بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

تأثیر مقسوم علیه صفر دقیق بر روی رده‌های فاکسی

استاد راهنما:
دکتر سیروس رسول‌یار

نگارش:
فرناز سیف‌پور

اسفند ۹۲

خداوندا...

با وجود این که می‌دانم تو دانا و مهربان و حکیم هستی، پس نگرانی‌ام از چیست؟ در صورتی که با دانایی از حالم خبر داری، با مهربانی دوستم داری و با حکمت برایم مصلحت می‌اندیشی، با این حال اگر باز هم نگران باشم، بدون شک به تو شرک آورده‌ام و جایی در درگاه تو ندارم...

سپاس گزاری...

گفت استاد، مبر درس از یاد

یاد باد آنچه به من گفت استاد...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خوبم، جناب آقای دکتر سیروس رسول‌یار، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های دلسوزانه ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را که بهترین پشتیبانان من بودند. و تشکر می‌کنم از خواهر و برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودندو همچنین از دوست عزیزم پگاه نیشابوری صمیمانه تشکر و قدردانی مینمایم.

فرناز سیف‌پور

اسفند ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

برای مدول نیم‌دوگان C روی یک حلقه، رده G_C-تصویری $(\mathcal{G}_C)$، رده اوسلندر $(\mathcal{A}_C)$ و رده باس $(\mathcal{B}_C)$ را نسبت به مقسوم علیه صفر دقیق مورد مطالعه قرار خواهیم داد بعلاوه بررسی می‌کنیم که اگر M یک R-مدول، x یک مقسوم علیه صفر دقیق روی R باشد آنگاه M/xM تحت چه شرایطی متعلق به رده‌های فوق می‌باشد. همچنین بعدهای $\mathcal{I}_C$-انژکتیو، $\mathcal{P}_C$-تصویری و $\mathcal{F}_C$-تصویری نسبت به مقسوم علیه صفر دقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی:

نیم‌دوگان، G_C-تصویری، C-تصویری، C-یکدست، C-انژکتیو، رده اوسلندر، رده باس، مقسوم علیه صفر دقیق.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فاکسبی [۱] و واسکونسلوس [۲] به طور جداگانه درباره مدول‌های نیم‌دوگان تحقیق نمودند. R- مدول C را نیم‌دوگان نامیم هرگاه

۱. C یک R- مدول با تولید متناهی باشد.

۲. نگاشت تجانس طبیعی $\chi_C^R : R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,C)$ یکریخت باشد.

۳. برای هر $i > o$، $\mathrm{Ext}_R^i(C,C) = o$.

سوتو [۳] برای اولین بار مقسوم علیه صفر دقیق را تعریف نمود.

کلاس اوسلندر و کلاس باس بوسیله آورامو [۴] و فاکسبی تعریف شد که در این پایان‌نامه کلاس اوسلندر و کلاس باس و کلاس C- انعکاسی کلی را نسبت به مقسوم علیه صفر دقیق بررسی می‌شود.

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و C یک R- مدول نیم‌دوگان باشد کلاس C- تصویری را با $\mathcal{P}_C$ نمایش می‌دهیم که شامل همه R- مدول به فرم $C \underset{R}{\otimes} P$ که در آن P یک R- مدول تصویری است.در این پایان‌نامه تأثیر مقسوم علیه صفر دقیق روی کلاس C- تصویری بررسی می‌شود.

در فصل اول، تعاریف مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده است بیان می‌شود.

در فصل دوم، تأثیر مقسوم علیه صفر دقیق روی مدول نیم‌دوگان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم، کلاس اوسلندر ($\mathcal{A}_C$)، کلاس باس ($\mathcal{B}_C$) را نسبت به مقسوم علیه صفر دقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نیز قضیه مهمی در این فصل به اثبات می‌رسد که اگر x یک مقسوم علیه صفر دقیق روی R و C باشد آنگاه R/xR متعلق به کلاس $\mathcal{G}_C$ و $\mathcal{A}_C$ است.

