دانشکده ریاضی،آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

پایداری همریختی‌ها روی جبرهای باناخ و C^*- جبرهای یکدار

نگارنده

سمیه شعبانی

استاد راهنما

دکتر مجید اسحاقی گرجی

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

دی ماه ۱۳۸۹

قدردانی

خداوند منان و رحمان رابس سپاس می گویم که اراده کرد و به من توفیقی عنایت فرمود تا بتوانم با توکل به او و ثمره ی زحمات و تلاش های پدرم و مهربانی های مادرم و با تشویق و انگیزه هایی که اعضای خانواده‌ام ترتیب دادند در مرحله ای از زندگی گام نهم تااینکه در جوار راهنمایی های بی دریغ و دلسوزانه استاد راهنمایم ، جناب آقای دکتر مجید اسحاقی زیبا بیاموزم و قدمی در جهت پیشبرد موفقیت هایم بردارم.

بدون شک اگر ذره ای از رهنمود های استاد راهنمایم درجریان انجام این پایان نامه حذف می گردید ، موفق به انجام رساندن آن نمی شدم . به هر حال ، اگر این مجموعه را موفقیتی قلمداد کنم ، بی گمان مدیون زحمات و راهنمایی های ایشان می باشم . قلباً از ایشان تقدیر و تشکر می نمایم.

اما در طول این دو سال در محضر استادی چون جناب آقای دکتر رضامعمارباشی افتخار شاگردی داشتم ، از این بزرگوار نیز کمال سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به :

پدر و مادر دلسوز و مهربانم

چکیده

در این پایان نامه، با استفاده از مقاله‌ی [۸]، پایداری[۱] هایرز[۲]–اولام[۳] $*$–یکریختی‌های (همریختی‌های) d–ایزومتریک بین C^*–جبرهای d–نرمدار خطی و یکریختی‌های (همریختی‌های) C^*–جبر ایزومتریک بین C^*–جبرها را بررسی می‌کنیم.

همچنین با بکار بردن مقاله‌ی [۷]، پایداری هایرز–اولام–راسیاس $*$–همریختی‌ها و مشتق‌های تعمیم‌یافته روی C^*–جبرها برای معادله‌ی تابعی کوشی–ینسن

$$۲f(\frac{x+y}{۲}+z)=f(x)+f(y)+۲f(z)$$

به روش نقطه ثابت را ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم، پایداری هایرز–اولام همریختی‌های ژوردان و مشتق‌های ژوردان بین C^*–جبرهای d–نرمدار خطی را ثابت کردیم و همچنین در فصل آخر، تعمیم پایداری هایرز–اولام $*$–یکریختی‌های d–ایزومتریک را برای معادله‌ی تابعی آپلنیوس[۴]

$$\sum_{i=۱}^{n} f(z-x_i)=-\frac{۱}{n}\sum_{۱\leq i<j\leq n} f(x_i+x_j)+nf(z-\frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} x_i)$$

به روش نقطه ثابت، بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی : معادله تابعی کوشی – ینسن ، معادله‌ی تابعی آپلنیوس، مشتق‌های تعمیم‌یافته، روش نقطه ثابت.

---

[۱] Stability
[۲] Hyers
[۳] S.M.Ulam
[۴] Apollonius

مقدمه

اولین بار مسئله پایداری معادلات تابعی در سال ۱۹۴۰ توسط اولام به‌صورت زیر مطرح شد [۳۵].
فرض کنیم $(G_1,*)$ یک گروه ، $(G_2,\diamond,d)$ یک گروه متریک بامتر $d(.,.)$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد . آیا $\delta(\epsilon) > 0$ موجود است به‌طوری که اگر نگاشت $h : G_1 \to G_2$ در رابطه

$$d(h(x*y), h(x)\diamond h(y)) < \delta \qquad , \qquad (x,y\in G_1)$$

صدق کند، آن‌گاه همریختی $H : G_1 \to G_2$ موجود باشد به قسمی که

$$d(h(x), H(x)) < \epsilon \qquad , \qquad (x\in G_1)?$$

در سال ۱۹۴۱ هایرز مساله نگاشت های تقریباً جمعی $f : E_1 \longrightarrow E_2$ را درنظر گرفت ، به طوری که اگر E_1,E_2 فضاهای باناخ و f به‌ازای هر $x,y\in E_1$ درنامساوی هایرز

