بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ی ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

رساله برای دریافت درجه دکتری

رشته ریاضی محض گرایش هندسه

بررسی ساختاری گروه های متعامد و شبه متعامد

مؤلف:

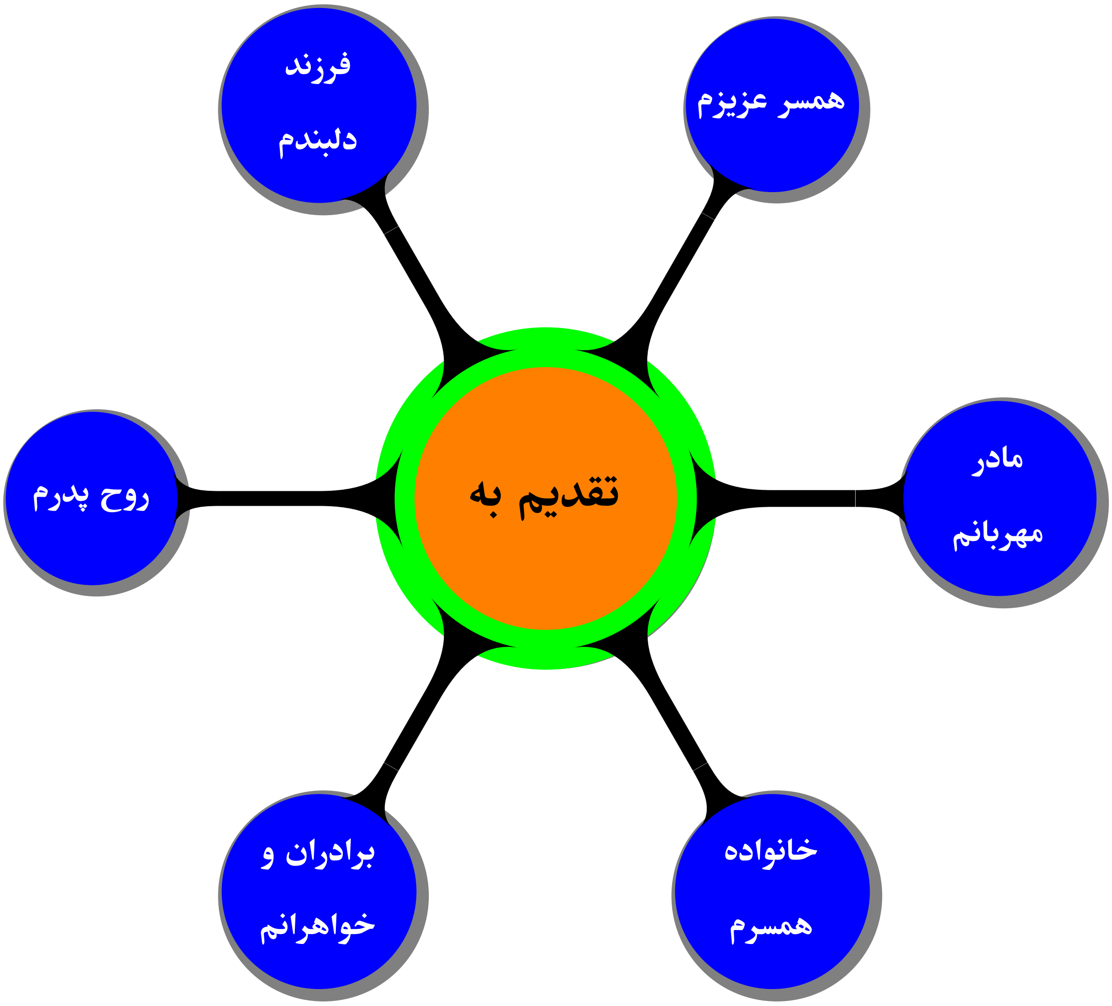
علی دلباز نسب

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مولایی

خردادماه ۱۳۹۲

تقدیم به


تقدیم به
همسر عزیزم
فرزند دلبندم
مادر مهربانم
روح پدرم
خانواده همسرم
برادران و خواهرانم

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز... بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ»:

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای پروفسور محمدرضا مولایی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند تشکر می‌نمایم؛

از اساتید فرزانه، جناب آقایان دکتر اسدا... رضوی و دکتر محمد ابراهیمی و خانم دکتر فاطمه قانع، که زحمت داوری این رساله متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید؛

از استاد فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر یوسف بهرامپور که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم؛

با درود فراوان به روح پر فتوح پدر بزرگوارم و سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم که سجده‌ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارش لحظه های مهربانی را به من آموخت؛

مراتب امتنان کامل و خالصانه خود را به همسر گرانمایه و عزیزم که با وقار و متانت و ترکیب صلابت و عطوفت و قلبی آکنده از عشق و معرفت و تحمل سختی‌های فراوان با یاری خداوند و همراهی و همدلی خانواده محترمش و فرزند دلبندم، محیطی سرشار از آرامش و آسایش را برایم فراهم نمودند ابراز و اعلام می‌نمایم؛

