بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

هندسه-توپولوژی

عنوان:

مباحثی روی مورفیسم‌های بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل

استاد راهنما:

دکتر اکبر دهقان نژاد

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مشتاقیون

پژوهش و نگارش:

مهتاب الیاسی

شهریور ماه ۱۳۹۱

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی سخاوت، سکوت، مهربانی و.....

پدرم، که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر،

توانش رفت تا به توانایی برسم و مویش سپید گشت تا رویم سپید بماند.

پیشکش دستان پر مهر و محبت مادرم:

آنکه آفتاب مهرش در آستانه قلبم، همچنان پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد

مادرم، که لحظه لحظه زندگی اش برایم همه درس است،

و عطر یاس دعاهایش اعتبار زیستنم.

سپاس‌گزاری...

به‌نام خداوندگار بزرگی که عقل را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

در آغاز بر خود واجب می‌دانم از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر اکبر دهقان نژاد که با راهنمایی‌های فراوانشان، مرا یاری نمودند، تشکر کنم چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تامین این پایان‌نامه بسیار مشکل می‌نمود.

هم‌چنین از جناب آقای دکتر سید محمد مشتاقیون، استاد مشاور ارجمندم، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از داوران محترم جناب آقایان دکتر بهروز بیدآباد و دکتر حسین خورشیدی که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از کلیه اساتید گرانقدر گروه که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر می نمایم.

از خانواده عزیزم که پیوسته یاریگرم بودند و هر لحظه تلاشم با فداکاری آن‌ها میسر گشته، و امیدوارم بتوانم در آینده‌ای نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم، سپاس‌گزاری می‌کنم.

و در پایان سپاسگزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده میشوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او بپای من سیاه نماند.

چکیده

در این پایان‌نامه، مفهوم مورفیسم شبه‌گروه‌های تعمیم یافته‌ی مورفیسم اتله‌ی هیفلیگر را معرفی خواهیم کرد. با این تعریف هر نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، یک مورفیسم بین شبه‌گروه‌های هولونومی متناظر القاء می‌کند. قضیه‌ی اصلی این پایان‌نامه به بیان این‌که هر مورفیسم بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل، کامل و دارای یک بستار است و هم‌چنین نگاشت‌هایش در طول بستار مدارها از کلاس C^∞ هستند، می‌پردازد. مفاهیم کامل بودن و بستار برای مورفیسم‌ها، ناشی از مفاهیم تعریف شده توسط هیفلیگر برای شبه‌گروه‌ها است. این نتیجه برای تقریب نگاشت‌های برگ‌بندی شده توسط نگاشت‌های هموار، در حالتی که برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل هستند، استفاده خواهد شد که ناوردایی هموتوپی برگ‌بندی شده از دنباله‌های طیفی آن‌ها را نتیجه می‌دهد.

کلمات کلیدی:

شبه‌گروه ریمانی، مورفیسم شبه‌گروه، برگ‌بندی ریمانی، نگاشت برگ‌بندی شده، تقریب C^∞، برگ‌بندی دنباله‌ی طیفی.

فهرست مطالب

۱.۰ پیشگفتار

در این پایان‌نامه ابتدا مفهوم مورفیسم شبه‌گروه‌ها معرفی می‌شود که تعمیمی از مورفیسم‌های اتله می‌باشد. مورفیسم اتله توسط هیفلیگر [۱] در سال ۱۹۸۸معرفی شده است. از آن‌جا که مفهوم مورفیسم شبه‌گروه‌ها با تغییر بسیار اندکی از تعریف هیفلیگر به‌دست می‌آید، بنابراین نه تنها شامل همئومورفیسم‌ها می‌باشد بلکه شامل نگاشت‌های پیوسته‌ی دلخواه نیز است. با این تعریف، هر نگاشت پیوسته بین فضاهای برگ‌بندی شده که برگ‌ها را به برگ‌ها می‌نگارد (نگاشت برگ‌بندی شده)، یک مورفیسم بین شبه‌گروه‌های هولونومی متناظر القاء می‌کند. به‌وضوح این مورفیسم، یک تابعگر بین رسته‌ی نگاشت‌های برگ‌بندی شده و مورفیسم شبه‌گروه‌ها تعریف می‌کند که تابعگر هولونومی نامیده می‌شود. از طرفی مورفیسم شبه‌گروه‌ها می‌تواند به‌عنوان مورفیسم S-اطلس‌ها نیز تعبیر شود که توسط وان اِست [۲] در مرجع [۴۱] به آن اشاره شده است و کلی‌تر از همومورفیسم گروه‌وارهای اتله می‌باشد. هر مورفیسم شبه‌گروه، یک نگاشت پیوسته بین فضاهای مدار متناظر القاء می‌کند.