در این فصل به هدف اصلی این پایان‌نامه جواب می‌دهیم که آیا اگر (x,y) یک زوج مقسوم علیه صفر دقیق روی R و M باشد آنگاه M/xM متعلق به کلاس $\mathcal{A}_C$، $\mathcal{B}_C$ یا $\mathcal{G}_C$ است؟

در فصل پایانی، نشان می‌دهیم که اگر x یک مقسوم علیه صفر دقیق روی R و C باشد و M یک R- مدول باشد که $xM \neq o$ و $xM \neq M$ باشد و $\mathcal{P}_C - \mathrm{pd}(M)$ متناهی باشد آنگاه

$$\mathcal{P}_{C/xC} - \mathrm{pd}(M/xM) \leq \mathcal{P}_C - \mathrm{pd}(M)$$

در فصل‌های دو، سه و چهار حلقه R یک حلقه جابجایی یکدار و نوتری و C یک R- مدول نیم‌دوگان است.

---

[۱] Foxby

[۲] Vasconcelos

[۳] Soto

[۴] Avramov

توجه کنید که سبک ارجاع به مطالب مندرج در پایان‌نامه به شیوه نگارش فارسی است. به عنوان مثال برای ملاحظه قضیه ۳.۲.۱ باید به فصل اول، بخش دوم رجوع کرد.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R-مدول M
$\mathcal{A}_C$	رده اوسلندر
$\mathcal{B}_C$	رده باس
$\deg(x)$	درجه عنصر همگن x
$\mathrm{depth}_R(I, M)$	عمق R-مدول M نسبت به ایده‌آل I
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول R-مدول M
$\mathcal{F}_C$	رده C-یکدست
$\mathcal{G}_C$	رده G_C-تصویری
$\mathrm{fd}_R(M)$	بعد یکدست R-مدول M
$\mathrm{id}_R(M)$	بعد انژکتیو R-مدول M
$\mathcal{I}_C$	رده C-انژکتیو
$\mathfrak{m}$	ایده‌آل ماکسیمال
$\mathrm{pd}_R(M)$	بعد تصویری R-مدول M
$\mathcal{P}_C$	رده C-تصویری
$S = R[x_1, \ldots, x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی حلقه R
ω_R	مدول متعارفی حلقه R
$\mathrm{Z}_R(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R-مدول M

فصل ۱

مفاهیم و قضایای اولیه

۱.۱ مفاهیم و قضایای اولیه

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید R حلقه و M یک R- مدول دلخواه باشد.*

۱. $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$

۲. $R \underset{R}{\otimes} M \cong M$

برهان. رجوع شود به فصل ۲ در [۱۵]. $\square$

لم ۲.۱.۱. *فرض کنبد R حلقه و I و J ایده‌آل‌هایی از آن باشد و M یک R- مدول باشد آنگاه:*

۱. $\mathrm{Hom}_R(\frac{R}{I}, M) \cong \mathrm{Ann}_M(I)$

۲. $\frac{R}{I} \underset{R}{\otimes} M \cong \frac{M}{IM}$

برهان. رجوع شود به فصل ۲ در [۱۵] $\square$

گزاره ۳.۱.۱. *فرض کنید R و S حلقه باشند. اگر M، R- مدول راست، N، $(R-S)$- دومدول و L را S- مدول راست فرض کنیم، آنگاه*

$$\mathrm{Hom}_S(M \underset{R}{\otimes} N, L) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, L)).$$

به علاوه اگر $R = S$ جابه‌جایی باشد $\mathbb{Z}$- یکریختی فوق، R- یکریختی است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۷ فصل ۵ از منبع [۱]. $\square$