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \le \epsilon$$

صدق کند ، آنگاه نشان داد [۱۴]، که حد

$$L(x)=\lim\frac{f(2^n x)}{2^n}$$

به ازای هر $x\in E_1$ وجود دارد و $L : E_1 \longrightarrow E_2$ یک نگاشت جمعی منحصر بفرد است به طوری که

$$\|f(x)-L(x)\| \le \epsilon.$$

در سال ۱۹۷۸ راسیاس[۵] حالت کلی قضیه هایرز را اثبات کرد [۳۹].

قضیه گاوروتا[۶] [۳۲]، تعمیمی از نتیجه‌ی راسیاس می‌باشد که بصورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید G یک گروه آبلی و X یک فضای باناخ باشد. تابع $\varphi : G \times G \longrightarrow [\circ, \infty)$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که برای هر $x, y \in G$،

$$\widetilde{\varphi}(x,y) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{۱}{۲^k}\varphi(۲^k x, ۲^k y) < \infty.$$

فرض کنید $f : G \longrightarrow X$ نگاشتی باشد که برای هر $x, y \in G$، در

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varphi(x,y)$$

صدق کند. در اینصورت یک نگاشت جمعی منحصربفرد $T : G \longrightarrow X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in G$،

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{۱}{۲}\widetilde{\varphi}(x,y).$$

این پایان نامه شامل پنج فصل می‌باشد:

در فصل اول، مفاهیم و تعاریفی که درفصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

در فصل دوم، ابتدا به بررسی تعمیم پایداری هایرز–اولام–راسیاس نگاشت خطی در مدول‌های باناخ روی یک جبر باناخ یکدار، می‌پردازیم[۱۲]، که به ما در اثبات قضایایی که در بخش‌های دیگر آمده، کمک می‌کند؛ و سپس، پایداری هایرز–اولام d–ایزومتری‌های خطی در مدول‌های باناخ d–نرمدار خطی روی یک C^*–جبر یکدار و ایزومتری‌های خطی در مدول‌های باناخ روی یک C^*–جبر یکدار، را ثابت می‌کنیم. علاوه بر این، پایداری هایرز–اولام همریختی‌های d–ایزومتریک و همریختی‌های ایزومتریک فوق را بررسی می‌کنیم[۸].

در فصل سوم، به بررسی پایداری هایرز–اولام همریختی‌های ژوردان و مشتق‌های ژوردان d–ایزومتریک بین C^*–جبرهای d–نرمدار خطی می‌پردازیم.

در فصل چهارم، با استفاده از روش نقطه ثابت، پایداری هایرز–اولام–راسیاس همریختی‌های

[۵] Th.M.Rassias
[۶] *Găvruta*

C^*−جبر و مشتق‌های تعمیم‌یافته روی C^*−جبرها برای معادله‌ی تابعی کوشی−ینسن

$$2f(\frac{x+y}{2}+z)=f(x)+f(y)+2f(z)$$

که توسط بک[7] در سال (۲۰۰۶) معرفی و بررسی شده بود، ارائه می‌شود [۷].

در فصل پنجم، با استفاده از روش نقطه ثابت، تعمیم پایداری هایرز−اولام یکریختی‌های C^*−جبر d−ایزومتریک را برای معادله‌ی تابعی آپلنیوس

$$\sum_{i=1}^{n} f(z-x_i)=-\frac{1}{n}\sum_{1\leq i<j\leq n} f(x_i+x_j)+nf(z-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

بررسی می‌کنیم.

[7] Baak

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل خلاصه‌ای از تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز فصل‌های بعدی را بیان می‌کنیم.

۱.۱ جبرهای باناخ و C^*−جبرها

تعریف ۱.۱.۱ یک نرم روی فضای برداری V ، نگاشتی مانند $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ است به قسمی که :

۱) $\|v\| \geq \circ$ و $\|v\| = \circ$ اگر و تنها اگر $v = \circ$،

۲) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ برای هر $u, v \in V$ و

۳) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$, $v \in V$.

تعریف ۲.۱.۱ زوج $(V, \|.\|)$ کامل است ، اگر فضای متریک (V, d) بامتر $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فضای برداری نرمدار کامل را فضای باناخ[1] می نامیم .