هیفلیگر مورفیسم‌های دیگری نیز بین گروه‌وارهای توپولوژیکی در مرجع [۱۶] معرفی کرده است. هر مورفیسم هیفلیگر بین گروه‌وارهای اتله، یک مورفیسم القاء می‌کند. به هر حال مورفیسم‌هایی که در این پایان‌نامه معرفی خواهد شد، اطلاعاتی درباره‌ی نگاشت‌های موضعی از مورفیسم‌های هیفلیگر استخراج می‌کند و درباره‌ی ساختار اضافی آن‌ها صرفنظر می‌کند. از آن‌جا که نتایج اصلی این پایان‌نامه درباره‌ی نگاشت‌ها خواهد بود، بنابراین این مورفیسم‌ها برای مطالعه مناسب‌تر به نظر می‌رسند.

برای هر فضای توپولوژیکی دلخواه می‌توان شبه‌گروه تولید شده توسط نگاشت همانی‌اش را در نظر گرفت، در این صورت هر نگاشت پیوسته بین فضاهای توپولوژیکی، یک مورفیسم بین شبه‌گروه‌های متناظر تولید می‌کند. این تخصیص، یک تابعگر یک به یک کانونی بین رسته‌ی نگاشت‌های پیوسته و رسته‌ی مورفیسم‌ها تعریف می‌کند. در این حالت می‌توان بسیاری از مفاهیم هندسی و توپولوژیکی را به شبه‌گروه‌ها تعمیم داد. به‌عنوان مثال مفهوم هموتوپی و هم ارزی هموتوپی برای شبه‌گروه‌ها بیان می‌شود. تعریف گروه بنیادی یک شبه‌گروه با مدار متمایز توسط هیفلیگر در مرجع [۱۷] و وان اِست در مرجع [۴۱] ارائه

[۱] Haefliger

[۲] Van Est

شده است. برای یک شبه‌گروه شامل تبدیلات C^∞، کوهمولوژی دورام آن با کوهمولوژی ثابتش یکریخت می‌باشد.

به‌طور کلی در این پایان‌نامه، مورفیسم‌های بین شبه‌گروه‌های ایزومتری‌های موضعی منیفلدهای ریمانی (شبه‌گروه‌های ریمانی) در نظر گرفته می‌شود. هیفلیگر در مرجع [۱۸]، شرط کامل کننده را برای شبه‌گروه‌ها و بستار یک شبه‌گروه ریمانی کامل، معرفی کرده است. هم‌چنین در این پایان‌نامه، شرح جدیدی از این مفاهیم برای مورفیسم‌ها ارائه می‌شود. طبق مرجع [۳۶]، بستارهای مدار یک شبه‌گروه ریمانی کامل، برگ‌های یک برگ‌بندی تکین C^∞ هستند. در این صورت یک مورفیسم بین چنین شبه‌گروه‌هایی از کلاس $C^{\circ,\infty}$ نامیده می‌شود هرگاه شامل نگاشت‌هایی باشد که در طول بستار مدارها، C^∞ باشند و علاوه‌براین مشتقات برگ‌وار متناظر از مرتبه دلخواه، روی منیفلدهای محاطی، پیوسته باشد. این مفاهیم حتی برای برگ‌بندی‌های تکین نیز صحیح است. نتایج اصلی این پایان‌نامه به‌صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱.۱.۰. هر مورفیسم بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل، کامل بوده و دارای یک بستار می‌باشد. به‌علاوه این مورفیسم از کلاس $C^{\circ,\infty}$ است.

آخرین قسمت قضیه‌ی ۱.۱.۰ تعمیمی از این واقعیت مشهور است که هر مورفیسم پیوسته بین گروه‌های لی، C^∞ می‌باشد. بنابراین شرح جدیدی از قسمت آخر قضیه‌ی ۱.۱.۰ برای مورفیسم‌های اندازه‌پذیر به نظر ممکن می‌رسد.