قضیه ۴.۱.۱ (قضیه اول یکریختی). *فرض کنید M و N دو R- مدول باشند و $\varphi : M \longrightarrow N$ یک R- همریختی در این صورت $\frac{M}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \underset{R}{\cong} \mathrm{Im}\,\varphi$ بالاخص اگر φ یک R- بروریختی باشد آنگاه $\frac{M}{\mathrm{Ker}\,\varphi} \underset{R}{\cong} N$.*

لم ۵.۱.۱. *[پنج لم کوتاه[۱]] فرض کنید*

$$\begin{array}{ccccccccc} o & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & o \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ o & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & o \end{array}$$

یک نمودار جابه‌جایی از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها باشد به طوری که سطرها دنباله‌های دقیق هستند در این صورت

[۱] Five lemma

۱. *اگر α و γ یک به یک باشند β نیز یک به یک است.*

۲. *اگر α و γ پوشا باشند β نیز پوشا است.*

۳. *اگر α و γ یکریختی باشند β نیز یکریختی است.*

برهان. رجوع شود به فصل ۲ در [۱]. $\square$

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید دو رشته*

$$o \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow o \qquad (*)$$

$$o \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi'} K' \longrightarrow o \qquad (**)$$

از R - مدولها و R - همریختی‌ها یکریخت باشند در این صورت اگر زنجیر $(*)$ دقیق باشد آنگاه زنجیر $(**)$ نیز دقیق خواهد بود.

برهان. رجوع شود به فصل ۶ در [۱۵] . $\square$

گزاره ۷.۱.۱. *فرض کنید M یک R - مدول انژکتیو و I یک ایده‌آل از R باشد آنگاه $I \underset{M}{:} o$ به عنوان R/I - مدول انژکتیو است.*

برهان. رجوع شود به [۱۵]. $\square$

گزاره ۸.۱.۱. *فرض کنید R و S دو حلقه و S یک $(R-S)$ - دو مدول باشند. اگر P یک R - مدول راست تصویری باشد آنگاه $P \underset{R}{\otimes} S$ یک S - مدول تصویری است.*

برهان. رجوع شود به [۱]. $\square$

لم ۹.۱.۱. *مدول‌های M_R، ${}_SN_R$ و ${}_SI$ را در نظر بگیرید و همریختی*

$$\theta_{MNI} : M \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}_S(N, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(M, N), I)$$

که با ضابطه $\theta_{MNI}(m \otimes \phi)(\varphi) = \phi o \varphi(m)$ تعریف می‌شود. اگر M یک مدول با تولید متناهی تصویری باشد آنگاه θ_{MNI} یکریخت است.

برهان. رجوع شود به [۱۳]. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید M یک Z - مدول انژکتیو باشد و R حلقه‌ای دلخواه. در این صورت، $\mathrm{Hom}_Z(R, M)$ یک R - مدول انژکتیو است.*

برهان. رجوع شود به فصل ۹ در [۱] . □

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید R حلقه‌ای نوتری باشد و M و N دو R-مدول با تولید متناهی باشند در این صورت $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ نیز با تولید متناهی است.*

برهان. رجوع شود به فصل ۴ در [۱].

□

گزاره ۱۲.۱.۱. *اگر S یک R-مدول یکدست و $T \longrightarrow R$ یک همریختی حلقه‌ها باشد آنگاه $S \underset{R}{\otimes} T$ یک T-مدول یکدست است.*

برهان. رجوع شود به [۱۹] □

تعریف ۱۳.۱.۱. R-مدول M یکدست وفادار[۱] نامیده می‌شود هرگاه M یکدست بوده و برای هر R-مدول غیرصفر N، $M \underset{R}{\otimes} N \neq o$.