در نهایت از دوستان عزیزم آقایان فرید صابری موحد، سید احمد موسوی، عباس خاکسار، مهدی کماندار که در نوشتن مقالات و رساله به اینجانب کمک‌های فراوانی نمودند از صمیم قلب تشکر نموده و سلامتی، پیروزی و سرفرازی آنها را از خداوند تبارک و تعالی خواهان و خواستارم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

چکیده

ما در این پایان نامه مفهوم ضرب خارجی روی $\mathbb{R}^4$ را تعریف خواهیم نمود و به کمک این ضرب یک ضرب شرکت پذیر روی $\mathbb{R}^5$ تعریف می نماییم که $\mathbb{R}^5$ با جمع معمولی و ضرب اسکالر و این ضرب شرکت پذیر یک جبر شرکت پذیر خواهد بود و با استفاده از این جبر نمایشی از گروه های لی کواترنیون ها و $Su(2)$ را بدست می آوریم. همچنین ما روی فضای $\mathbb{R}^6$ یک ضرب خارجی تعریف می نماییم و به کمک این ضرب خارجی می توان کروشه هایی تعریف نمود که $\mathbb{R}^6$ با این کروشه ها با جبر های $so(4)$ و $so(2,2)$ و $so(3,1)$ یکریخت خواهد بود در ادامه نمایش هایی از گروه های لی $spin(4), spin(2,2)$ و $spin(3,1)$ بدست می اوریم. نهایتا یک زیر خمینه‌ی چهار بعدی از $\mathbb{R}^6$ را معرفی خواهیم نمود که مجهز به یک ساختار تقریبا مختلط است.

واژه‌های کلیدی: *جبر لی، کواترنیون ها، گروه لی، اسپینورها، جبر، خمینه*

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و پیش نیازها

مقدمه

زمانی بود که نظریه اتمی نسبتا ساده بود. تصور می شد که همه ی اتم ها از سه نوع ذره ی بنیادی متفاوت، یعنی پروتون، نوترون و الکترون ساخته شده اند. تحقیقات عمیق تر وجود انبوهی از ذرات بنیادی دیگر نظیر نوترینو،پیون، موئون، و غیره را آشکار ساخت. اما نظریه ای نبود که این ذرات را در ساختار منسجمی سازمان دهد.

در سال ۱۹۶۴ کشف شد که نظریه ی گروه ها می تواند چنین سازمانی را فراهم آورد. شرحی از این ایده که در زیر آمده، ضرورتا بسیار فشرده است، بنابراین انتظار نداشته باشیدکه بتوانید چیزی جز خطوط کلی را دنبال کنید.

روش اساسی استفاده از نظریه گروه هاست. نمایش های یک گروه مفروض G را به طریق زیر بدست می آوریم: به جستجوی یک فضای برداری V برمی آییم که دارای یک دسته تبدیلات خطی باشدکه تشکیل گروهی، G'، یکریخت با G را بدهند. این گروه G' (یا دقیقتر بگوئیم خود یکریختی) یک نمایش G خوانده می شود.

مثالی را در نظر بگیرید که در آن G گروهی است با دو عنصر $\{I, r\}$ بطوریکه $r^2 = I$. اگر $V = \mathbb{R}^2$ اختیار شود، می توان انعکاس T نسبت به یک خط ثابت گذرنده از مبدا را در نظر گرفت. اگر نگاشت همانی را با I نمایش دهیم، درآن صورت $\{I, T\}$ تشکیل گروهی از تبدیلات خطی V را می دهد. بعلاوه $T^2 = I$، بنابراین $G' = \{I, T\}$ با G یکریخت است. بعد فضای V را به بیان نادقیق، بعد نمایش می خوانند.

در مکانیک کوانتومی یک شی مفروض ممکن است در حالت های گوناگون انرژی وجود داشته باشد. در اتم هیدروژن، که از یک پروتون و یک الکترون تشکیل شده است، الکترون می تواند انرژی خود را از میان مجموعه ای نامتناهی، ولی کاملا مشخص، از مقادیر اختیار کند. الکترون می تواند تغییر حالت بدهد و هر تغییر حالت آن با جذب یا گسیل فوتون همراه است تا انرژی کل ثابت بماند.

قوانین مکانیک کوانتومی دارای این نتیجه ریاضی هستند. حالت های ممکن یک شی فیزیکی دقیقا با نمایش های گروه تقارن شی متناظر هستند.

به عنوان مثال، اتم منفردی که در نقطه ی ثابت P در خلا غوطه ور است، دارای تقارن کامل دورانی است: گروه تقارن آن $O_۳$ متشکل است از همه ی حرکت های صلب فضای سه بعدی که P را ثابت نگه می دارند. این گروه خود گروهی از تبدیلات خطی فضای سه بعدی است، زیرا حرکت های صلب تبدیلات خطی هستند، بنابراین دارای یک نمایش سه بعدی است (که فیزیکدانان آن را نمایش سه تایی می خوانند).

