دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

ساده ترین فرم نرمال دستگاه های منفرد صفر–هاپف

کارشناسی ارشد (گرایش دستگاه‌های دینامیکی)

فهیمه مختاری

استاد راهنما

دکتر مجید گازر

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

کارشناسی ارشد (گرایش دستگاه‌های دینامیکی)خانم فهیمه مختاری

تحت عنوان

ساده ترین فرم نرمال دستگاه های منفرد صفر—هاپف

در تاریخ   توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر مجید گازر

۲— استاد مشاور پایان‌نامه   دکتر محمد رضارئوفی

۳— استاد داور ۱

()

۴— استاد داور ۲

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

نظریه فرم نرمال یکی از اساسی‌ترین و مؤثر ترین روش‌ها برای تجزیه و تحلیل رفتار دینامیکی دستگاه‌های دینامیکی می باشد. فرم نرمال مرتبه اول (فرم نرمال کلاسیک) ساده ترین فرم نرمال برای دستگاه‌های دینامیکی نمی باشد، لذا با توجه به اهمیتی که فرم نرمال در تحلیل دینامیکی دستگاه‌ها دارد، یافتن ساده‌ترین فرم نرمال یکی از مسائل روز تحقیقاتی می باشد. در این پایان‌نامه فرم نرمال مرتبه اول و مراتب N-ام دستگاه های دینامیکی را بررسی می کنیم. یکی از مهم‌ترین دستگاه‌های دینامیکی صفر—هاپف می باشد، در این رساله ساده‌ترین فرم نرمال این گونه از دستگاه‌ها را تحلیل می‌کنیم و تمام نتایج که در ارتباط با ساده‌ترین فرم نرمال این دستگاه‌ها، به‌دست آورده‌ایم مورد مطالعه قرار می دهیم و هم چنین انشعابات یک شکافت سه پارامتری از دستگاه صفر—هاپف را نیز بررسی می کنیم.

رده بندی موضوعی: ۳۴C۲۰، ۳۴A۳۴

کلمات کلیدی: ساده‌ترین فرم نرمال، نمایش $sl(2)$، میدان برداری صفر—هاپف

چـ

فصل ۱

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی و زیستی و ... با یک دستگاه دینامیکی غیر خطی مدل می شوند. دستگاه های دینامیکی غیرخطی دارای دینامیک و ساختار جبری پیچیده می باشند، که تحلیل آنها دشوار است . حال یک سؤال اساسی که در ذهن تداعی می شود این است که آیاابزارهایی موجود هستند که بتوانند یک دستگاه و ساختار جبری پیچیده آنها را ساده‌تر کنند ؟ نظریه‌ی فرم نرمال و منیفلد مرکزی دو ابزاربسیارمفید می باشند. با استفاده از نظریه منیفلد مرکزی می توان بعد مسئله را به بعد منیفلد مرکزی کاهش داد، اما باز هم دشواری های تحلیل به قوّت خود باقی می ماند، و امانظریه فرم نرمال، ایده‌ی تئوری این نظریه براساس این مفهوم استواراست که با استفاده از یک تغییر متغییر غیر خطی مختصات میدان برداری را به ساده ترین شکل تبدیل کنیم، میدان برداری بدست آمده بسیاری از خواص میدان برداری اصلی رادارا می باشد، لذا با تجزیه وتحلیل این میدان برداری اطلاعات بسیارمفیدی از میدان برداری اصلی می توان بدست آورد. در این نظریه تغییر مختصات در یک همسایگی نقطه تعادل درنظرگرفته می شود. ساختار اصلی فرم نرمال مرتبه‌اول با استفاده از قسمت خطی میدان برداری می باشد. اما با توجه به اینکه این فرم یکتا و ساده‌ترین نیست برای بدست آوردن ساده ترین فرم نرمال میدان های برداری ترمهای غیرخطی میدان برداری نیزمورد استفاده قرارمی گیرند. بدست آوردن ساده ترین فرم نرمال یکی از مسائل روز تحقیقاتی می باشد.