تذکر ۴.۱.۱ در این بخش منظور از $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می باشد ، مگر آنکه یکی از آنها تا کید گردد.

تعریف ۵.۱.۱ فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم ، هر گاه نگاشت $\pi : (x, y) \to xy$ از $A \times A$ به توی A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in A$ وهر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $x(yz) = (xy)z$،

۲) $x(y+z) = xy + xz$, $(x+y)z = xz + yz$ و

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

تعریف ۶.۱.۱ جبر A را تعویض پذیر گوییم ، هرگاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $xy = yx$.

تعریف ۷.۱.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر نرمدار گوییم ، هر گاه A بعنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ باشد و این نرم در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A).$$

[1] Banach

تعریف ۸.۱.۱ جبر نرمدار A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ گوییم ، هر گاه A فضای باناخ با شد.

تعریف ۹.۱.۱ اگر جبر A شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم ، $xe = ex = x$ ، آنگاه A را جبر یکدار و e را عضو یکه A می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم A, B دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند . در این صورت یک همریختی جبری از A به توی B ، نگاشت خطی و پیوسته ی ϕ است به طوری که :

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \qquad (x, y \in A). \tag{۱.۱.۱}$$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم A,B دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند . در این صورت یک همریختی ژوردان از A به توی B ، نگاشت خطی و پیوسته ی ϕ است به طوری که :

$$\phi(a^{۲}) = (\phi(a))^{۲}, \qquad (a \in A).$$

تذکر ۱۲.۱.۱ همریختی، همریختی ژوردان را نتیجه می‌دهد؛ زیرا اگر در (۱.۱.۱)، $x = y = a$ قرار دهیم همریختی ژوردان حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱۳ (زلاسکو) همریختی ژوردان از هر جبر باناخ به $\mathbb{C}$ یک همریختی می‌باشد.

برهان: ر.ک.[۵].

تذکر ۱.۱.۱۴ اگر $B = \mathbb{F} = \mathbb{C}$ و $\phi \neq 0$ ، آنگاه ϕ را همریختی مختلط روی A می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۵ یک برگشت روی A عبارت است از نگاشت $* : A \to A$، به طوری که به ازای هر $a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ خواص زیر را داشته باشد:

۱) $(a+b)^* = a^* + b^*$ ،

۲) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ ،

۳) $(ab)^* = b^* a^*$ ،

۴) $a^{**} = a$.

تعریف ۱.۱.۱۶ جبر A به انضمام برگشت $*$ را یک $*-$ جبر می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷ یک $*-$ جبر نرمدار ، یک جبر نرمدار با عمل برگشت $x \to x^*$ است ، به‌گونه ای که برای هر $x \in A$ ،

$$\|x\| = \|x^*\|.$$

تعریف ۱۸.۱.۱ A را یک $*-$ جبر باناخ یا B^*- جبر گوییم، هرگاه A به عنوان یک $*-$ جبر، کامل باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ B^*- جبر A را C^*- جبر گوییم ، هر گاه به ازای هر $a \in A$ ،

$$\|a\| = \|a^*\|, \|aa^*\| = \|a\|^{2}.$$

قرارداد ۲۰.۱.۱ در فصل‌های ۲ و ۳، $\mathcal{U}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A} \mid uu^* = u^*u = e\}$ می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و M یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت M را یک $A-$ مدول چپ می نامیم ، هرگاه نگاشت $A \times M \to M$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $a \in A$ ، نگاشت $(a,m) \to am$ روی M خطی باشد ،

۲) برای هر $m \in M$ ، نگاشت $(a,m) \to am$ روی A خطی باشد و

۳) برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$ ، $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$.