اثبات قضیه‌ی ۱.۱.۰ مستلزم تکنیک‌های اساسی است. این قضیه دارای اثبات نسبتاً پیچیده‌ای است که در گام‌های مختلف ثابت می‌شود. نمونه‌ی ساده‌ی دیگری از اثبات قضیه‌ی فوق بدون جزئیات و فقط برای نمونه‌ی مدارهای چگال در مرجع [۱۰] ارائه شده است.

یک برگ‌بندی ریمانی، یک برگ‌بندی C^∞ است که شبه‌گروه هولونومی آن ریمانی می‌باشد. با توجه به مرجع [۳۵] این برگ‌بندی‌ها می‌توانند به‌طور موضعی توسط پوشاننده‌های ریمانی به ازای یک متر ریمانی، که به آن متر شبه‌کلاف می‌گویند، نیز توصیف شوند. یک برگ‌بندی ریمانی، به‌طور تراگرد کامل[۳] نامیده می‌شود هرگاه به ازای یک متر شبه‌کلاف، ژئودزیک‌های متعامد با برگ‌ها، کامل باشند.

یک توپولوژی خاص که توپولوژی سازگار قوی نامیده می‌شود، روی مجموعه نگاشت‌های برگ‌بندی

[۳] Transversely complete

شده‌ی بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، معرفی خواهد شد. این تعریف با استفاده از ساختار ویژه‌ی این برگ‌بندی‌ها به‌دست می‌آید ([۳۱]) و با توپولوژی فشرده-باز قوی برابر است هرگاه بستار برگ‌ها فشرده باشد.

یک هموتوپی شامل نگاشت‌های برگ‌بندی شده، یک هموتوپی برگ‌بندی شده نامیده می‌شود. مفهوم متناظر هم ارزی هموتوپی برگ‌بندی شده نیز قابل تعریف است که در بخش ۵.۱ به آن اشاره خواهد شد. توپولوژی سازگار قوی با توجه به قضیه‌ی زیر، نسبت به هموتوپی‌های برگ‌بندی شده دارای رفتار بهتری می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۰. اگر دو نگاشت برگ‌بندی شده بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل نسبت به توپولوژی سازگار قوی به‌اندازه‌ی کافی نزدیک به‌هم باشند، آن‌گاه یک هموتوپی برگ‌بندی شده بین این دو نگاشت وجود دارد. علاوه‌براین اگر نگاشت‌های برگ‌بندی شده سره باشند آن‌گاه این هموتوپی نیز می‌تواند طوری انتخاب شود تا سره باشد.

نتیجه‌ی زیر تقریب‌های هموار از نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، در حالتی که برگ‌بندی‌ها، ریمانی و به‌طور تراگرد کامل هستند، ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۱.۰. در فضای نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، بین دو برگ‌بندی ریمانی به‌طور تراگرد کامل با توپولوژی سازگار قوی، زیرمجموعه‌ی نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی C^∞ چگال است.

قضیه‌ی ۳.۱.۰ به همراه قضیه‌ی ۲.۱.۰، نتایج زیر را در پی دارد.

قضیه ۴.۱.۰. اگر دو نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، به‌طور برگ‌بندی شده هموتوپ باشند، آن‌گاه یک هموتوپی برگ‌بندی شده‌ی C^∞ بین این دو نگاشت وجود دارد.

نتیجه ۵.۱.۰. هر نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، با یک نگاشت برگ‌بندی شده‌ی C^∞، به‌طور برگ‌بندی شده هموتوپ است.

با توجه مراجع [۶]، [۲۳]، [۲۵] و [۳۷] اطلاعات کوهمولوژیکی یک منیفلد C^∞، M با وجود یک برگ‌بندی C^∞، $\mathcal{F}$، می‌تواند تعمیم داده شود. در واقع برگ‌بندی $\mathcal{F}$ باعث به‌وجود آمدن دنباله‌ی طیفی

$(E_i = E_i(\mathcal{F}), d_i)$ می‌شود که تعمیم واضحی از شرح دورام از دنباله‌های طیفی لرای[۴] از یک کلاف تاری C^∞ می‌باشد. این دنباله‌ی طیفی توسط یک پالایه‌ی مجتمع دورام[۵] از M القاء می‌شود که به‌طور موضعی مشابه کلاف تاری تعریف می‌شود. معمولاً کوهمولوژی‌های مختلفی مربوط به برگ‌بندی‌های C^∞، مشمول در این دنباله‌های طیفی هستند.