فرم نرمال یک دستگاه غیر خطی ساده ترین عضو ازکلاس میدان های برداری معادل است که همان رفتار معادل میدان برداری غیر خطی را نمایش می دهد.

برای مثال خانواده دستگاه‌های خطی را در نظر بگیرید که به صورت $\dot{x} = Ax$ نمایش داده می شوند، فرض کنید که A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی باشد ، با مقادیر ویژه مجزا $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ زمانی که A یک ماتریس قطری باشد ، آنگاه رفتار کیفی این دستگاه ها توسط دستگاه $\dot{x} = \Lambda x$ مشخص می شود ، که در آن Λ ماتریس قطری با درایه های $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ می باشد. در این حالت Λx را فرم نرمال دستگاه $\dot{x} = Ax$ می باشد. یا در حالت کلی تر فرم نرمال یک دستگاه خطی را می توان Λx در نظر گرفت که در آن Λ فرم جردن A می باشد .
حال به بیان کلی از فرم نرمال یک دستگاه‌غیر خطی می پردازیم . فرض کنید

$$\dot{x} = F(x) \tag{۱−۱}$$

که درآن F یک تابع C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ باشد. قسمت خطی دستگاه (۱−۱) را می توان درفرم کانونی جردن ẋ=Jx درنظرگرفت. قضیه‌ی هارتمن−گرابمن بیان می کند، که در همسایگی یک نقطه ی بحرانی هذلولوی، رفتارکیفی دستگاه (۱−۱) به‌طورموضعی معادل باخطی شده‌ی دستگاه (۱−۱) می باشد. درحالی که‌اگر صفر یک نقطه‌ی غیرهذلولوی دستگاه (۱−۱) باشد، تعیین رفتار کیفی دستگاه (۱−۱) در همسایگی یک نقطه غیرهذلولوی پیچیده خواهد بود. از سوی دیگر قضیه منیفلد−مرکزی نشان می دهد که در یک همسایگی نقطه بحرانی غیر هذلولوی ، تعیین رفتار کیفی دستگاه (۱−۱) رامی توان به مسأله تعیین رفتارکیفی دستگاه غیرخطی

$$\dot{x} = Jx + F(x)$$

روی منیفلد مرکزی تبدیل کرد. از آنجا که بعد منیفلد مرکزی کمترازبعد مسأله است، پس تعیین رفتارکیفی ساده‌ترمی شود. با وجود این دشواری تجزیه و تحلیل این دستگاه هنوز به قوت خود باقی می ماند. دراین پایان نامه J ماتریسی با یک مقدار ویژه‌ی صفر و یک جفت مقدار ویژه موهومی با قسمت حقیقی صفر می باشد نظریه فرم نرمال به مااین امکان را می دهد که قسمت غیرخطی دستگاه $\dot{x} = Jx + F(x)$ راتا حد امکان ساده کنیم، این کار با استفاده از یک تبدیل مختصات تحلیلی به فرم $x = y + h(y)$ صورت می‌گیرد که درآن $h(y) = o|y^2|$ همان طور که بیان شد دستگاهی که در نظرمی گیریم یک دستگاه دینامیکی صفر−هاپف می باشد، قسمت خطی آن دارای مقادیر ویژه صفر و $\pm i\alpha$ می باشد که $\alpha \neq 0$ می باشد، اما با استفاده از یک تغییر متغییر می توانیم مقادیر ویژه را به صورت صفر و $\pm i$ در نظر گرفت .
مسأله پیدا کردن فرم نرمال بیش ازصد سال قدمت دارد، فرم نرمال کلاسیک، ساده‌ترین فرم نرمال نیست.