حال اگر میدانی مغناطیسی ایجاد کنیم تقارن از بین می رود. امتداد این میدان، خطی را در فضای سه بعدی مشخص می کند و در این صورت گروه تقارن، گروه $O_۲$ متشکل از دورانهائی است که این خط را ثابت نگه می دارند. ثابت می شود که نمایش سه تائی $O_۳$ به سه نمایش مختلف یک بعدی $O_۲$ تجزیه می شود. در یک طیفنما خط طیفی منفردی که در غیاب میدان مغناطیسی ظاهر می شود، پس از برقراری میدان به سه خط نزدیک بهم تجزیه می گردد. انرژی مربوط به این خطوط را می توان محاسبه کرد و مشاهده می شود که با آزمایش می خوانند.

استفاده از نظریه ی گروهها در مکانیک کوانتومی کاملا متداول است. این نظریه در سال ۱۹۳۸ برای پیش بینی وجود و خواص گوناگون پیونها مورد استفاده قرار گرفت. پیونها در سال ۱۹۴۷ به طور تجربی کشف گردیدند و معلوم شد خواص پیش بینی شده برای آنها درست بوده اند.

بعضی از ذرات بنیادی شناخته شده خیلی سنگین تر از بقیه هستند، و جمعا به عنوان باریون ها شناخته می شوند. باریون ها شامل نوترون n° پروتون n^+ ، و ذرات مرموزتری هستند که به Λ (لاندا)، Ξ (کسی)، Σ (سیگما) و Δ (دلتا) نموده می شوند. هر ذره جرمی دارد و دارای باری الکتریکی است که همواره به صورت مضارب صحیحی از واحد اساسی بار (بار الکتریکی الکترون منفی یک است، اما الکترون باریون نیست).

کمیتهای فیزیکی دیگری وجود دارند که به ذرات بنیادی مربوط می شوند، اما به اندازه ی جرم و بار ملموس نیستند در میان آنها می توان از اسپین، اسپین ایزوتوپی، ابر بار و شگفتی نام برد.

متداول ترین بار یون ها هشت تا هستند که عبارتند از یک دوتائی Ξ، یک سه تایی Σ، یک یک تائی Λ و یک دوتائی n.

این ذرات را می توان بر طبق نمایش های گروهی موسوم به $SU_۳$ مرتب کرد. طبیعی ترین نمایش $SU_۳$ از بعد هشت است. اگر تقارن نسبت به $SU_۳$ در طبیعت کامل نباشد، گروه تقارن به یک زیر گروه، $U_۲$ تقلیل پیدا می کند. نمایش های هشت بعدی اولیه به ۴ قسمت تجزیه می شود، که دارای بعدهای ۳،۲،۲ و ۱ هستند. این نمایش ها دقیقا متناظر با سه تائی Σ، دوتائی های Ξ، و n و یک تائی Λ هستند.

علاوه بر این مقادیر مشاهده شده ی Y، I، جرم و بار با مقادیری که بر اساس نظریه ی $SU_۳$ پیش بینی شده اند می خوانند. چنان است که گوئی بار یون ها واقعا حالتهای مختلف یک ذره ی بنیادیند که بوسیله ی عدم تقارن طبیعت به ۸ نوع مختلف در آمده اند.

این نظریه به "راه هشت گانه" موسوم است. آزمونی قطعی از این نظریه به عمل آمد. نمایش بعدی $SU_۳$ ده بعدی است. وقتی این نمایش به $U_۲$ محدود شود، به ۴ قسمت ۴، ۳، ۲ و ۱ بعدی تجزیه می شود. ۹ ذره ی

شناخته شده در آنها می گنجند. یک چهارتائی Δ، یک سه تائی Σ و یک دوتائی Ξ، بنابراین نظریه ای که مبتنی بر گروههای مجرد بود به درستی وجود ذره ای بنیادی را پیش بینی کرد که تا ان زمان ناشناخته بود.

۱.۱ فضای ضرب داخلی

هرگاه V یک فضای برداری حقیقی باشد، منظور از یک ضرب داخلی روی V، نگاشتی دو خطی و متقارن مانند $<,>: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ است که ناتبهگون باشد، به این معنی که صفر بودن $<x,y>$ به ازای هر $y\in V$، ایجاب کند که $x=0$. در چنین حالتی V همراه با ضرب داخلی $<,>$ یک فضای ضرب داخلی نام دارد.

هرگاه $<x,y>=0$، می گوییم x و y بر هم عمودند، و شرط ناتبهگون بودن $<,>$ به معنای آن است که هیچ بردار ناصفری بر همه ی بردارهای فضا عمود نیست. هرگاه برای هر x، عدد $<x,x>$ نامنفی باشد، ضرب داخلی را مثبت معین می نامیم. اگر بعد V متناهی باشد، پایه ای چون $\{e_1,...,e_n\}$ برای V وجود داردبه طوری که $<e_i,e_j>=\delta_{ij}$.