شرحی دیگر از دنباله‌های طیفی، $(E_{c,i}, d_i)$، می‌تواند توسط فرم‌های دیفرانسیل که دارای محمل فشرده هستند، تعریف شود. در حالت کلی (E_i, d_i) یک ناوردای توپولوژیکی نمی‌باشد، با این وجود بنا به نتایج ۴.۱.۰ و ۵.۱.۰، هر نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته‌ی بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، یک همومورفیسم بین دنباله‌های طیفی آن‌ها القاء می‌کند که ناوردایی دنباله‌ی طیفی طبق نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۱.۰. هر هم ارزی هموتوپی برگ‌بندی شده بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، یک یکریختی روی E_i، به ازای $i \geq ۲$، القاء می‌کند.

در حالتی که برگ‌ها چگال هستند، شرح جدید دیگری از نتیجه‌ی ۶.۱.۰ برای $E_۱$ وجود دارد. نتیجه‌ی ۶.۱.۰ ناوردایی توپولوژیکی کوهمولوژی اساسی را برای برگ‌بندی‌های ریمانی روی منیفلدهای بسته، تعمیم می‌دهد که توسط اِل قاسمی و نیکولو در مرجع [۲۲] بیان شده است. همچنین خوزئه مسا[۶] در مرجع [۲۷]، یک اثبات متفاوت از نتیجه‌ی ۶.۱.۰ ارائه داده است. ایشان یک نمونه‌ی جدید الکساندر-اسپانیر[۷] از دنباله‌ی طیفی معرفی کرده است که بنا به تعریف، یک ناوردای توپولوژیکی می‌باشد و در واقع برای این‌که ناوردا باشد توسط هم ارزی هموتوپی برگ‌بندی شده نشان داده شده است. در این صورت برای برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، ایشان نشان دادند که هر دو دنباله‌های طیفی یکریخت می‌باشند.

نمونه‌های دیگری از تقریب بالا و نتایج ناوردایی، برای نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی سره نیز اثبات می‌شود.

---

[۴] Leray

[۵] filtration of the de Rham complex

[۶] Xose M.Mas

[۷] Alexander-Spanier

قضیه ۷.۱.۰. در فضای نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی پیوسته، بین دو برگ‌بندی ریمانی به‌طور تراگرد کامل با توپولوژی سازگار قوی، زیرمجموعه‌ی نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی پیوسته‌ی سره، باز است. بنابراین زیرمجموعه‌ی نگاشت‌های برگ‌بندی شده‌ی C^∞ سره در این فضا چگال می‌باشد.

نتیجه ۸.۱.۰. برای برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، اگر دو نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته‌ی سره به‌طور برگ‌بندی شده هموتوپ باشند، آن‌گاه یک هموتوپی برگ‌بندی شده‌ی C^∞ سره بین این دو نگاشت وجود دارد.

نتیجه ۹.۱.۰. برای برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، یک هموتوپی برگ‌بندی شده‌ی سره بین هر نگاشت برگ‌بندی شده‌ی پیوسته‌ی سره و یک نگاشت برگ‌بندی شده‌ی C^∞ سره وجود دارد.

نتیجه ۱۰.۱.۰. هر هم ارزی هموتوپی برگ‌بندی شده‌ی سره بین برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل، یک یکریختی روی $E_{c,i}$، به ازای $i \geq ۲$، القاء می‌کند.

هم‌چنین در این پایان‌نامه، شرح جدیدی از توپولوژی فشرده-باز قوی روی مجموعه مورفیسم‌های بین دو شبه‌گروه، معرفی می‌شود. در این صورت تقریب بالا و نتایج ناوردایی برای مورفیسم‌ها به شرح زیر است.

قضیه ۱۱.۱.۰. در فضای مورفیسم‌های بین دو شبه‌گروه ریمانی کامل با توپولوژی فشرده-باز قوی، زیرمجموعه‌ی مورفیسم‌های C^∞، چگال است.

قضیه ۱۲.۱.۰. اگر دو مورفیسم بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل هموتوپ باشند، آن‌گاه یک هموتوپی C^∞ بین این دو مورفیسم وجود دارد.

قضیه ۱۳.۱.۰. هر مورفیسم بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل با یک مورفیسم C^∞، هموتوپ است.

نتیجه ۱۴.۱.۰. هر هم ارزی هموتوپی بین شبه‌گروه‌های ریمانی کامل، یک یکریختی بین کوهمولوژی‌های ناوردای آن‌ها القاء می‌کند.