یوشیکی [۱] بااستفاده‌از عملگرکروشه لی و با استفاده از تبدیلات غیرخطی توانست فرم نرمال ساده تری را بدست آورد. اما ساده‌ترین فرم نرمال برای میدان های برداری هامیلتونی و پوچ توان بااستفاده‌از مفهوم مدرّج [۲] توسط بیدر [۳] و سندرز [۴] موردمطالعه قرار گرفت. کوکابا [۵] و ونگ [۶] روش دیگری ازطریق مفهوم مدرّج ابداع کردند، که در آن فرم نرمال ازمرتبه n با n کروشه لی مجهز شده است. آنها ثابت کردند ساده‌ترین فرم نرمال، فرم نرمال ازمرتبه نامتناهی‌است. ازاین طریق شرایطی لازم که تحت آنها فرم های نرمال مرتبه متناهی ساده ترین فرم نرمال باشند رابدست آوردند. اما در حالتی که میدان برداری صفر—هاپف باشد، ساده ترین فرم نرمال دستگاه های منفرد صفر—هاپف در یک حالت خاص درسال ۲۰۰۱، توسط یو و یوان باکمک نرم افزار میپل[۷] و بااستفاده‌از روش کارآمد محاسباتی [۸] موردمطالعه قرارگرفت. درسال ۱۹۹۸، الگابا و گامرو فرم نرمال یک میدان برداری صفر—هاپف با یک شرط عام روی قسمت مرتبه دوم و همچنین یک شرط عام روی قسمت مرتبه سوم بااستفاده از یک مزدوج C^∞ بدست‌آوردند. فرم نرمال متقارن این گونه ازدستگاه‌هارا نیز مورد بررسی قرار داده‌اند. درسال ۲۰۰۵، چن و ونگ و یانگ فرم نرمال مداری و مزدوجی این میدان برداری را در یک حالت خاص با یک شرط عام روی قسمت مرتبه دوم رامورد بررسی قرار دادند. اما در ادامه فرم نرمال پوآنکاره—دولاک یا فرم نرمال رزنانسی را مطرح می کنیم این فرم نرمالی که تعریف می شود یکتا نیست و یا به عبارتی این فرم نرمال ساده ترین فرم نرمال نیست . در مورد یکتایی و ساده ترین فرم نرمال در فصل سوم بحث خواهیم کرد.

این پایان نامه به صورت زیر سامان یافته است :

در فصل دوم تعاریف و مفاهیم و قضایای مهم که در این پایان نامه کاربرد دارند را مطرح و در ادامه به تعریف مسئله فرم نرمال مرتبه اول (فرم نرمال کلاسیک) می پردازیم . هم چنین مفاهیم لازم از جبر لی و نمایش[۹] $\mathrm{sl}(2)$ که یکی از ابزار های بسیار مهم مورد استفاده در نتایج تحقیقاتی به دست آمده ، می باشد را مطرح می کنیم . مفاهیمی از نظریه انشعابات نیز در این فصل مطرح شده است که مورد استفاده در فصل پنجم این پایان نامه می باشد.

در فصل سوم به بررسی فرم نرمال مرتبه اول و فرم نرمال مراتب بالاتر و مسئله یکتابودن فرم های نرمال با توجه به مفهوم مدرّج رادر حالت کلی بیان می کنیم ، و سپس با استفاده از آن فرم نرمال مرتبه نامتناهی

---

[۱] Ushiki
[۲] New Grading
[۳] Baider
[۴] Sanders
[۵] Wang
[۶] Kokabu
[۷] Maple
[۸] Efficiently Computer Method
[۹] Representation

دستگاه های منفرد صفر–هاپف را مورد تحلیل قرار می دهیم .

در فصل پنجم ، فرم نرمال یک شکافت سه پارامتری یک نمونه خاص از یک دستگاه منفرد صفر–هاپف را مطالعه می کنیم. این فرم نرمال در سال ۲۰۰۶، توسط الگابا[۱۰] بدست آمده‌است بااستفاده از این فرم نرمال به مطالعه‌ی مختصر روی یک مدارالکتریکی که یک شکافت سه پارامتری، یک نمونه خاص ازیک دستگاه منفرد صفر–هاپف می باشد، می‌پردازیم.