چنین پایه ای متعامد یکه نام دارد. هرگاه ضرب داخلی مثبت و معین نباشد، عدد $<x,x>$ به ازای برخی x های ناصفر، منفی و یا حتی ممکن است صفر باشد. با این حال در حالت بعد متناهی، می توان پایه ی $\{e_1,...,e_n\}$ را برای V چنان یافت که $|<e_i,e_j>|=\delta_{ij}$. اگر تعداد i هایی بین ۱ و n را که برای آنها $<e_i,e_j>$ مثبت است p بنامیم و قرار دهیم $q=n-p$، ضرب داخلی را از نشان (p,q) می نامند. (این p به پایه ی انتخاب شده بستگی ندارد). با این تعریف، ضرب داخلی مثبت و معین روی یک فضای n بعدی از نشان $(n,0)$ خواهد بود. ضرب داخلی از نشان $(0,n)$ را منفی و معین نیز می نامند.

به عنوان مثال، ضرب داخلی زیر روی $\mathbb{R}^n$ از نشان $(r,n-r)$ است، که ضرب داخلی کانونی از نشان $(r,n-r)$ خوانده می شود:

$$\langle (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\rangle=\sum_{i=1}^{r}x_iy_i-\sum_{i=r+1}^{n}x_iy_i \qquad (۱.۱)$$

که هرگاه V یک فضای برداری مختلط باشد، هر نگاشت دو خطی هرمیتی $<,>: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ را ناتبهگون (به همان مفوم پیش) باشد، یک ضرب داخلی روی V می نامیم. $<,>$ هرمیتی است هرگاه به ازای هر x و y در V، $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$. در چنین حالتی V همراه با ضرب داخلی $<,>$ یک فضای ضرب داخلی (یا فضای یکانی) نام دارد.

شرط هرمیتی بودن ایجاب می کند که برای هر x مقدار $<x,x>$ عددی حقیقی باشد. مثبت و معین بودن در اینجا نیز مانند حالت حقیقی تعریف می شود. در حالت بعد متناهی، وجود پایه های با خواص مذکور در حالت حقیقی عینا برقرار است، و نشان ضرب داخلی همانند حالت حقیقی تعریف می شود. به عنوان مثال،

ضرب داخای زیر روی $\mathbb{C}^n$ از نشان $(r, n-r)$ است، که ضرب داخلی کانونی از نشان $(r, n-r)$ خوانده می شود:

$$\langle (x_۱, ..., x_n), (y_۱, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=۱}^{r} x_i \overline{y_i} - \sum_{i=r+۱}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad (۲.۱)$$

۲.۱ گروه های خطی

برای هر فضای برداری V (حقیقی یا مختلط)، زیر مجموعه های مختلفی از مجموعه نگاشتهای خطی روی V با عمل ترکیب نگاشتها تشکیل گروه می دهند. این گروه ها را گروه های خطی می نامند. "بزرگترین" این گروهها مجموعه ی همه ی یکریختی های V است که با $GL(V)$ نشان داده می شود. در حالت $V = \mathbb{R}^n$ این گروه را با $GL(n)$ یا برای تاکید با $GL(n, \mathbb{R})$ ، و در حالت $V = \mathbb{C}^n$ با $GL(n, \mathbb{C})$ نشان می دهیم. وجود ضرب داخلی روی V، برخی از زیرگروه های $GL(V)$ را متمایز می کند. مثلا آن دسته از نگاشتهای خطی روی V که ضرب داخلی آن را حفظ می کنند، زیرگروهی از $GL(V)$ تشکیل می دهند که گروه نگاشت های خطی متعامد نام دارد. و با $O(V)$ نمایش داده می شود. در حالت $V = \mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی کانونی مثبت و معین آن، این زیر گروه را با $O(n)$ نشان می دهیم، و اگر $\mathbb{R}^n$ را با ضرب داخلی کانونی از نشان (p, q) در نظر بگیریم، این زیر گروه با $O(p, q)$ نشان داده می شود. به سادگی می توان نشان داد که در حالت بعد متناهی، دترمینان نگاشت های خطی متعامد ۱ یا ۱− است. آن دسته از این گونه نگاشت های خطی که دترمینان ۱ دارند، خود زیر گروهی دیگر تشکیل می دهند که در وضعیت های بالا به ترتیب با $SO(n)$ و $SO(p, q)$ نمایش داده می شوند. در حالت مختلط، نگاشت های خطی حافظ ضرب داخلی تشکیل گروهی می دهند که گروه نگاشت های خطی یکانی نام دارد. هرگاه $V = \mathbb{C}^n$ و ضرب داخلی کانونی و مثبت و معین باشد، گروه نگاشت های یکانی را به $U(n)$ نشان می دهیم. چنانچه $\mathbb{C}^n$ را با ضرب داخلی کانونی را از نشان (p, q) در نظر بگیریم، این گروه با $U(p, q)$ نمایش داده می شود. به سادگی می توان ثابت کرد که دترمینان این نگاشتها عددی مختلط با قدر مطلق ۱ است. زیر گروه مرکب از عناصری در $U(n)$ و $U(p, q)$ که دترمینان ۱ دارند، به ترتیب با $SU(n)$ و $SU(p, q)$ نشان داده می شود.