در فصل اول این پایان‌نامه، علاوه‌بر معرفی مفاهیم جدید، مقدمات مورد نیاز درباره‌ی شبه‌گروه‌ها و فضاهای برگ‌بندی شده را یادآور می‌شویم. در فصل دوم علاوه‌بر بیان مباحثی روی شبه‌گروه‌ها و اشاره به

شرح جدید نظریه‌ی مولینو[8] برای آن‌ها، به جزئیات اثبات قضیه‌ی ۱.۱.۰ نیز می‌پردازیم. برای این منظور در این فصل نیز به بیان مقدماتی می‌پردازیم که البته بیش‌ترین اهمیت و تاکید روی شبه‌گروه‌های ریمانی کامل و برگ‌بندی‌های ریمانی به‌طور تراگرد کامل است. فصل سوم، به نتایج تقریب برای نگاشت‌های برگ‌بندی شده اختصاص داده شده است. مقدماتی روی دنباله‌های طیفی در بخش ۱.۴ و بررسی ناوردایی آن‌ها در بخش ۲.۴ ارائه شده است. در فصل آخر ابتدا به معرفی توپولوژی فشرده-باز قوی برای مورفیسم‌ها می‌پردازیم و سپس تقریب C^∞ مورفیسم‌ها را بیان می‌کنیم. هم‌چنین در این بخش ضمن معرفی کوهمولوژی شبه‌گروه‌های C^∞، به بررسی ناوردایی کوهمولوژی ناوردا نیز می‌پردازیم.

[8]Molino

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مورفیسم‌های شبه‌گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. یک شبه‌گروه از تبدیلات موضعی از یک فضای توپولوژی T، یک مجموعه‌ی $\mathcal{H}$، متشکل از همئومورفیسم‌های بین زیرمجموعه‌های باز T می‌باشد هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. دامنه‌ی اعضای $\mathcal{H}$، مجموعه‌ی T را بپوشاند.

۲. مجموعه‌ی $\mathcal{H}$ نسبت به تحدید دامنه‌اش بسته باشد. (یعنی هر عضو آن، با تحدید دامنه‌اش به مجموعه‌های باز پایدار باشد.)

۳. مجموعه $\mathcal{H}$ نسبت به ترکیب توابع بسته باشد. (یعنی اگر h و h' دو عضو دلخواه در $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه $h \circ h'$ نیز در صورت تعریف شدن به $\mathcal{H}$ تعلق داشته باشد.)

۴. مجموعه‌ی $\mathcal{H}$ نسبت به معکوس توابع بسته باشد. (یعنی اگر $h \in \mathcal{H}$ آن‌گاه $h^{-1} \in \mathcal{H}$ باشد.)

۵. اگر h همئومورفیسم بین مجموعه‌های T (مانند $h : u \longrightarrow v$ که در آن $u, v \subset T$ است.) باشد، به‌قسمی که دامنه‌ی h توسط مجموعه‌های بازی مانند u_iها پوشیده شود یعنی $u = \cup_i u_i$ و تحدید h به هر یک از مجموعه‌های باز u_i متعلق به $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $h \in \mathcal{H}$ باشد.

در تعریف قبل گاهی به‌طور معادل گفته می‌شود که $\mathcal{H}$ روی T عمل می‌کند.

مثال ۲.۱.۱. شبه‌گروه بدیهی، متشکل از تمام نگاشتهای همانی بین اعضای توپولوژی (T, τ) است.

مثال ۳.۱.۱. شبه‌گروه TOP، متشکل از تمام همئومورفیسم‌های بین مجموعه‌های باز (T, τ) است.

مثال ۴.۱.۱. مجموعه $\mathcal{H}$ متشکل از تمام همئومورفیسم‌های از کلاس C^r که $r > ۱$ است، الزاماً شبه‌گروه نیست، چون ممکن است ترکیب دو نگاشت دلخواه $\mathcal{H}$ از کلاس C^r نباشد. (از کلاس بالاتر یا پایین‌تر باشد.)

گاهی اوقات مناسب‌تر است که عناصر $\mathcal{H}$، به‌صورت نشاننده‌های باز با فضای هدف T در نظر گرفته شود.

تعریف ۵.۱.۱. شبه‌گروه $\mathcal{H}$، القایی توسط یک زیرمجموعه $S \subset \mathcal{H}$ نامیده می‌شود هرگاه هر نگاشت در $\mathcal{H}$ ترکیبی از نگاشت‌های S باشد.