در فصل ششم تمام نتایج جدید تحقیقاتی که در زمینه فرم نرمال دستگاه های دینامیکی صفر–هاپف بدست آورده‌ایم را مورد بررسی قرار می دهیم در ابتدا فرم نرمال مرتبه اول دستگاه های صفر–هاپف را باتوجه به آنچه الگابا در سال ۱۹۹۹مورد بررسی قرار داد راتحلیل می کنیم در خلال این تحلیل نتایجی را که بدست آورده ایم قرار داده شده است . با استفاده از فرم نرمال مرتبه اول بدست آمده زیر جبر رامعرفی می کنیم که لی ایزومورفیسم بامیدان های برداری بوگدانوف – تاکنز [۱۱] می باشد، و هم چنین به دو زیر جبر هامیلتونین و اویلرین تجزیه می کنیم و سپس فرم نرمال زیر جبر با انتگرال اول و هم چنین میدان برداری صفر–هاپف را برای سه حالت متفاوت $\nu < \mu$ و $\nu > \mu$ و $\mu = \nu$ را به طور دقیق مورد تحلیل قرار می دهیم .

در پیوست الگوریتم های مربوط به فرم نرمال مرتبه اول (کلاسیک) ،میدان برداری صفر–هاپف آورده شده است .

[۱۰] Algaba

[۱۱] Bogdanov-Takens

فصل ۲

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مروری بر برخی مفاهیم، تعاریف و قضایای مورد نیاز در طول پایان نامه خواهیم داشت. اکثر این مفاهیم و تعاریف و قضایا از مراجع انتخاب شده اند.

۲—۱ مفاهیم پایه در دستگاه های دینامیکی

تعریف ۱.۲ دستگاه های معادلات دیفرانسیل خطی به صورت

$$\dot{x} = Ax, \tag{۲—۱}$$

می باشند، که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و A یک ماتریس $n \times n$ و $\dot{x}$ یک بردار ستونی با n مؤلفه به صورت زیر است

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه خطی همراه با شرط اولیه $x(0) = x_0$ به صورت زیر می باشد

$$x(t) = e^{At}x_0$$

که در آن e^{At} یک ماتریس $n \times n$ است .

تعریف ۲.۲ **زیرفضاهای پایدار و ناپایدار ومرکزی** دستگاه خطی که به ترتیب به صورت E^s و E^u و E^c نشان می دهیم به این صورت تعریف می شوند، فرض کنید که $w_j = u_j + iv_j$ بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با مقدار ویژه $\lambda_j = a_j + ib_j$ از ماتریس حقیقی A باشد، هم چنین فرض کنید

$$B = \{u_۱, \cdots, u_k, u_{k+۱}, v_{k+۱}, \cdots, u_m, v_m\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه‌این زیر فضاها به این صورت تعریف می شوند
زیرفضای پایدار؛

$$E^s = Span\{w_j : \ Re(\lambda_j) < ۰\}$$

زیرفضای ناپایدار؛

$$E^u = Span\{w_j : \ Re(\lambda_j) > ۰\}$$

زیرفضای مرکزی؛

$$E^c = Span\{w_j : \ Re(\lambda_j) = ۰\}$$

یعنی E^s و E^u و E^c زیرفضاهای $\mathbb{R}^n$ هستند که به وسیله‌ی قسمت های حقیقی و موهومی بردارهای تعمیم یافته w_j متناظر با مقدار ویژه λ_j با قسمت های حقیقی منفی ، مثبت ، صفر باشد.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم Λ یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^۲$ و $F : \Lambda \to \mathbb{R}^۲$ یک **میدان برداری از رده‌ی** C^r باشد که در آن r یک عدد طبیعی، یا $+\infty$ می باشد.