۳.۱ خمینه ها

همان گونه که از خم کردن یک خط به یک منحنی و از خم کردن یک صفحه به یک رویه می رسیم، می توانیم از خم کردن یک فضای اقلیدسی نیز موجودی بدست بیاوریم که خمینه نام دارد. به تعبیری دیگر، خمینه ها موجوداتی اند که موضعا مشابه فضاهای اقلیدسی به نظر می رسند اما ساختار سرتاسری آنها ممکن است بسیار پیچیده باشد. به عنوان مثال یک دایره موضعا مشابه $\mathbb{R}$ است، هر چند به طور فراگیر چنین نیست، و یا یک

چنبره با تعدادی متناهی حفره موضعا مشابه $\mathbb{R}^۲$ است، لیکن بطور فراگیر خواص متفاوت با $\mathbb{R}^۲$ دارد. به این ترتیب هر خمینه ی n بعدی جسمی است موضعا همسانریخت (هومئومورف) با $\mathbb{R}^n$ ، یعنی حول هر نقطه اش می توان آن را با n مختص پارامتر سازی کرد. با داشتن این دستگاههای مختصات، هر چند احتمالا هیچ یک تمامی خمینه ها را در بر نمی گیرند، می توان مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را روی خمینه تعریف کرد، و به این ترتیب می توان به خوبی از مشتق یک نگاشت بین دو خمینه یا انتگرال یک تابع حقیقی روی خمینه صحبت کرد.

به طور طبیعی به هر نقطه ی یک خمینه ی n بعدی یک فضای برداری حقیقی n بعدی نسبت می دهیم که فضای مماس بر خمینه در آن نقطه نام دارد. از نظر شهودی فضای مماس در یک نقطه ی خمینه ی ۱ بعدی و یا یک خمینه ی ۲ بعدی را می توان همچون خط مماس بر یک منحنی یا صفحه ی مماس بر یک رویه در نظر گرفت. البته این تنها یک تجسم خام است، چرا که برای خمینه های مجرد (که لزوما زیر مجموعه هایی از فضای اقلیدسی نیستند) اصولا به " خارج" خمینه دسترسی نداریم تا مفهومی برای مماس شدن یک فضای خطی بر آن قائل شویم. از دید موجوداتی که در روی خمینه زندگی می کنند، فضای مماس بر یک نقطه را می توان این گونه بدست آورد: همه ی خم های هموار گذرنده از آن نقطه در خمینه را در نظر می گیریم و در یک دستگاه مختصات حول آن نقطه، بردار سرعت این خمینه ها را محاسبه می کنیم، سپس کلیه ی خم هایی را که بردار سرعت یکسان دارند در یک رده ی هم ارزی قرار می دهیم. هر رده ی هم ارزی را یک بردار مماس بر خمینه در آن نقطه می نامیم. مجموعه ی همه ی بردارهای مماس به این طریق تشکیل یک فضای خطی n بعدی خواهند داد، که فضای مماس بر خمینه در آن نقطه نام دارد.

۴.۱ گروههای لی، کلیات

قبل ار هر چیز یادآوری می کنیم که تمامی تعاریف، قضایا و مثالهای این بخش از مرجع [۱] انتخاب شده اند لذا برای توضیحات بیشتر به مرجع مذکور مراجعه نمایید. هر خمینه ی مجهز به ساختار یک گروه، به طوری که اعمال اصلی گروه یعنی ضرب عناصر و وارون گیری نگاشتهایی دیفرانسیل پذیر باشند، یک گروه لی نام دارد. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ به همراه عمل جمع، صفحه ی مختلط سفته ی $\mathbb{C} - ۰$ به همراه عمل ضرب اعداد مختلط، $S^۱$ یعنی دایره ی واحد در $\mathbb{C}$ به همراه عمل ضرب اعداد مختلط، $S^۳$ یعنی کره ی واحد در فضای کواترنیون ها به همراه عمل ضرب کواترنیون ها، و $GL(n)$ مثال هایی از گروه لی به دست می دهند. علاوه بر این ها، گروههای خطی $O(n)$، $U(n)$، $O(p,q)$، $U(p,q)$، $SO(n)$ و ... را می توان چنان به یک خمینه مبدل ساخت که اعمال ضرب این گروه ها نسبت به ساختار آن خمینه، مشتق پذیر باشد. بنابراین این ها را نیز می توان مثال هایی ملموس از گروه های لی محسوب کرد.