تعریف ۱۴.۱.۱. همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow S$ یکدست (یکدست وفادار) نامیده می‌شود، هرگاه S به‌عنوان R-مدول یکدست (یکدست وفادار) باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. نماد $Z(M)$ (برای تأکید روی حلقه $Z_R(M)$) نشان دهنده مجموعه مقسوم علیه‌های صفر R نسبت به M است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z_R(M) = \{x \in R | xm = o ، \text{به ازای عنصر ناصفری مانند } m \in M\}$$

۲.۱ مقدمه‌ای بر جبر همولوژی و جابجایی

در این بخش تعاریف، مفاهیم و قضایای مورد نیاز در جبر همولوژی را که در فصل‌های بعد از آن استفاده می‌کنیم، به اختصار بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ (n-اُمین مدول همولوژی). یک هم بافت نزولی از R-مدول‌ها، یک دنباله از R-همریختی‌های

$$\mathbf{C}_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d_n o\, d_{n+1} = o$. برای هر هم بافت نزولی $\mathbf{C}_\bullet$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$B_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Im}\, d_{n+1} \qquad , \qquad Z_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Ker}\, d_n$$

[۱] Faithfully flat

n-اُمین مدول همولوژی هم بافت $\mathbf{C}_\bullet$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) := \frac{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد، دنباله زیر

$$\longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

متشکل از R-مدول‌های تصویری و R-همریختی‌ها را یک تحلیل تصویری [1] برای M گوییم هرگاه R-همریختی پوشای $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ چنان باشد که دنباله زیر دقیق شود

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول و

$$\mathbf{P}_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

یک تحلیل تصویری برای M باشد. با اثر تابعگون هموورد $- \underset{R}{\otimes} N$ بر تحلیل فوق، هم بافت زیر را داریم

$$\mathbf{P}_\bullet \underset{R}{\otimes} N : \qquad \cdots \longrightarrow P_n \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{d_n \underset{R}{\otimes} 1_N} \cdots \longrightarrow P_1 \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{d_1 \underset{R}{\otimes} 1_N} P_0 \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow 0$$

برای هر $i \geq 0$، $\operatorname{Tor}_i^R(M,N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Tor}_i^R(M,N) := H_i(\mathbf{P}_\bullet \underset{R}{\otimes} N) = \frac{\operatorname{Ker}(d_i \underset{R}{\otimes} 1_N)}{\operatorname{Im}(d_{i+1} \underset{R}{\otimes} 1_N)}.$$

تعریف ۴.۲.۱. تعریف تحلیل آزاد نیز مشابه تعریف تحلیل تصویری است، فقط P_i ها، R-مدول آزادند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول و

$$\mathbf{P}_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

یک تحلیل تصویری برای M باشد. با اثر تابعگون پادوردِ $\operatorname{Hom}_R(-,N)$ بر تحلیل فوق، هم بافت زیر را داریم

$$\operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N) : \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(P_0,N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(d_1,1_N)} \operatorname{Hom}_R(P_1,N)$$

$$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(d_i,1_N)} \operatorname{Hom}_R(P_i,N) \longrightarrow \cdots$$

---

[1] Projective reselotion

که در آن $\mathrm{Hom}_R(d_i, 1_N)$، R-همریختی القایی توسط d_i است به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر $f \in \mathrm{Hom}_R(P_{i-1}, N)$ به صورت زیر عمل می‌کند

$$\mathrm{Hom}_R(d_i, 1_N)\ (f) = fo\, d_i$$

$\mathrm{Ext}^i_R(M, N)$ را برای هر $i \geq o$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = H^i(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_i, 1_N))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_{i-1}, 1_N))}.$$

تعریف ۶.۲.۱ (تابعگون مشتق شده چپ). فرض کنید T یک تابعگون همورد جمعی از رسته R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها به رسته R'-مدول‌ها و R'-همریختی‌ها باشد. فرض کنید M یک R-مدول و

$$\mathbf{P}_\bullet:\quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \xrightarrow{d_o} M \longrightarrow o$$

یک تحلیل تصویری برای M باشد. با اثر تابعگون T بر تحلیل فوق هم بافت زیر را داریم

$$\cdots \longrightarrow T(P_n) \xrightarrow{T(d_n)} T(P_{n-1}) \xrightarrow{T(d_{n-1})} \cdots \xrightarrow{T(d_2)} T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_o) \xrightarrow{T(d_o)} T(M) \longrightarrow o$$