انتگرال‌گیری از میدان برداری $F(x)$ بدین معناست که منحنی $x(t)$ را به عنوان جواب هایی از معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = F(x), \qquad (۲-۲)$$

برای t در یک بازه‌ی $I \subset \mathbb{R}$ جستجو کنیم که در آن $x \in \Lambda$ و $\dot{x}$ نمایشگر $\frac{dx}{dt}$ است. متغیرهای x و t به‌ترتیب متغیر وابسته و متغیر مستقل معادله دیفرانسیل (۲$-$۲) هستند به‌طور معمول t، زمان نیز نامیده می‌شود.
از آن‌جا که $F = F(x)$ به t وابسته نیست، معادله دیفرانسیل (۲$-$۲) را **خودگردان** می‌گوییم.
جواب‌های این معادله دیفرانسیل به صورت نگاشت‌های مشتق پذیر $\varphi : I \to \Lambda$ هستند به‌طوری‌که برای هر $t \in I$

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t))$$

یک نقطه‌ی $x \in \Lambda$ که $F(x) = \circ$ یک نقطه‌ی **بحرانی** X نامیده می‌شود. هرگاه $F(x) \neq \circ$، x یک نقطه‌ی **منظم** میدان F نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲ نقطه بحرانی x یک هذلولوی دستگاه(۲—۲) می باشد هرگاه هیچ کدام از مقادیرویژه $D(Fx)$دارای قسمت حقیقی صفر نباشد، و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی صفر باشد آنگاه نقطه بحرانی یک نقطه غیر هذلولوی می باشد.

تعریف ۵.۲ فرض کنیم $x_\circ \in \Lambda$ و $\varphi : I \to \Lambda$ یک جواب از (۲—۲) باشد به‌طوری‌که $\varphi(\circ) = x_\circ$. جواب $\varphi : I \to \Lambda$ را **ماکزیمال** می‌نامیم هرگاه برای هر جواب $\psi : J \to \Lambda$ به‌طوری‌که $I \subset J$ و $\varphi = \psi|_I$ آن‌گاه $I = J$ هم چنین $\varphi = \psi$. در این حالت می‌نویسیم $I = I_{x_\circ}$ و آن را **بازه‌ی ماکزیمال جواب** می‌نامیم.

تعریف ۶.۲ فرض کنیم $\varphi : I_{x_\circ} \to \Lambda$ یک جواب ماکزیمال باشد که می‌تواند منظم یا ثابت باشد. تصویر آن $\gamma_\varphi = \{\varphi(t) : t \in I_{x_\circ}\} \in \Lambda$ با جهت القا شده توسط φ در حالتی که φ منظم است را **مسیر**، **مدار** یا **منحنی انتگرال (ماکزیمال)** مرتبط با جواب ماکزیمال φ می‌نامیم.

تعریف ۷.۲ نمای فاز میدان برداری $F : \Lambda \to \mathbb{R}^۲$ توسط مجموعه‌ی مدارهای (جهت دار) F مشخص می‌شود. **نمای فاز** شامل نقاط بحرانی در مدارهای منظم است که مطابق با جواب‌های ماکزیمال آن‌ها با افزایش t، جهت دار می‌شود، و جهت روی آن‌ها (در حالتی که مدارها منظم باشند) با پیکان نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲ خانواده‌ی تک پارامتری $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ایجاد شده توسط میدان برداری F را که به هر نقطه از صفحه‌ی فاز، نقطه‌ای از صفحه‌ی فاز را نسبت می‌دهد، **جریان دستگاه** نامیده می‌شود. جریان φ دارای خواص زیر است

(i) برای هر $x \in \Lambda$، $\varphi_\circ(x) = x$.

(ii) برای هر $x \in \Lambda$ و هر $s,t \in I_x$، $\varphi_{s+t}(x) = \varphi_s o \varphi_t(x)$.

(iii) برای هر $x \in \Lambda$ و هر $t \in I_x$، $\varphi_{-t}(x) = \varphi_t^{-۱}$.