به طور مشابه می توان $A-$ مدول راست را تعریف نمود. M را $A-$ دو مدول می نامیم ، هرگاه $A-$ مدول راست و $A-$ مدول چپ باشد و در رابطه زیر نیز صدق کند:

$$a_1(ma_2) = (a_1m)a_2.$$

تذکر ۲۲.۱.۱ به جای $A-$ دو مدول ، از $A-$ مدول استفاده می کنیم.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم $A-$ یک جبر باناخ و X فضای باناخ باشد. در این صورت X را $A-$ مدول چپ باناخ گوییم ، هرگاه X یک $A-$ مدول چپ باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|ax\| \leq \|a\|\|x\|. \tag{۱.۱.۲}$$

به همین ترتیب X را $A-$ مدول راست باناخ گوییم ، هرگاه X یک $A-$ مدول راست باشد و به ازای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|xa\| \leq \|x\|\|a\|. \tag{۱.۱.۳}$$

X رایک باناخ $A-$ مدول گوییم ، هرگاه X یک $A-$ مدول باشد و در روابط (۱.۱.۲) و (۱.۱.۳) نیز صدق کند.

۲.۱ نگاشت‌های خطی $d-$ایزومتریک و فضاهای باناخ $d-$نرمدار خطی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک ایزومتری گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$، وقتی که $d_X(.,.)$ و $d_Y(.,.)$ به ترتیب متریک‌هایی برای فضاهای X و Y باشند، نگاشت f در

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

صدق کند.

عدد ثابت $r>0$ را در نظر بگیرید؛ فرض کنید f حافظ فاصله‌ی r باشد، یعنی برای هر $x,y\in X$، که $d_X(x,y)=r$ داشته باشیم $d_Y(f(x),f(y))=r$. در اینصورت r را نگهدارنده‌ی [۲] (حافظ)فاصله برای نگاشت f نامیم.

در سال ۱۹۷۰ الکساندروف[۳] مسئله‌ی زیر را مطرح کرد:[۱]

(مسئله‌ی الکساندروف):آیا وجود مقدار ثابت r که T حافظ فاصله‌ی r باشد، ایزومتری بودن T را نتیجه می‌دهد؟

مسائل ایزومتریک در چندین مقاله از جمله [۲۲]، [۱۷]، [۱٦] و [۲۵]، بررسی شده است.

راسیاس[۴] و شمر[۵] [۳۸]، مسئله را برای نگاشت‌هایی که در شرط خاصیت نگهدارنده‌ی فاصله‌ی قوی برای یک(یعنی برای هر $x,y\in X$، $\|x-y\|=1$ اگر و فقط اگر $\|f(x)-f(y)\|=1$)، $(SDOPP)$[٦] صدق می‌کنند، ثابت کردند.

قضیه ۲.۲.۱ ([۳۸]) فرض کنید X و Y دو فضای خطی نرمدار حقیقی باشند به‌طوری‌که یکی از آنها با بعد[۷] بزرگتر از یک باشد و $f:X\longrightarrow Y$ نگاشت لیپ‌شیتز با ثابت لیپ‌شیتز $k\leq 1$ باشد. هرگاه f نگاشتی پوشا باشد که در شرط $(SDOPP)$ صدق کند، آنگاه f یک ایزومتری است.

تعریف ۳.۲.۱ [۴۱] فرض کنید X یک فضای خطی حقیقی با $dimX\geq d$ و $\|.,\dots,.\|:X^d\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد. در اینصورت $(X,\|.,\dots,.\|)$ را یک فضای d−نرمدار خطی گوییم هرگاه برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ و هر $x,y,x_1,\dots,x_d\in X$، داشته باشیم،

(۱) $\|x_1,\dots,x_d\|=0$ اگر و فقط اگر $x_1,\dots,x_d$ وابسته‌ی خطی باشند،

(۲) برای هر جایگشت $(j_1,\dots,j_d)$ از $(1,\dots,d)$، داریم $\|x_{j_1},\dots,x_{j_d}\|=\|x_1,\dots,x_d\|$،

(۳) $\|\alpha x_1,\dots,x_d\|=|\alpha|\,\|x_1,\dots,x_d\|$،

(۴) $\|x+y,x_2,\dots,x_d\|\leq\|x,x_2,\dots,x_d\|+\|y,x_2,\dots,x_d\|$

[۲] Conservative
[۳] Aleksandrov
[۴] Th.M.Rassias
[۵] P.Šemrl
[٦] Strong distance one preserving property
[۷] Dimension