برای هر $n \geq o$، n-اُمین تابعگون مشتق شده چپ [1] از تابعگون همورد جمعی T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_nT(M) = \frac{\mathrm{Ker}\, T(d_n)}{\mathrm{Im}\, T(d_{n+1})}$$

از رابطه فوق داریم

$$L_oT(M) = \frac{\mathrm{Ker}\, T(d_o)}{\mathrm{Im}\, T(d_1)} = \frac{T(P_o)}{\mathrm{Im}\, T(d_1)}$$

نکته ۷.۲.۱. *فرض کنید T یک تابعگون همورد دقیق راست باشد. در این صورت دو تابعگون $L_oT(-)$ و T به طور طبیعی هم‌ارزند.*

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. تابعگون $- \otimes M$ یک تابعگون همورد جمعی است، n-اُمین تابعگون مشتق شده چپ آن $\mathrm{Tor}^R_n(M, -)$ می‌باشد که این تابعگون نیز همورد جمعی است به علاوه با توجه به اینکه تابعگون $- \otimes M$ دقیق راست است از نکته قبل داریم

$$\mathrm{Tor}^R_o(M, -) \cong M \otimes -$$

نکته ۹.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد بطوریکه برای هر R-مدول دلخواه N داریم $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = o$ اگر و تنها اگر M یک R-مدول تصویری است.*

[1] Left drived functor

برهان. رجوع شود به فصل ۷ در [۱۵]. □

نکته ۱۰.۲.۱. *اگر E یک R-مدول انژکتیو باشد آنگاه تحلیل انژکتیو از R-مدول E به شکل زیر خواهد بود:*

$$o \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow o$$

در این صورت برای هر $i \geq ۱$ و هر R-مدول N داریم $\mathrm{Ext}^i_R(N, \mathrm{E}) = o$.
رجوع شود به فصل ۷ در [۱۵] .

گزاره ۱۱.۲.۱. *اگر ${}_RB_S$ یک R-مدول یکدست باشد و A و C دو R-مدول دلخواه باشند آنگاه:*

$$\mathrm{Tor}^S_n(A \underset{R}{\otimes} B, C) \cong \mathrm{Tor}^R_n(A, B \underset{S}{\otimes} C)$$

برهان. رجوع شود به فصل ۱۰ در [۱۵]. □

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر F یک R-مدول راست یکدست باشد آنگاه برای هر $n \geq ۱$ و برای هر R-مدول چپ M داریم $\mathrm{Tor}^R_n(F, M) = o$.*
اگر برای هر R-مدول چپ M داشته باشیم $\mathrm{Tor}^R_۱(F, M) = o$ آنگاه F یکدست است.

برهان. رجوع شود به فصل ۷ در [۱۵]. □

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. بعد انژکتیو[۱] M را با $\mathrm{id}_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیررا تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{id}_R(M) = \min \{n \in \mathbb{N}_\circ | \text{یک تحلیل انژکتیو به طول } n \text{ برای} M \text{وجود دارد.}\}$$

و اگر min فوق موجود نباشد داریم $\mathrm{id}_R(M) = \infty$.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. بعد تصویری[۲] M را با $\mathrm{pd}_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیررا تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{pd}_R(M) = \min \{n \in \mathbb{N}_\circ | \text{یک تحلیل تصویری به طول } n \text{ برای} M \text{وجود دارد.}\}$$

و اگر min فوق موجود نباشد داریم $\mathrm{pd}_R(M) = \infty$.

---

[۱] Injective dimension

[۲] Projective dimension

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. بعد یکدست[1] M را با $\mathrm{fd}_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیررا تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{fd}_R(M) = \min\{n \in \mathbb{N}_\circ | \text{یک تحلیل یکدست به طول } n \text{ برای} M \text{وجود دارد.}\}$$

و اگر min فوق موجود نباشد داریم $\mathrm{fd}_R(M) = \infty$.