مجموعه‌ی S تحت جریان φ_t **پایاست** هرگاه

$$\varphi_t(S) \subset S \quad \text{یا} \quad \forall x_\circ \in S \quad \varphi_t(x_o) \in S \quad ,\forall t$$

تعریف **۹.۲** فرض کنید X یک فضای متریک و A و B زیر فضاهایی از X باشند، یک **همیومورفیسم** از A به B، نگاشت یک به یک و پیوسته‌ای نظیر $h : A \to B$ است به طوری‌که $h^{-1} : B \to A$ نیز پیوسته باشد. مجموعه‌های A و B **همیومورفیک** یا **به‌طور توپولوژیک معادل** نامیده می‌شوند هرگاه یک همیومورفیسم از A به B موجود باشد.

تعریف **۱۰.۲** فرض کنیم F_1 و F_2 دو میدان برداری باشند که به ترتیب روی زیرمجموعه‌های باز Λ_1 و Λ_2 تعریف شده‌اند. گوییم F_1 **به طور توپولوژیک معادل** (C^r – **معادل**) با F_2 است هرگاه یک همیومورفیسم (یک دیفیومورفیسم از رده‌ی C^r) $h : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که مدارهای F_1 را با حفظ جهت به مدارهای F_2 ببرد. به بیان دقیق‌تر فرض کنیم $p \in \Lambda_1$ و γ_p^1 یک مدار جهت دار از F_1 باشد که از p می‌گذرد. آن‌گاه $h(\gamma_p^1)$ یک مدار جهت دار از F_2 خواهد بود که از $h(p)$ می‌گذرد. چنین همیومورفیسم (دیفیومورفیسم) h یک **معادل‌ساز توپولوژیکی** (یک C^r ـ **معادل ساز**) بین F_1 و F_2 نامیده می‌شود.

تعریف **۱۱.۲** فرض کنیم به‌ترتیب $\varphi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^2$ و $\varphi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^2$ جریان های ایجاد شده توسط میدان‌های برداری $F_1 : \Lambda_1 \to \mathbb{R}^2$ و $F_2 : \Lambda_2 \to \mathbb{R}^2$ باشند. گوییم F_1 **به طور توپولوژیک مزدوج** (C^r – **مزدوج**) با F_2 است هرگاه یک همیومورفیسم (یک دیفیومورفیسم از رده‌ی C^r) $h : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $(t,x) \in \Omega_1$: $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t,h(x))$. هم‌چنین همیومورفیسم (دیفیومرفیسم) h یک **مزوج ساز توپولوژیکی** (یک C^r ـ **مزدوج ساز**) بین F_1 و F_2 نامیده می‌شود.

یک معادل ساز توپولوژیک h یک هم‌ارزی بین میدان‌های برداری تعریف شده روی مجموعه‌های باز $\Lambda 1$ و $\Lambda_2 = h(\Lambda_1)$ تعریف می‌کند. یک معادل ساز توپولوژیک h بین F_1 و F_2 نقاط بحرانی را به نقاط بحرانی و مدارهای تناوبی را به مدارهای تناوبی می‌نگارد. اگر h یک مزدوج ساز باشد دوره‌ی تناوب مدار تناوبی نیز حفظ خواهد شد.

تعریف **۱۲.۲** فرض کنیم p یک نقطه‌ی بحرانی از میدان برداری مسطح $F = (P,Q)$ باشد. در این صورت

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

را قسمت خطی میدان برداری F در نقطه‌ی بحرانی p می‌نامیم. هم‌چنین فرض کنیم μ_1 و μ_2 مقادیر ویژه‌ی $DF(p)$ باشند.

نقطه‌ی بحرانی p را **هذلولوی** گوییم هرگاه دو مقدار ویژه‌ی $DX(p)$ دارای قسمت حقیقی مخالف صفر باشند. از طرفی p را **نیمه هذلولوی** می‌نامیم هرگاه $DF(p)$ دقیقاً یک مقدار ویژه‌ی صفر داشته باشد.

اگر $\mu_1 = \mu_2 = 0$، آن‌گاه p **تبهگون** نامیده می‌شود.
نقطه‌ی بحرانی p را یک **نقطه‌ی زینی** گوییم هرگاه $\mu_2 > 0 > \mu_1$.