در این بخش، به تعریف دقیق گروه لی [۱] که معادل تعریف بالاست و برخی از خواص عمومی آن می‌پردازیم.

---

[۱] Lie

تعریف ۱.۴.۱. یک گروه لی G عبارتست از یک خمینه G که دارای یک ساختار گروهی است بطوری که

$$\begin{aligned} \theta : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

مشتق پذیر باشد.

قضیه ۲.۴.۱. *یک خمینه G با یک ساختار گروهی یک گروه لی است اگر و تنها اگر نگاشتهای*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

مشتق پذیر باشند.

نتیجه ۳.۴.۱. *نگاشت*

$$\begin{aligned} \theta : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

یک وابرریختی است.

تبصره ۴.۴.۱. در قضیه ۲.۴.۱ مشتق پذیر بودن عمل گروه یعنی

$$\begin{aligned} \theta : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

برای گروه لی بودن G کفایت می‌کند.(مرجع [۱])

مثال ۵.۴.۱.

۱) $\mathbf{R}^n$ با عمل جمع یک گروه لی است.

۲) $\mathbf{C}^*$ (اعداد مختلط غیر صفر) با ضرب اعداد مختلط یک گروه لی است.

۳) دایره واحد S^1 با ضرب القا شده از $\mathbf{C}^*$ یک گروه لی است.

۴) اگر G و H گروه لی باشند، $G \times H$ با ضرب

$$(g_1,h_1).(g_2,h_2) = (g_1g_2,h_1h_2)$$

یک گروه لی است.

۵) چنبره [۱] معمولی یعنی $T^{۲} = S^{۱} \times S^{۱}$ و همچنین چنبره $n-$ بعدی یعنی

$$T^n = S^{۱} \times S^{۱} \times .... \times S^{۱}$$

یک گروه لی است. (در رابطه ی بالا $S^{۱}$ ، n بار در خودش ضرب شده است).

۶) گروه خطی عمومی [۱] $GL(n, \mathbf{R})$ یعنی گروه ماتریس های نامنفرد از اعداد حقیقی با ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

۷) مجموعه ماتریس های بالا مثلثی (درایه های زیر قطر صفرند) نامنفرد با ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

۸) فرض کنیم $\mathbf{R}^*$ اعداد حقیقی غیر صفر و $K = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. روی K ضربی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(s, t).(s_{۱}, t_{۱}) = (ss_{۱}, st_{۱} + t)$$

در این صورت K یک گروه لی است. این گروه لی را گروه حرکت های مستوی [۲] $\mathbf{R}$ نامند.

۹) فرض کنیم $K = GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$. ضربی به صورت زیر روی K تعریف می‌کنیم:

$$(A, \nu).(A_{۱}, \nu_{۱}) = (AA_{۱}, A\nu_{۱} + \nu)$$

با این ساختار گروهی، K یک گروه لی است. این گروه لی را گروه حرکات مستوی $\mathbf{R}^n$ نامند.

۱۰) اگر G یک گروه لی باشد،مؤلفه همانی [۳] (بزرگترین زیر مجموعه همبند شامل عضو همانی یا بی اثر G) نیز یک گروه لی است.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و $a \in G$ باشد، در این صورت نگاشت

$$L_a : \quad G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto ax$$

[۱] torus

[۱] group linear general

[۲] motion affine

[۳] component identity

را انتقال چپ [۴] توسط a نامند. و به طریق مشابه انتقال راست که آن را با R_a نشان می دهیم تعریف می شود.

قضیه ۷.۴.۱. *فرض کنیم G یک گروه لی و $a \in G$ باشد، در این صورت L_a و R_a روی G وابرریختی هستند.*

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه لی باشد. H را یک زیر گروه لی G نامند، چنانچه:

۱) H یک زیر خمینه G باشد.

۲) H یک زیر گروه G باشد.

۳) H یک گروه لی باشد.

مثال ۹.۴.۱.

مجموعه های زیر مثال هایی ساده از گروه های لی می باشند:

گروه متعامد خاص:

$$SO(n,\mathbb{R}) := \{A \in M(n,\mathbb{R}) \ : \ AA^t = I, detA = ۱\}$$

گروه یکانی:

$$U(n) := \{A \in M(n,\mathbb{C}) \ : \ A\overline{A}^t = I\}$$

گروه یکانی خاص:

$$SU(n) := \{A \in U(n,\mathbb{C}) \ : \ detA = ۱\}$$

گروه همتافته:

$$SP(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ A\Omega A^t = \Omega\}$$

که در آن منظور از Ω ماتریس زیر است:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \circ & I_n \\ -I_n & \circ \end{pmatrix}$$

۱) $SL(n,\mathbb{R})$ گروه ماتریسهای حقیقی $n \times n$ با دترمینان ۱ یک زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است.

۲) $\triangle(n,\mathbb{R})$ گروه ماتریس های بالا مثلثی نامنفرد یک زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است.