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض کنید M یک R-مدول راست باشد و $n \in \mathbb{N}_\circ$ در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

۱. $\mathrm{fd}_R(M) \leq n$.

۲. *برای هر R-مدول چپ N و هر $\mathrm{k} \geq n+1$ داریم:* $\mathrm{Tor}_k^R(M, N) = o$.

۳. *همبافت دقیق زیرین از R-مدول‌های راست موجود است*

$$o \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow o$$

که در آن F_i ها یکدست هستند.

برهان. رجوع شود به [۱۵] . $\square$

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و نوتری باشد حلقه R را حلقه گرنشتاین[2] نامیم هرگاه

$$\mathrm{id}_R(R) = \dim R$$

نتیجه ۱۸.۲.۱. *فرض کنید R حلقه موضعی و نوتری باشد. حلقه R گرنشتاین است اگر*

$$\mathrm{id}_R(R) < \infty$$

تعریف ۱۹.۲.۱. بعد حلقه R را با $\dim R$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dim R = \max\{n \in \mathbb{N}_\circ : P_o \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \ \ , P_i \in Spec(R), i = o, ..., n\}$$

اگر max وجود نداشته باشد $\dim R = \infty$.

تعریف ۲۰.۲.۱ (عمق). فرض کنید R یک حلقه‌ای نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی ناصفر و I ایده‌آلی از R باشد و $M \neq IM$ طول M-رشته منظم ماکسیمال در I، نمره I در M نامیده می‌شود و با نماد $\mathrm{grade}(I, M)$ نشان می‌دهیم.

اگر در تعریف فوق حلقه موضعی باشد، $\mathrm{grade}(\mathfrak{m}, M)$ را با نماد $\mathrm{depth}\, M$ نشان داده می‌شود.

---

[1] Flat dimension

[2] Gorenstein

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی ناصفر باشد R-مدول M، کوهن-مکالی [۱] نامیده می‌شود هرگاه

$$\operatorname{depth}(M)=\dim_R(M)$$

اگر R به عنوان R-مدول کوهن-مکالی باشد آنگاه آن را یک حلقه کوهن-مکالی نامیم.

مدول کوهن-مکالی M را مدول کوهن-مکالی ماکسیمال نامیم اگر $\dim M=\dim R$

قضیه ۲۲.۲.۱. *هر حلقه گرنشتاین یک حلقه کوهن-مکالی است.*

برهان. رجوع شود به [۱۹].

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ حلقه موضعی و نوتری باشد و M یک R-مدول ناصفر و با تولید متناهی با $\operatorname{depth}_R M=t$. عدد $r(M)=\dim_k \operatorname{Ext}^t_R(k,M)$ تیپ [۲] M نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ حلقه موضعی و کوهن-مکالی باشد. R-مدول ماکسیمال کوهن-مکالی M از تیپ یک با بعد انژکتیو متناهی را R-مدول متعارفی [۳] می‌گویند.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنید R حوزه صحیح و K میدان کسرهای آن باشد. ماکزیمال عناصر از R-مدول M که روی R مستقل خطی باشند را رتبه [۴] مدول M نامیم. بنابراین رتبه R-مدول M را می‌توان همان بعد فضای برداری $K \underset{R}{\otimes} M$روی K در نظر گرفت.

۳.۱ مدول نیم‌دوگان و دوگان

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید C یک R-مدول باشد ریختار تجانس[۵] برای R-مدول C را به صورت نگاشت

$$\chi^R_C : R \to \operatorname{Hom}_R(C,C)$$

با ضابطه ی $\chi^R_C(r)(c)=rc$ تعریف می‌شود.

[۱] Cohen-Macaulay

[۲] Type

[۳] Canonical module

[۴] Rank

[۵] Homothety morphism