تابع $\|.,\dots,.\|$ را d–نرم روی X نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای d–نرمدار خطی باشند. نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ را یک d–ایزومتری نامیم هرگاه برای هر $x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d\in X$، داشته باشیم

$$\|x_1-y_1,\dots,x_d-y_d\|=\|f(x_1)-f(y_1),\dots,f(x_d)-f(y_d)\|.$$

تعریف ۵.۲.۱ فضای X، با d–نرم $\|.,\dots,.\|_X$ و نرم $\|.\|$ یک فضای باناخ d–نرمدار خطی نامیم هرگاه $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*–جبر باشند. یک همریختی (همریختی ژوردان) جبری، $H:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ را یک $*$–همریختی (همریختی ژوردان) گوییم هرگاه برای هر $x\in\mathcal{A}$،

$$H(x^*)=H(x)^*$$

برقرار باشد([۱۲]، [۱۱]، [۱۰] و [۹]).

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*–جبرهای یکدار d–نرمدار خطی باشند. یک $*$–همریختی (همریختی ژوردان)، $H:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ را یک $*$–همریختی (همریختی ژوردان) d–ایزومتریک گوییم، هرگاه برای هر $x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d\in\mathcal{A}$، نگاشت $H:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ در

$$\|H(x_1)-H(y_1),\dots,H(x_d)-H(y_d)\|_{\mathcal{B}}=\|x_1-y_1,\dots,x_d-y_d\|_{\mathcal{A}}$$

صدق کند. اگر $*$–همریختی $H:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ دو سویی باشد، آنگاه $H:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ را یک $*$–یکریختی d–ایزومتریک گوییم.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*–جبرهای یکدار باشند. $*$–همریختی $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یک $*$–همریختی ایزومتریک گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$، نگاشت $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ در

$$\|H(x) - H(y)\| = \|x - y\|$$

صدق کند. اگر $*$–همریختی $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ دو سویی باشد، آنگاه $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یک $*$–یکریختی ایزومتریک نامیم.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک باناخ A– مدول باشد . نگاشت خطی $D : A \to X$ را یک مشتق گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک باناخ A– مدول باشد . نگاشت خطی $D : A \to X$ را یک مشتق ژوردان نامیم، هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$D(a^{۲}) = D(a).a + a.D(a) \tag{۱.۲.۴}$$

به وضوح مشتق‌ها، مشتق ژوردان هستند. با استفاده از تساوی $ab + ba = (a + b)^{۲} - a^{۲} - b^{۲}$ نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی (۱.۲.۴) با رابطه‌ی زیر برای هر $a, b \in A$ معادل هست.

$$D(ab + ba) = D(a).b + a.D(b) + D(b).a + b.D(a). \tag{۱.۲.۵}$$

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر باشد. یک مشتق ژوردان جبری $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را یک $*$–مشتق ژوردان نامیم هرگاه برای هر $x \in \mathcal{A}$،

$$D(x^*) = D(x)^*$$

برقرار باشد([?]، [۲۹]، [۳۴] و [۱۲]).

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر یکدار d–نرمدار خطی باشد. $*$–مشتق ژوردان $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را یک $*$–مشتق ژوردان d–ایزومتریک نامیم هرگاه برای هر $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in \mathcal{A}$، نگاشت $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ در

$$\|D(x_1) - D(y_1), \dots, D(x_d) - D(y_d)\| = \|x_1 - y_1, \dots, x_d - y_d\|$$

صدق کند.

۳.۱ پایداری معادلات تابعی

معادله‌ی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ یک معادله تابعی معروف و شناخته شده است که آن را معادله کوشی[۸] می‌نامیم، به طوری که هر جواب از این معادله، یک تابع جمعی نامیده می‌شود. برای توابع حقیقی مقدار، هر جواب اندازه پذیر لبگ از معادله فوق به صورت $f(x) = cx$ می‌باشد که در آن c عددی ثابت است. البته جواب‌های اندازه ناپذیر نیز وجود دارند که آنها را توابع وحشی می نامیم، این توابع ناپیوسته و بیکران هستند.

پایداری معادله‌های تابعی اولین بار برای معادله تابعی کوشی مطرح شده است و بعد از آن روی معادلات تابعی دیگر مطرح شد و هم اکنون تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه روی فضاهای مختلف انجام می گیرد.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $\epsilon > 0$ و تابع $f : X \to Y$ داده شده باشند. تابع f را ϵ–جمعی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ در نامعادله‌ی زیر صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

[۸] Cauchy