۳) $O(n,\mathbb{R})$ گروه ماتریس های $n \times n$ که فرم مربعی $(x^n)^۲ + ... + (x^۱)^۲$ را ناوردا نگه می‌دارد یک

[۴] translation left

زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است. $O(n,\mathbb{R})$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$O(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R}):A^tA=۱\}$$

که در آن A^t ترانهاده A و I ماتریس همانی است. $O(n,\mathbb{R})$ را گروه متعامد [۱] نامند.

۴) $SO(n,\mathbb{R})=O(n,\mathbb{R})\bigcap SL(n,\mathbb{R})$ یک زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است. این گروه را گروه متعامد خاص [۲] گویند.

قضیه ۱۰.۴.۱. *فرض کنیم H یک زیر گروه گروه لی G باشد و همچنین H یک زیر گروه نشانده شده در G باشد. در این صورت، H یک زیر گروه لی G است.*

قضیه ۱۱.۴.۱. *فرض کنیم G یک گروه لی با بعد n باشد و M یک خمینه با بعد $n>m$ و $M\longrightarrow \varphi:G$ یک نگاشت مشتقپذیر از رتبه m در نقطه $e\in G$ باشد. اگر $p=\varphi(e)$ و $H=\varphi^{-۱}(p)$، فرض کنیم به ازای هر $h\in H$ و $x\in G$ داشته باشیم:*

$$\varphi(hx)=\varphi(x)$$

و یا $\varphi oL_h=\varphi$. در این صورت H یک زیر گروه لی G است و $dimH=n-m$

مثال ۱۲.۴.۱. $SL(n,\mathbb{R})$ یک زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است و بعد آن برابر $n^۲-۱$ است.

تابع φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\varphi:GL(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ A &\longmapsto detA\end{aligned}$$

واضح است که φ مشتق پذیر است و همچنین اگر (x^{ij}) مختصات متعارف روی $\mathbb{R}^{n^۲}$ و یا $GL(n,\mathbb{R})$ (به عنوان زیر خمینه ای باز از $\mathbb{R}^{n^۲}$) باشد، داریم:

$$\varphi(\frac{\partial}{\partial x^{ij}})_I=(cofactor(x^{ij}))_I=\delta^{ij}(\frac{d}{dt})_۱$$

و بنابراین در نقطه I، $rank\varphi=۱$ همچنین $\varphi(I)=۱$ و $\varphi^{-۱}(۱)=SL(n<\mathbb{R})$ و به علاوه به ازای هر

[۱] orthogonal group

[۲] group orthogonal special

$A \in SL(n,\mathbb{R})$ و $B \in GL(n,\mathbb{R})$ داریم:

$$\varphi(AB) = detAB = detA.detB = detB = \varphi(B)$$

بنابراین بنابر قضیه ۱۱.۴.۱ ، $SL(n,\mathbb{R})$ یک زیر گروه توپولوژیکی $GL(n,\mathbb{R})$ با بعد $n^{2}-1$ است.

قضیه ۱۳.۴.۱. *یک گروه لی همبند به وسیله هر همسایگی عضو بی‌اثر e تولید می‌شود.*

قضیه ۱۴.۴.۱. *فرض کنیم G یک گروه لی باشد و G_0 مؤلفه همانی آن باشد، در این صورت G_0 یک زیر گروه لی همبند باز (و در نتیجه توپولوژیکی) و بسته G است.*

قضیه ۱۵.۴.۱. *هر گروه لی همبند G الزاماً یک پایه شمارا دارد.*

تعریف ۱۶.۴.۱. در تعریف گروه لی ۱.۴.۱ چنانچه خمینه زمینه مختلط و نگاشت θ تحلیلی باشد گروه را گروه لی مختلط می‌نامند.

همچنین چنانچه در تعریف گروه لی خمینه زمینه تحلیلی باشد و نگاشت θ نیز تحلیلی باشد، آن را گروه تحلیلی نامند ولی می‌توان ثابت کرد که یک گروه لی باساختار C^{∞} الزاماً تحلیلی است.

۵.۱ جبرها

هر فضای برداری (حقیقی یا مختلط) V را که مجهز به یک نگاشت دو خطی از $V \times V$ به V شده باشد، یک جبر می نامند. این نگاشت دو خطی، که به مانند یک قانون ترکیب روی V عمل می کند، ضرب V نام دارد. هرگاه این قانون ضرب ویژگی اضافه ای هم داشته باشد، آن ویژگی را اصطلاحا به جبر V نیز نسبت می دهند. مثلا اگر ضرب مورد نظر شرکت پذیر یا جابجایی باشد و یا عنصر بی اثر داشته باشد، جبر را به ترتیب یک جبر شرکت پذیر، جبر جابجایی، و جبر یکه دار می نامند. به عنوان نمونه، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ با ضرب عادی خود جبرهایی شرکت پذیر، جابجایی، و یکه دارند. کواترنیون ها و ماتریس های مربعی مرتبه ی n نیز با ضرب عادی خود جبرهایی شرکت پذیر و یکه دارند.

