جواب کارا یا جواب بهینه‌ی پارتو می‌نامیم هرگاه $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که به ازای $i = 1, 2, ..., k$ داشته باشیم $f_i(x) \le f_i(\bar{x})$ و برای حداقل یک r ، $f_r(x) < f_r(\bar{x})$.

[1] Pareto optimal solution
[2] Wilfred Pareto

۴.۱ برنامه‌ریزی آرمانی

مفهوم برنامه‌ریزی آرمانی در سال ۱۹۶۱ توسط چارنز[۳] و کوپر[۴] بیان شد [۲]. برنامه‌ریزی آرمانی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفی به کار می‌رود که در آن تصمیم گیرنده می‌تواند آرمان‌ها و سطوح انتظاری را برای توابع هدف مشخص کند. ایده‌ی برنامه‌ریزی آرمانی مینیمم کردن انحرافات از آرمان‌های تصمیم گیرنده است.
مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفی زیر را در نظر بگیرید:

$$min_{x \in X} \; z(x) = (z_1(x), ..., z_k(x))^T$$

که در آن $z_1(x) = c_1x$ و ... و $z_k(x) = c_kx$، k تابع هدف مجزا از بردار تصمیم و $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ مجموعه‌ی شدنی است.
فرمول کلی برنامه‌ریزی آرمانی برای این مسأله به صورت زیر است:

$$min_{x \in X} \; d(z(x), \hat{z}) \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $\hat{z} = (\hat{z}_1, ..., \hat{z}_k)$ بردار آرمان مشخص شده توسط تصمیم گیرنده است و $d(.,.)$ فاصله‌ی بین $\hat{z}$ و $z(x)$ برای نرم انتخاب شده را نشان می‌دهد. در واقع، در مسأله‌ی ۱۰.۱ هدف یافتن نقطه‌ای مانند $x \in X$ است به طوری که بردار توابع هدف نظیر آن کمترین فاصله را با بردار آرمان $(z_1, ..., z_k)$ داشته باشد.

به وضوح با انتخاب توابع فاصله‌ی مختلف، مسائل متفاوتی خواهیم داشت. ساده‌ترین مدل ۱۰.۱ به صورت زیر است:

$$min_{x \in X} \; d_1(z(x), \hat{z}) \triangleq \sum_{i=1}^{k} |c_ix - \hat{z}_i| \tag{۱۱.۱}$$

که در آن از نرم- ۱ استفاده شده است.

اگر از نرم- ۱ وزن‌دار استفاده کنیم، مسأله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$min_{x \in X} \; d_1^w(z(x), \hat{z}) \triangleq \sum_{i=1}^{k} w_i|c_ix - \hat{z}_i| \tag{۱۲.۱}$$

[۳] Charnes
[۴] Cooper

که در آن w_iها، اعداد مثبتی به نام وزن می‌باشند. این مسأله توسط متغیرهای کمکی زیر به آسانی به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی معادل تبدیل می‌شود.

$$d_i^+ = \frac{1}{2}\{|z_i(x) - \hat{z}_i| + (z_i(x) - \hat{z}_i)\} = \begin{cases} z_i(x) - \hat{z}_i & z_i(x) \geq \hat{z}_i \\ 0 & z_i(x) < \hat{z}_i, \end{cases}$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}\{|z_i(x) - \hat{z}_i| - (z_i(x) - \hat{z}_i)\} = \begin{cases} \hat{z}_i - z_i(x) & \hat{z}_i \geq z_i(x) \\ 0 & \hat{z}_i < z_i(x). \end{cases}$$

d_i^+ و d_i^- به ترتیب انحراف به سمت بالا و انحراف به سمت پایین از iامین آرمان را نشان می‌دهند و متغیرهای انحرافی نامیده می‌شوند. با استفاده از این متغیرها مسأله‌ی ۱۲.۱ به مسأله‌ی برنامه‌ریزی ریاضی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{i=1}^{k} w_i(d_i^+ + d_i^-) && && (۱۳.۱)\\ s.t. \quad & z_i(x) - d_i^+ + d_i^- = \hat{z}_i && i = 1, 2, ..., k, \\ & Ax \leq b,\ x \geq 0 \\ & d_i^+ . d_i^- = 0 && i = 1, 2, ..., k, && (۱۴.۱)\\ & d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0 && i = 1, 2, ..., k. \end{aligned}$$

واضح است که انحراف از آرمان به سمت بالا و پایین هرگز نمی‌توانند به طور همزمان اتفاق بیفتند. یعنی زمانی که $d_i^+ > 0$، باید d_i^- صفر شود و برعکس. قیود ۱۴.۱ مسأله‌ی فوق نشان دهنده‌ی این موضوع می‌باشند. مسأله‌ی ۱۳.۱ به دلیل وجود این قیود، یک مسأله‌ی غیرخطی است، ولی می‌توان این قیود را از مسأله حذف و مسأله‌ی خطی به دست آمده را به روش سیمپلکس حل کرد. زیرا در حل مسأله‌ی حاصل به روش سیمپلکس، در هر تکرار هرگز دو متغیر d_i^+ و d_i^- به طور همزمان نمی‌توانند متغیرهای پایه‌ای باشند و بنابراین حداقل یکی از آن‌ها به طور خودکار صفر به‌دست می‌آید.

لازم به ذکر است که در بعضی موارد با توجه به موقعیت‌های تصمیم، تصمیم گیرنده فقط با انحراف از آرمان به سمت بالا یا انحراف از آرمان به سمت پایین سر و کار دارد. در چنین مواردی می‌توان به d_i^+ و d_i^- به ترتیب وزن‌های w_i^+ و w_i^- را تخصیص داد. برای مثال اگر همه‌ی توابع هدف $z_i(x)$ توابع هزینه با آرمان $\hat{z}_i$ باشند، انحراف از آرمان به سمت بالا مطلوب نیست. در این

حالت قرار می‌دهیم $w_i^+ = 1$ ، $w_i^- = 0$ و مدل قبلی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{array}{lll} min & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} w_i^+ d_i^+ & \\ s.t. & z_i(x) - d_i^+ + d_i^- = \hat{z}_i & i = 1, 2, ..., k, \\ & Ax \leq b, \ x \geq 0 & \\ & d_i^+ . d_i^- = 0 & i = 1, 2, ..., k, \\ & d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0 & i = 1, 2, ..., k. \end{array}$$

برعکس، برای توابع هدف از نوع سود، انحراف از آرمان به سمت پایین مطلوب نیست. در این حالت قرار می‌دهیم $w_i^+ = 0$ ، $w_i^- = 1$ و تابع هدف $\sum_{i=1}^{k} w_i^- d_i^-$ را جایگزین $\sum_{i=1}^{k} w_i^+ d_i^+$ می‌کنیم. این نوع برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی آرمانی یک طرفه نامیده می‌شود.