تعریف ۱۳.۲ در حالتی که ماتریس ۱ در $\mathbb{R}^2$ باشد آن گاه دستگاه خطی به این صورت است

$$\dot{x} = Ax$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^2$ می باشد و A یک ماتریس 2×2 است حال این ماتریس با یکی ازماتریس های زیر متشابه است

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$$

در واقع دستگاه خطی $(2-2)$ به طور توپولوژیک معادل با دستگاه $\dot{x} = Bx$. حال در مورد منحنی فاز این دستگاه در حالت متفاوت بحث می کنیم .

(i) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ که در آن $\lambda < 0 < \mu$

در این حالت با توجه به تعریف نقطه مبدأ یک نقطه زینی است .

(ii) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda < 0$ و $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ و $\lambda \leq \mu < 0$

در این حالت مبدأ گره پایدار است و واگر $0 < \mu \leq \lambda$ آنگاه مبدا یک گره ناپایدار است .

(iii)

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

و $a < 0$

در این حالت مبدأ یک کانون پایدار است ، و اگر $a > 0$ آنگاه مبدأ یک کانون ناپایدار است .

(iv)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

در این حالت مبدأ یک مرکز گفته می شود.

تعریف ۱۴.۲ گره یا کانون پایدار دستگاه$(2-1)$ را چاه دستگاه خطی نامیده می شود و گره یا کانون ناپایدار دستگاه$(2-1)$ چشمه دستگاه خطی نام دارد.

قضیه **۱۵.۲** فرض کنید که Λ یک زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^۲$ باشد و شامل مبدأ بوده و $F \in \mathbb{C}^۲(\Lambda)$ باشد . فرض کنید که مبدأ یک نقطه بحرانی هذلولوی دستگاه(۲—۲) باشد. در این صورت مبدأ یک گره پایدار(یا ناپایدار) برای دستگاه غیرخطی (۲—۲)است ، اگروتنها اگر برای دستگاه خطی(۲—۱) با $A = Df(\circ)$ یک گره پایدار (یا ناپایدار)باشد و مبدأ یک کانون پایدار (یا ناپایدار) برای دستگاه غیر خطی (۲—۲) است ، اگرو تنهااگر یک کانون پایدار (یا ناپایدار) برای دستگاه خطی (۲—۱) باشد.

قضیه **۱۶.۲** فرض کنید که Λ یک زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^۲$ باشد و شامل مبدأ بوده و $F \in \mathbb{C}^۲(\Lambda)$ و $F(\circ) = \circ$باشد. فرض کنید که مبدأ یک مرکز برای دستگاه خطی(۳—۴) با $A = DF(\circ)$ باشد. در این صورت مبدأ یک مرکز، یا کانون مرکز یا یک کانون برای دستگاه غیرخطی (۲—۲)است .

اگر p یک نقطه بحرانی (۲—۲) باشد با توجه به تعریف $F(p) = \circ$ می باشد ، اما از قضیه‌ی تیلور داریم

$$F(x) = DF(p)x + \frac{۱}{۲}D^۲F(p)(x,x) + \cdots.$$

این نشان می دهد که تابع خطی $DF(\circ)x$ تقریب خوبی برای تابع غیرخطی $F(x)$ در نزدیک $x = p$ می باشد. قضیه هارتمن—گرابمن این مطلب را به خوبی نشان می دهد.

قضیه **۱۷.۲** (**هارتمن—گرابمن**)فرض کنید که Λ زیر مجموعه‌ی باز$\mathbb{R}^n$ باشد و هم‌چنین $F \in C^۱(\Lambda)$ باشد جریان دستگاه غیرخطی (۲—۲) باشد و فرض کنید که $F(\circ) = \circ$ و ماتریس $A = DF(\circ)$ مقدار ویژه ای با قسمت حقیقی صفر نداشته باشد در این صورت همیومورفیسمH از مجموعه ی باز U شامل مبدأ به روی مجموعه‌ی باز V شامل مبدأ وجوددارد که برای هر $x_\circ \in U$ و بازه‌ی باز $I_\circ \subseteqq \mathbb{R}$ شامل صفر چنان موجود باشد که برای هر $x_\circ \in U$ و هر $t \in I_\circ$ داشته باشیم

$$H \circ \phi_t(x_\circ) = e^{At}H(x_\circ)$$

در واقع میدان برداری $\dot{x} = Ax$ و $\dot{x} = F(x)$ به طور توپولوژیک معادل هستند.