تعریف ۱.۵.۱. یک جبر را متناوب می گوییم هر گاه زیر جبر تولید شده توسط هر دو عضو آن شرکت پذیر باشد.

قضیه ای منسوب به آرتین [۱] است که می گوید جبر $\mathbb{K}$ متناوب است اگر و فقط اگر برای هر $a,b \in \mathbb{K}$

[۱] Artin

از سه معادله ی زیر دوتای آن برقرار باشد:

$$a(ab) = (a^۲)b \qquad (۴.۱)$$

$$(ab)b = a(b^۲) \qquad (۵.۱)$$

$$a(ba) = (ab)a \qquad (۶.۱)$$

تذکر: کواترنیون ها یک جبر متناوب هستند

در حقیقت هر زیر جبر از اکتونیون ها که توسط دو عضو آن تولید شده است با $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ یا $\mathbb{K}$ یکریخت است.

اگر $\mathbb{K}$ یک جبر باشد که به روش کیلی-دیکسون ساخته شده باشد آنگاه برای هر $a \in \mathbb{K}$ مزودج a به شکل زیر معرفی می شود:

$$\overline{a} = Re(a) - Im(a)$$

که در مورد آن می توان گفت:

$$\overline{\overline{a}} = a \qquad \overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$$

و نیز برای هر $a \in \mathbb{K}$ نرم این عضو به شکل زیر معرفی می شود:

$$\|a\|^۲ := a\overline{a} = \overline{a}a$$

به راحتی دیده می شود که $\| \, . \, \|$ یک مقدار حقیقی، معین مثبت و یک فرم درجه دوم روی جبر $\mathbb{K}$ می باشد یعنی داریم:

$$\| \, . \, \| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto \overline{a}a$$

وجود یک فرم معین مثبت به ما نشان می دهد که هر عنصر غیر صفر جبر $\mathbb{K}$ دارای یک عنصر وارون ضربی است یعنی داریم:

$$a^{-۱} := \frac{\overline{a}}{\|a\|^۲}$$

همین طور می توان یک فرم دو خطی و متقارن تعریف کنیم که در واقع یک ضرب داخلی روی جبر $\mathbb{K}$ است

یعنی این که برای $c \in \mathbb{K}$ داریم: $\langle c, c\rangle = \|c\|^۲$ و اگر قرار دهیم: $c = a + b$ خواهیم داشت:

$$\|a+b\|^۲ = \|a\|^۲ + ۲\langle a, b\rangle + \|b\|^۲.$$

یا

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle =&\frac{۱}{۲}(\|a+b\|^۲ - \|a\|^۲ - \|b\|^۲)\\ =&\frac{۱}{۲}(a\bar{b} + b\overline{a)}\\ =&Re(a\bar{b}) = Re(\bar{a}b).\end{aligned}$$

در حقیقت نرم و ضرب داخلی تعریف شده در بالا همان نرم استاندارد اقلیدسی بوده و ضرب داخلی روی $\mathbb{K}$ به عنوان یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی در نظر گرفته شده است.
حال وقتی که این شرایط برای یک جبر کیلی-دیکسون (جبری است که به مشابه ساخت جبر اعداد مختلط از اعداد حقیقی است، برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۲] مراجعه کنید) برقرار باشند آنگاه برای این جبر خاصیت ویژه ی زیر را داریم:

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|$$

وقتی که یک جبر نرم دار در خاصیت بالا صدق کند آن را یک جبر تقسیمی نرم دار می نامیم. توجه داشته باشید که یک جبر تقسیمی نرم دار هیچ گاه مقسوم علیه صفر ندارد. ($a \in \mathbb{K}$ را یک مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه یک $۰ \neq b \in \mathbb{K}$ وجود داشته باشد بطوریکه $ab = ۰$ یا $ba = ۰$.) شایان ذکر است که تنها جبرهای تقسیمی نرم دار $\mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ و $\mathbb{O}$ هستند.

۶.۱ جبر لی

در این بخش، به تعریف جبر لی و ارتباط آن با گروه های لی می‌پردازیم. جبرهای لی در حالت کلی روی یک میدان $\mathbb{K}$ تعریف می‌شود، ولی ما عموماً $\mathbb{K}$ را برابر $\mathbb{R}$ و بعضاً برابر $\mathbb{C}$ می‌گیریم. فضاهای برداری با بعد متناهی هستند مگر اینکه نامتناهی بودن بعد آنها تصریح و یا از قیاس عبارت حاصل شود.

تعریف ۱.۶.۱. هرگاه قانون ضرب جبر V به معنای زیر پادجابجایی باشد و در اتحاد زیر (موسوم به اتحاد ژاکوبی) هم صدق کند، V را یک جبر لی می نامیم (و قانون ضرب را با $[,]$ نشان می دهیم):