قضیه **۱۸.۲** فرض کنید که Λ یک زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^۲$ باشد و شامل مبدأ بوده و $F \in \mathbb{C}^۲(\Lambda)$ و $F(\circ) = \circ$باشد. فرض کنید که مبدأ یک مرکز برای دستگاه خطی(۲—۱) با $A = DF(\circ)$ باشد. در این صورت مبدأ یک مرکز، یا کانون مرکز یا یک کانون برای دستگاه غیرخطی(۲—۲)است .

تعریف ۱۹.۲ یک **منیفلد دیفرانسیل پذیر** $n-$ بعدی M (یا یک منیفلد از کلاس C^k) یک فضای متریک همبند با پوشش باز $\{U_\alpha\}$ (یعنی $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$) است به طوری که

(۲–۳) برای هر α، U_α با گوی باز $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \ \|x\|<۱\}$ در $\mathbb{R}^n$، همیومورفیک باشد یعنی برای هر α، یک همیومورفیسم $h_\alpha: U_\alpha\to B$ موجود باشد و

اگر $U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\emptyset$ و $h_\alpha: U_\alpha\to B$ و $h_\beta: U_\beta\to B$ همیومورفیسم باشند آن‌گاه $h_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)$ و $h_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta)$ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ هستند و نگاشت $h=h_\alpha o h_\beta^{-۱}: h_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta)\to h_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)$ دیفرانسیل‌پذیر (یا از کلاس C^k) است و برای هر $x\in h_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta)$ دترمینان ژاکوبین مخالف صفراست، یعنی $|Dh(x)|\neq ۰$. منیفلد M **تحلیلی** است هرگاه نگاشت $h=h_\alpha o h_\beta$ تحلیلی باشد.

تعریف ۲۰.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل چند جمله‌ای مسطح

$$\dot{x}=P(x,y),\qquad \dot{y}=Q(x,y), \tag{۲–۳}$$

که در آن P و Q چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y هستند را در نظر می‌گیریم. **منیفلد پایدار موضعی** نقطه‌ی تعادل p از دستگاه دینامیکی (۲–۱) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W^s_{loc}(p)=\{x\in U; \Phi^t(x)\in U, t\geq ۰, \lim_{t\to\infty}\Phi_t(x)=p\}$$

که در آن U یک همسایگی باز از p است. به‌طور مشابه **منیفلد ناپایدار موضعی** p به شکل زیر تعریف می‌شود

$$W^u_{loc}(p)=\{x\in U; \Phi^t(x)\in U, t\leq ۰, \lim_{t\to-\infty}\Phi_t(x)=p\}$$

که در آن‌ها، جریان تعریف شده توسط (۲–۱) است.

تعریف ۲۱.۲ **منیفلد پایدار و ناپایدار سراسری** نقطه‌ی تعادل p از دستگاه (۲–۱) به‌ترتیب، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$W^s(p)=\bigcup_{t\geq ۰}\Phi^t(W^s_{loc}(p)),$$
$$W^u(p)=\bigcup_{t\leq ۰}\Phi^t(W^u_{loc}(p))$$

قضیه ۲۲.۲ (منیفلد مرکزی) فرض کنیم $f\in C^r(E)$ باشد که در آن E یک زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ شامل مبدا و $r\geq ۱$ است. فرض کنیم $f(۰)=۰$ و $Df(۰)$ دارای، k مقدار ویژه با قسمت حقیقی منفی،